

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

Разложим число 3375:

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

Тогда могут быть восьмизначные числа, состоящие из:
а) трёх 3, трёх 5 и двух 1; б) одной 3, одной 9, трёх 5 и трёх 1

Посчитаем количество комбинаций:

а) $C_8^3 \cdot C_5^3$ (т.к. мы сначала расставим 3 одинаковые цифры на 8 мест, затем 3од. на оставшиеся 5 мест и единицы одинаково в оставшиеся (C_2^2))

$$C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 560$$

б) $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1$ (аналогично, но 3 и 9 есть 2 способа расставить (C_2^1))

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{1!} = 560 \cdot 2 = 1120$$

Значит, всего таких чисел существует $((a) + (б)) \cdot 1$:

$$1120 + 560 = 1680$$

Ответ: 1680

N2

Воспользуемся формулами разности косинусов, разности синусов и косинуса двойного угла

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 7x - 2 \cos 7x \cdot \sin 4x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) - \sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x) (\cos 7x - \sin 7x) = 0$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (\sqrt{2} \sin 7x - \sqrt{2} \cos 7x - 2 \sin 4x) = 0$$

$$\sin 7x + \cos 7x = 0 \quad | : \cos 7x \quad \text{или} \quad \sqrt{2} \sin 7x - \sqrt{2} \cos 7x - 2 \sin 4x = 0 \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$\tan 7x = -1$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x = \sin 4x$$

$$\sin(7x - \frac{\pi}{4}) = \sin 4x$$

$$2 \cos(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8}) \cdot \sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\cos(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0 \quad \text{или} \quad \sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n$$

$$x = \frac{5}{44}\pi + \frac{2}{11}\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n$$

Ответ: $-\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}$; $\frac{5}{44}\pi + \frac{2}{11}\pi n$; $\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n$

N3

$$\left\{ \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y} \right.$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^{\lg x} = 10 & (2) \quad x > 0 \\ y^{\lg y} = 10 & y > 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \end{aligned} \right.$$

из (1) и (2) Преобразовываем и получаем:

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg x} \cdot 1000 \quad (y^{2 \lg x} \neq 0, \text{ т.к. } y > 0)$$

$$y^{3 \lg x} = 1000$$

$$y^{\lg x} = 10$$

$$y^{\lg x} - x^{\lg x} = 0$$

по методу рационализации:

$$(y-x) \lg x = 0$$

$$\lg x = 0 \quad y = x$$

$$x = 1$$

и

Подставим $y = x$ во второе уравнение системы:

$$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$$

$$-4x^2 + 8x = 0$$

$$-4x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad x = 2$$

$$(не в. 0.003) \quad y = 2$$

Ответ: (2; 2)

N5

$$\left\{ \begin{aligned} |y-3-x| + |y-3+x| &= 6 \end{aligned} \right.$$

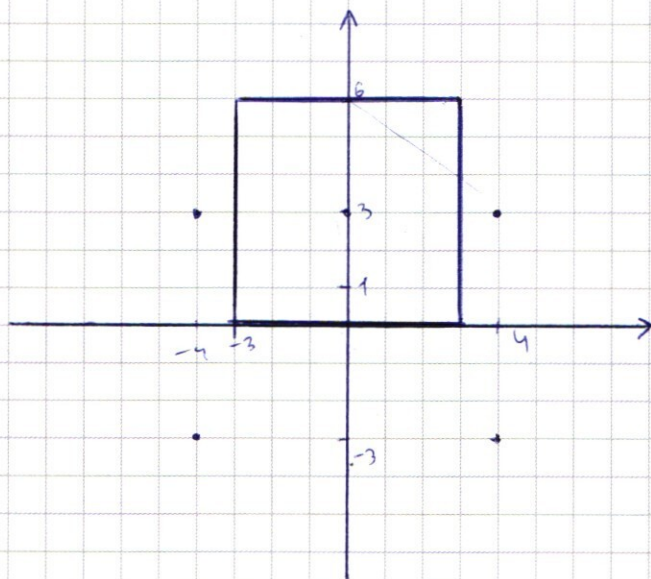
$$\left\{ \begin{aligned} (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 &= 0 \quad (2) \end{aligned} \right. \text{ график 4 окружностей (при } 5a \leq 3$$

(2): при $x \geq 0$ $y \geq 0$ окружность с центром (4; 3) и $R = \sqrt{a}$
 при $x < 0$ $y \geq 0$ окр. с ц. в (-4; 3) и $R = \sqrt{a}$
 при $x \geq 0$ $y < 0$ окр. с ц. в. (4; -3) и $R = \sqrt{a}$
 при $x < 0$ $y < 0$ окр. с ц. (-4; -3) и $R = \sqrt{a}$

Построим график 1 уравнения:



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



При $a < 1$ решений нет, т.к. ни одна из окруж. не соприкасается с квадратом (график уравн.)

При $a = 1$ $r = 1$ и 2 решения (касание в т. $(3; 3)$ и $(-3; 3)$)

При $r \in (1; \sqrt{10})$ - 4 решения

При $r = \sqrt{10}$ 2 решения (т.к. пересечение окр. с центрами в I и II четвертях с графиком 1-го уравн. совпадают)

при $r > \sqrt{10}$ решений нет

значит, нам подходит две ситуации:
 $a = 1$; $a = 10$ ($a = r^2$)

Ответ: 1, 10

N7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Схематично:



подходит
(пересекаются вторым
раз в жизни)

Каждый абзац пересечения
графиков функций:

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$x = 6 \text{ и } x = 70$$

$$(2^6 + 6 \cdot 2^{64} = 6 \cdot 2^{64} + 64) \quad (2^{70} + 6 \cdot 2^{64} = 70 \cdot 2^{64})$$

Точки $(6; 6 \cdot 2^{64} + 64)$ и $(70; 70 \cdot 2^{64})$ не
подходит, т.к. $y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$

Рассмотрим $x \in [7; 69]$:

$$\text{При } x = 7: y_1 = 2^7 + 3 \cdot 2^{65} \text{ и } y_2 = 70 \cdot 2^{64} + 63$$

$$\text{Здесь подходят точки: } y_2 - y_1 = 2^{64} + 63 - 2^7$$

$$\text{При } x = 8: y_1 = 2^8 + 3 \cdot 2^{65} \text{ и } y_2 = 8 \cdot 2^{64} + 62$$

$$y_2 - y_1 = 2 \cdot 2^{64} - 2^8 + 62$$

$$\text{и т.д. (} x = 69 \text{)} \quad y_1 = 2^{69} + 3 \cdot 2^{65} \quad y_2 = 69 \cdot 2^{64} + 1$$

$$y_2 - y_1 = 63 \cdot 2^{64} + 1 - 2^{69}$$

$$\sum (y_2 - y_1) = 2^{64} + 63 - 2^7 + 2 \cdot 2^{64} + 62 - 2^8 + \dots + 63 \cdot 2^{64} + 1 - 2^{69} =$$

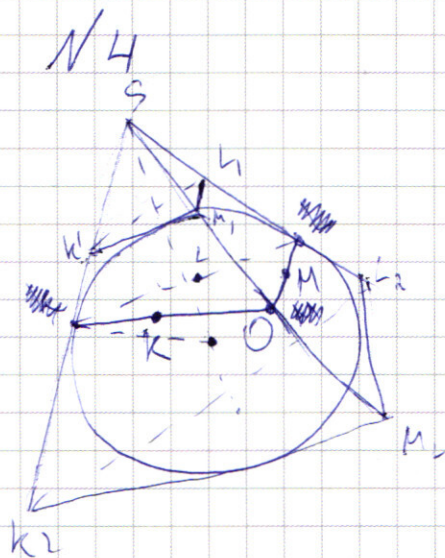
$$2^{64} (1 + 2 + \dots + 63) + (1 + 2 + \dots + 63) - (2^7 + 2^8 + \dots + 2^{69})$$

$$1 + 2 + \dots + 63 = \frac{63+1}{2} \cdot 63 = 2016$$

$$\sum 2^7 + 2^8 + \dots + 2^{69} = \frac{2^7 \cdot (2^{63} - 1)}{2 - 1} = 2^{70} - 2^7$$

$$\sum (y_i - y_1) = 2016 \cdot 2^{64} + 2016 - 2^{70} + 2^7 = 2^{64} (63 - 2) + 2016 + 2^7 =$$

$= 61 \cdot 2^{69} + 2144$ - количество подходящих точек (т.е. в y_+ - y_- точки, принадлежащие $y = 2^x + 3 \cdot 2^{0.5}$ не удовлетворяют)
[Ответ: $61 \cdot 2^{69} + 2144$]

$$[OT]_{\text{het}}: 61.2^{69} + 214^{44}$$


$$\frac{S_{K_2 M_2 L_2}}{S_{K_1 M_1 L_1}} = 4 \Rightarrow \frac{K_2 M_2}{K_1 M_1} = \frac{K_2 L_2}{K_1 L_1} = \frac{M_2 L_2}{M_1 L_1} = 2$$

из под обшивки трехэтажного
(K) (S) (F) (S) и под обшивкой трехэтажного

$$SO = h + r \text{ (где } h - \text{ высота пирамиды } SK, M, L, r - \text{ радиус сферы)}$$

$$H = h + 2r$$

$$\frac{h}{H} = 2 \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{т.к. углы } SK_1M, L_1 \text{ и } SK_2M, L_2 \text{ тоже равны})$$

$$2h = h + 2r \quad h = 2r$$
$$50 = 3r$$

ΔS_{KO} -прямуюгольный, т.е. $KO \perp (SK_1 M_2)$
по условию

$$\sin \angle SKO = \frac{OK}{SO} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$$

$$\angle SKD = \arcsin \frac{1}{3} \quad (\text{т.к. } < 90^\circ (\angle SKD + \angle SKO = 90^\circ))$$

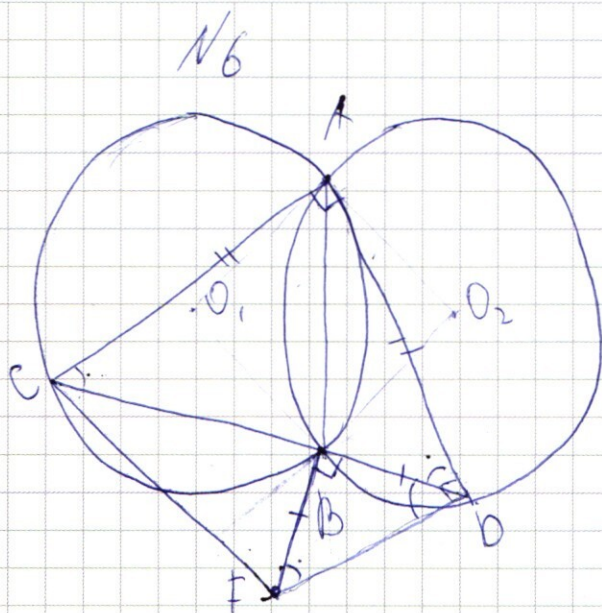
$$KS = MS = LS \quad \text{u. a. SO u. r. p. abh.}$$

$$2Sh_1 = Sh_2$$

$$S = 2$$

Or best: $\angle SKO = \arcsin \frac{1}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Если отразить окр. с ц. O_2
симметрично AB , то они совпадут.
Тогда B' лежит на окр. $(O_1, 5)$, а
значит $\angle ACB = \angle ADC = 45^\circ$

$\angle AO_1B = 90^\circ$ (т.к. центральный и
впис. $\angle ACB$)

$$AB = 5\sqrt{2}$$

$$\angle BDF = 45^\circ \Rightarrow \angle FDA = 90^\circ$$

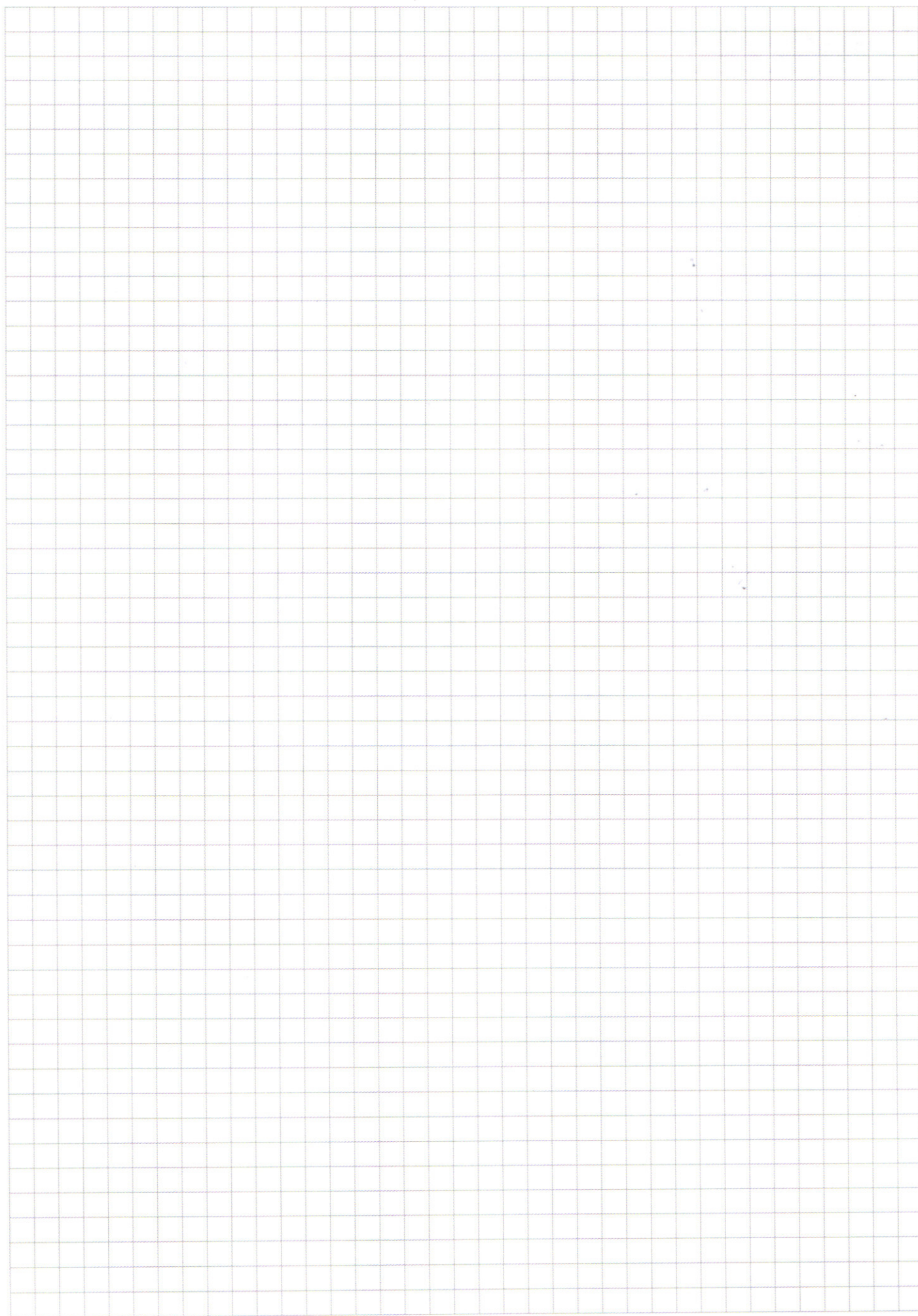
Значит, $AC \parallel FD$

$$CF^2 = AB^2 + (AD - FB)^2 =$$

$$CF^2 = FB^2 + CB^2$$

$$\triangle ACD \sim \triangle BFD$$

$$\frac{AC}{BF} = \frac{CD}{FD}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375 | 5 \\ 675 | 5 \\ 135 | 5 \\ 27 | 3 \\ 9 | 3 \\ 3 | 3 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ 250 \\ 500 \\ 1000 \\ 1680 \end{array}$$

$$3^3 \cdot 5^3$$

$$\begin{array}{r} 333555 | 1 \\ C_8^2 + 2C_8^3 = 28 + 112 = 140 \\ \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28 \\ \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11333555 \\ 13133555 \\ 1331 \\ 13331 \\ 1555 \\ 1120 \\ 1680 \end{array}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$C_8^2 \cdot C_6^3 = 28 \cdot 120 = 3360$$

$$C_8^3 \cdot C_6^2 = 56 \cdot 15 = 840$$

$$C_8^3 \cdot C_6^3 = 56 \cdot 120 = 6720$$

$$C_8^3 \cdot C_5^2 = 56 \cdot 10 = 560$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \cos 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 (\sin 7x \cdot \cos 4x + \sin 4x \cdot \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin 11x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos 14x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x$$

$$\cos 14x = \sin 4x \cdot \cos 10x - \sin 10x \cdot \cos 4x$$

$$\cos 14x = \cos 11x \cdot \cos 3x - \sin 11x \cdot \sin 3x$$

$$\cos 11x - \sqrt{2} \cos 11x \cdot \cos 3x - \cos 3x = \sin 11x - \sin 3x - \sqrt{2} \sin 11x \cdot \sin 3x$$

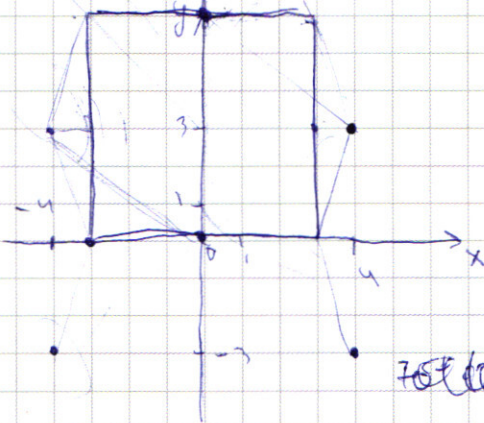
$$\cos 11x (1 - \sqrt{2} \cos 3x) - \cos 3x (1 - \sqrt{2} \cos 11x) + \sqrt{2} \cos 11x \cdot \sin 3x = \sin 11x (1 - \sin 3x) - \sin 3x (1 - \sin 11x) + \sqrt{2} \sin 11x \cdot \sin 3x$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{1/8} = y^{2/8x}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x(x-4) - 3y(y-4) - 2xy = 0$$

$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 0$$



$$75 \cdot 10^{-70} \cdot 2^{64}$$

$$2^{70} + 6 \cdot 2^{84}$$

$$14x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin \alpha - \sin \beta =$$

$$\begin{matrix} a=1 \\ a=25 \end{matrix}$$

$$3^2 + 2^2 =$$

$$a < 13$$

$$25 + 9 = 34$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

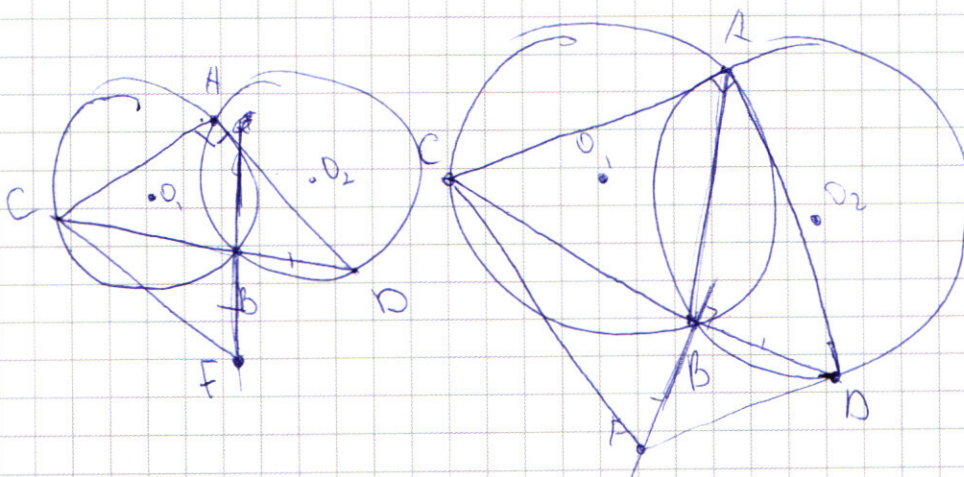
$$\cos 11x - \sin 11x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x = \cos 14x$$

$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) - \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

$$-2 \sin(7x + \frac{\pi}{4}) \cdot \sin(4x + \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

$$\cos 14x =$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

70

$$2^7 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$7 \cdot 2^{64} + 63 - 3 \cdot 2^{65} - 2^7 = 2^{64} - 65$$

$$8 \cdot 2^{64} + 62 - 2^8 - 3 \cdot 2^{65} = 2 \cdot 2^{64} -$$

$$2^{64} \cdot 2^{64} - 3 \cdot$$

$$69 \cdot 2^{64} + 1 - 2^{69} = 3 \cdot 2^{65} = 63 \cdot 2^{64} - 2^{69} + 1$$

$$\frac{1 + 63 \cdot 63}{2}$$

$$63 \cdot 32 \cdot 2^{64} + 63 \cdot 32 - \text{---} - 2^{64} \cdot 2^{64} + 2^7$$

$$2^7 \cdot (2^{63} - 1)$$

$$- 2^6 \cdot 2^{64} + 2^7$$

$$61 \cdot 2^{69} + 2144$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = q^n$$

$$(q-1)$$

$$16 \cdot 34 - 8 \cdot a_1 q$$

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2$$

$$a_1 (1 + q + q^2)$$

$$\frac{a_1 (q^n - 1)}{(q - 1)}$$

$$\frac{a_1 (q^n - 1)}{(q - 1)}$$

$$3375 \cdot \frac{625}{32}$$

$$2k_1 M_1 = k_2 M_2$$

$$h + 2r = 2h$$

$$h = 2r$$

$$SK = \sqrt{10} r$$

$$\sin \alpha = \frac{r}{50} = \sin \alpha$$

$$\frac{r}{h + r} = \frac{1}{3}$$

$$SK = SM = SL$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 7x - 2 \cos 7x \cdot \sin 4x = \sqrt{2} \cos 4x \cdot \cos 10x - \sqrt{2} \sin 4x \cdot \sin 10x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$\sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x) - 2 \sin 4x (\cos 7x - \sin 7x) = 0$$

$$(\cos 7x - \sin 7x) (\sqrt{2} \cos 7x + \sqrt{2} \sin 7x - 2 \sin 4x) = 0$$

$$\cos 7x = \sin 7x$$

$$\operatorname{tg} 7x = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}$$

$$\cos 7x + \sin 7x - \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

$$\cos 4x \cdot \cos 3x - \sin 4x \cdot \sin 3x - \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

$$-\sin 4x (\sin 3x + \sqrt{2}) + \cos 4x \cos 3x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x - \sin 4x = 0$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sin 4x = 0$$

$$2 \sin 2x \cos(\frac{11x}{2} + \frac{\pi}{8}) \cdot \sin(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\cos(\frac{11x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\sin(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\frac{11x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\frac{3x}{2} = -\frac{\pi}{8} + \pi n$$

$$\frac{11x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi n$$

$$x = -\frac{2\sqrt{11}}{24n} + \frac{2\pi n}{3}$$

$$x = \frac{36\pi}{88n} + \frac{25\pi}{11}$$

$$x^{\lg x} = x^{\lg_{10} x} = 10$$

$$(x-y)^2 - 4y^2 - 4x + 11y$$

$$y^{\lg xy} = y^{2\lg x + 2\lg y} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y}$$

$$y^{5\lg x} = 10 y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y}$$

$$y^{5\lg x} = 1000$$

$$y = x$$

$$y^{\lg x} = 10$$

$$y^{\lg x} - y^{\lg y} = 0$$

$$x = y$$

$$(\lg x - \lg y) = 0$$

$$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$$

$$-4x^2 + 8x = 0$$

$$y = 0 \quad x = 0 \quad -4x(x-2) \quad (x=2) \quad (2, 2)$$

