

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

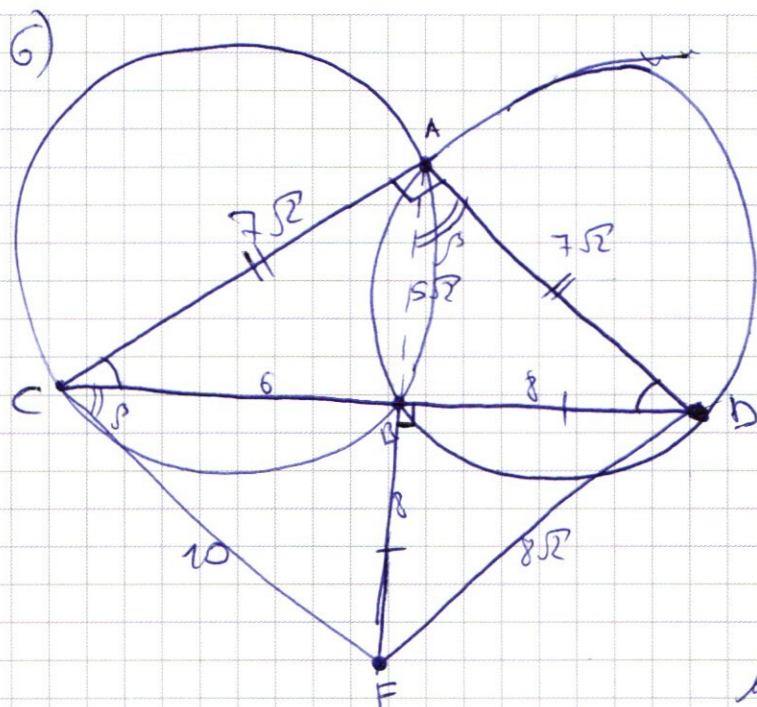
имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



a) $\triangle CPA: \sphericalangle 2 \Rightarrow \sphericalangle ACP = 90^\circ$

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin(\theta/2)} = \frac{AB}{\cos \theta}$$

$$\tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$AC \cong AD$$

$$AB = 2R \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

$$\Delta P_{AB} = \rho g h \Rightarrow B D = 2 R \sin \beta = \omega \sin \beta$$

Вналична ВС = $2R_n(1-p) = 10000 \text{ p}$

Bez $CF = 10 \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 10$

8) $\phi = 10 \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \beta = \frac{4}{5}$

$$BD = 8 \text{ m} \quad AC = \sqrt{50^2 + 30^2} = \sqrt{3400}$$

$$\frac{BR}{PE} = \frac{4}{5} \rightarrow \Delta BCR = \beta$$

$$CN^2 \cdot 4 = AC \sqrt{2} \Rightarrow AC = 7\sqrt{2}$$

$$\text{CORR: } \sin ACF = \sin(45^\circ + \arccos \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\cos \beta + \sin \beta}{\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

$$S_{\text{AEP}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 10 = 49$$

omb.: a) 10
b) 58.

$$3) \left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^{\lg x} = y^{\lg x + \lg y}$$

$$(x, y \geq 0)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = (x-3y)(x+y-4) = 0 \end{cases}$$

I случай: $x=3y$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3 + \lg y} = y^{2\lg 3 + 4\lg y}$$

$$y^{2\lg 3} = 3^{\lg 3 + \lg y}$$

$$2\lg 3 \cdot \log_3 y = \lg 3 + \lg y$$

//

$$2\lg y$$

$$\lg y = \lg 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 9$$

II случай: $x=4-y > 0 \Rightarrow y < 4$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg(4-y) + 2\lg y}$$

$$y^{3\lg(4-y) - 2\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$y=1 \Rightarrow 1 = 3^{\lg 3} \neq \Rightarrow y \neq 1 \Rightarrow \exists \log_3 P \quad (P > 0)$$

$$3\lg(4-y) - 2\lg y = \lg(4-y) \log_3(4-y)$$

$$y=3 \Rightarrow -2\lg 3 = 0 \neq \Rightarrow 4-y \neq 1 \Rightarrow \exists \log_{(4-y)} P \quad (P > 0) \quad \lg(4-y) \neq 0$$

$$\frac{3 - 2\lg y}{\lg(4-y)} = 3 - 2\log_{(4-y)} y = \log_3(4-y) := x \neq 0$$

$$3 - \frac{2}{x} = x$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$y=4-y \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=2$$

$$y^2=4-y \Rightarrow y^2+y-4=0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{17}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ОТВ.:
$$\begin{cases} x=9, y=3 \\ x=2, y=2 \\ x=\frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}, y=\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

1) $3375 = 3^3 \cdot 5^3$

Цифры числа должны быть 1, 3, 5 или 9. Есть два варианта:

1. одна из цифр — 9, а произведение остальных ~~чисел~~ — $3 \cdot 5^3$

значит надо рассмотреть 7 цифр от трёх 1-ых, 5-ых и ещё одну 3. Количество таких возможных вариантов — $\frac{7!}{3! \cdot 3!} = 140$,
(размешивок)

а 9 мы можем поставить в каждом из 8 мест $\Rightarrow$ есть $8 \cdot 140 = 1120$ вариантов.

2. ~~В~~ на месте никакого 9, т.е. надо рассмотреть 3×3 , 3×5 , 2×1 ,

это можно сделать $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$ способами.

Общее число таких чисел — $1120 + 560 = 1680$.

ОТВ.: 1680.

2) $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = -2 \sin 7x \sin 4x - 2 \cos 7x \sin 4x =$
 $= -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x)$

$\sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x)$

Если $\cos 7x + \sin 7x = 0 \Rightarrow \tan 7x = -1 \Rightarrow 7x = \frac{3\pi}{4} + \pi k \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi k}{7}$
($k \in \mathbb{Z}$)

Еще заметим, что $\cos 7x - \sin 7x = -\sqrt{2} \sin 4x$

$$\sqrt{2} \sin(4x - 7x)$$

$$\sin(4x - 7x) = -\sin 7x = \sin(-4x)$$

$$\begin{cases} 4x - 7x = -4x + 2\pi k \Rightarrow 3x = 2\pi k \\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 7x = 4x + \pi + 2\pi k \Rightarrow 11x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

Отв.:

$$x = \begin{cases} \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} \\ \frac{2\pi k}{3} \\ -\frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

5) $\begin{cases} y - 3 \geq \pm x \\ y - 3 = 3 \Rightarrow y = 6, |x| \leq 3 \Rightarrow 9 + (|x| - 4)^2 = a^* \quad (\text{От } 0 \text{ до } 2 \text{ решения}) \\ x = -3 \Rightarrow 1 + (|y| - 3)^2 = a^{**} \quad (> > >) \\ x = 3 \Rightarrow 1 + (|y| - 3)^2 = a^{**} \quad (> > >) \\ y - 3 \leq \pm x \\ y = 0 \Rightarrow -|x| \leq 3 \Rightarrow 9 + (|x| - 4)^2 = a \quad (> > >) \end{cases}$

Заметим, что I -ося и в $\mathbb{R}$ -осях системы (написаны в $\bar{I}$ и $\bar{III}$)

есть для уравнения которые аналогичны.

Чтобы было ровно 2 решения, либо одно из $*$ и $**$ должно

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2) \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x =$$

$$= \sqrt{2} (\cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2 \sin \frac{11x + 3x}{2} \sin \frac{11x - 3x}{2}$$

$$\cos 3x - \cos 7x = 2 \sin \frac{3x + 7x}{2} \sin \frac{3x - 7x}{2}$$

~~1~~

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \sin \frac{5x}{2} (-\sin 2x)$$

$$\sin \frac{5x}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos(90^\circ - 7x) - \cos 7x =$$

$$= 2 \cos 45^\circ \sin 7x$$

$$= \sqrt{2} \cos(45^\circ - 7x)$$

$$\cos 3x - \cos(90^\circ - 7x) =$$

$$= 2 \sin 45^\circ \sin 7x$$

$$\sqrt{2} \sin 4x = \cos 7x - \sin 7x = \sqrt{2} \cos(45^\circ - 7x)$$

$$-\sin 4x = \cos(45^\circ - 7x)$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x + \cos(90^\circ - 7x) - \cos(90^\circ - 11x) =$$

$$-2 \sin(90^\circ - 7x) \sin 4x =$$

$$= -2 \cos 7x \sin 4x$$

$$= -2 (\sin 7x \sin 4x + \cos 7x \sin 4x) =$$

$$2 - \sqrt{3} = \frac{(1 - \sqrt{3})^2}{2} = \frac{1 - 2\sqrt{3} + 3}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$= -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) =$$

$$= \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) \cos(45^\circ - 7x)$$

$$\begin{cases} \text{I} & \sin 7x = -\cos 7x \\ & \tan 7x = -1 \end{cases}$$

with which
we can find

не много решений, а уравнение — линейное, значит здесь (м.р.)
решение это будет решением при любых значениях $y = ax / (x - ax)$.

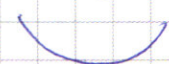
I ал.) $9 + (x-4)^2 = a$ не им. реш.

$|x| \leq 3$ тогда $\Rightarrow 9 + (x-4)^2 \in [10; 25] \Rightarrow a \in (-\infty; 10) \cup (25; +\infty)$

а. $1 + (y-3)^2 = a$ — им. 1 реш. при данном $x = c$.

$|y| \geq 3 \Rightarrow a = 1 \quad \emptyset$

II ал.) $1 + (y-3)^2 = a$ значит. не им. реш.



$\in [1; 10] \Rightarrow a \notin [1; 10]$

$9 + (x-4)^2 = a$ им. 1 реш.

$\Downarrow$
 $a = 9 \quad \emptyset$

Получаем, что независимо от a , данная уравнительная система не может иметь ровно два решения.

Отв.: $\emptyset$.

7)
$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{64} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{64} = 2^x + 6 \cdot 2^{64}$

$70 - 2^x - x > 2^{64} (6 - x)$

$70 - 3 \cdot 2^{64} > 2^x - x(2^{64} - 1) := f(x)$

$f'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{64} + 1$



$f(\log_2(\frac{2^{64}-1}{\ln 2})) = \frac{2^{64}-1}{\ln 2} - (2^{64}-1) \log_2(\frac{2^{64}-1}{\ln 2})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) \quad 3375 \begin{array}{l} | 3 \\ \hline 1125 \\ | 3 \\ \hline 375 \\ | 3 \\ \hline 125 \\ | 5 \\ \hline 25 \\ | 5 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$3375 = 27 \cdot 125 = \cancel{27} = 3^3 \cdot 5^3$$

abcdefg

$$abcdefg = 3^3 \cdot 5^3$$

$$(0, 0)$$

$$(0, 1)$$

$$(0, 2)$$

$$(0, 3)$$

$$(1, 0)$$

$$(3, 3)$$

$$a+b+c+d+e+f+g+h = (3, 3)$$

$$a_x + b_x + c_x + d_x + \dots + h_x = 3$$

$$\begin{array}{ccccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

С.ю

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3 = abc...h$$

$$a, b, c, \dots = 1, 3, 5, 9$$

$$\text{Число } 9 \text{ имеет 7 делителей: } 1, 3, 5, 9, 1, 1, 1$$

$$\begin{aligned} \cos(90-7x) - \cos(90-11x) &= \\ &= 2\sin(90-7x)\sin(-11x) = \\ &= 2\cos 7x \end{aligned}$$

$$\frac{7!}{3! \cdot 3!} = 140$$

$$\cdot 8 = 1120$$

$$9 \text{ делителей: } 1, 3, 5$$

$$\cos 11x - \cos 7x - \sin 11x + \sin 7x = \sqrt{2}(\cos 11x \cos 7x - \sin 11x \sin 7x)$$

$$= 2\sin 7x \sin 4x - 2\cos 7x \cos 4x$$

$$= 2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x)$$

$$= \sqrt{2} \sin 4x \cos 7x \sin 7x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3) \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy \\ x^2 - 7xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$x, y > 0$$

$$\underbrace{(x-y)^2 - 4y^2 - 4x + 12y}_{(x-3y)(x+y)} = \underbrace{(x-3y)(x+y-4)}_{-4(x-3y)} = 0$$

$$1_{\text{г}}. x = 4 - y > 0 \Rightarrow 0 < y < 4$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right) \lg(4-y) = y^2 \lg(4-y) + 2 \lg y$$

$$y^5 \lg(4-y) - 2 \lg(4-y) - 2 \lg y = (4-y) \lg(4-y)$$

$$y^5 \lg(4-y) - 2 \lg y = (4-y) \lg(4-y)$$

$$\lg y \left(\frac{y^5}{4-y}\right) \neq 0$$

$$3 \lg(4-y) - 2 \lg y = \lg(4-y) \lg y$$

$$\frac{3 \lg(4-y) - 2 \lg y}{\lg y} = \lg(4-y)$$

$$3 - \frac{2}{t} = t$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$2_{\text{г}}. x = 3y$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right) \lg 3 + \lg y = y^2 \lg y + 2 \lg 3 = (y^2)^{2 \lg y + \lg 3}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right) \lg 3 + \lg y = y^2 (\lg 3 + 2 \lg y)$$

$$y^4 (\lg 3 + \lg y) = 3^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^{2(\lg 3 + 2 \lg y)}$$

$$y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3 + \lg y}$$

$$2 \lg 3 \lg y = \lg 3 + \lg y$$

$$2 \lg y = \lg 3$$

$$\lg y = \lg 3$$

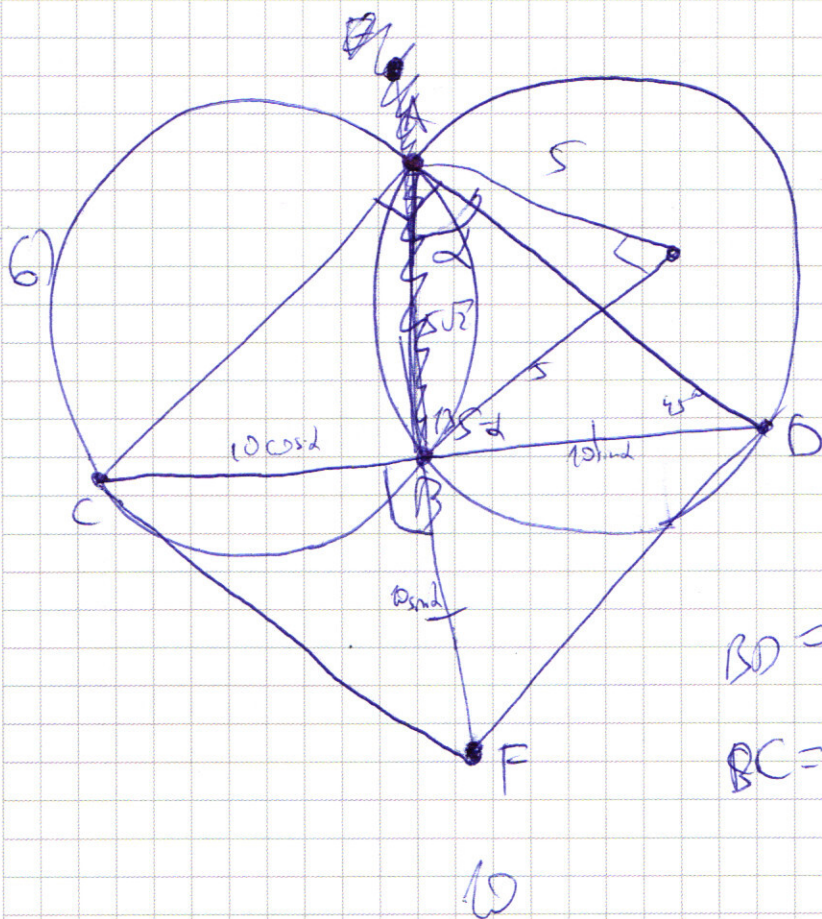
$$y = 3$$

$$5) \begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3 \geq x \\ y-3 \leq 0 \Rightarrow y=6 & \begin{matrix} y \geq x \\ x \leq 3 \end{matrix} & 9 + (|x|-4)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y-3 < x \\ x-y+3+y-3+x = 6 \Rightarrow x=3 & \begin{matrix} x > y \\ y > 3 \end{matrix} & 1 + (|y|-3)^2 = a \\ & & y \in (0, 6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3 \leq -x \\ x \leq 0 \\ y=0 & 9 + (|x|-4)^2 = a \end{cases}$$



$$\sin(2\alpha) = \cos(90^\circ - 2\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha) \cos \alpha + \sin(90^\circ - \alpha) \sin \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$$

$$BD = 10 \sin \alpha$$

$$BC = 10 \cos \alpha$$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$70 + (2^{64} - 1)x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 + 2^{64}x - x \geq 2^x + 6 \cdot 2^{64}$$

$$2^{64}(x-6) + 70 \geq 2^x + x$$