

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ① [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ② [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
- ③ [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
- ⑤ [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
- ⑦ [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №1

Разобьём число 3375 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 3 \\ 1125 & 3 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$3375 = 3^3 \cdot 5^3$. Тогда каждое ^{восьмизначное} число удовлетворяющее условию, состоит из двух единиц, трёх троек и трёх пятёрок. Рассмотрим количество таких чисел. Для начала рассмотрим число способов "проставить" единицы (*****):

Первую единицу можно разместить на любой из 8-ми мест, а вторую на любой из оставшихся 7-ми. П.к. расстановки типа $(1, 1)$ и $(1, 1)$ одинаковы то $n_1 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

Аналогично для троек: $n_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 20$.

И наконец для пятёрок: $n_5 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 3} = 1$.

Итоговое количество таких чисел: $N_1 = n_1 n_3 n_5 = 560$.

~~Однако~~ Однако помимо таких чисел, условие удовлетворяют числа из трёх единиц, одной тройки, трёх пятёрок и одной девятки. Проведя для данных чисел аналогичные рассуждения:

$$n'_1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} = 56, \quad n'_3 = 5, \quad n'_5 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3} = 4, \quad n'_9 = 1$$

$$N_2 = n'_1 n'_3 n'_5 n'_9 = 1120. \text{ Тогда } N = N_1 + N_2 = 1680.$$

Ответ: Всего есть $N = 1680$ таких 8-и значных чисел.

Задача №2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x;$$

$$\cos 11x - \cos 3x - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x;$$

Умножив на:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right);$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right);$$

Получили:

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \cos 7x \sin 4x = \sqrt{2} \cos 14x;$$

$$-2 \sin 4x (\cos 7x + \sin 7x) = \sqrt{2} \cos 14x;$$

$$\cos 14x = \cos^2 7x - \sin^2 7x = (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x);$$

$$-2 \sin 4x (\cos 7x + \sin 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x);$$

$$\cos 7x + \sin 7x = 0 \text{ - решение, данное по О.Д.З. } \cos 7x + \sin 7x \neq 0;$$

$$-2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x);$$

$$\sin 4x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x = \sin 7x \cos \frac{\pi}{4} - \cos 7x \sin \frac{\pi}{4};$$

$$\sin 4x = \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right); \quad 4x = 7x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k_2; \text{ или } \pi - 4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k_3;$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k_2; \quad x = \frac{\pi}{12}(1 + 8k_2); \quad x = \frac{\pi}{12}\left(\frac{5}{4} + 2k_3\right);$$

Также: $\cos 7x + \sin 7x = 0$ & $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) = -\sin(7x)$ или

$$\sin\left(7x - \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin 7x; \quad 7x - \frac{3\pi}{2} = -7x + 2\pi k_2; \quad 14x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2;$$

$$x = \frac{1}{14}\left(\frac{3\pi}{2} + \pi k_2\right);$$

Ответ: $x \in \left\{ \frac{\pi}{12}\left(\frac{3}{4} + k_1\right); \frac{\pi}{12}(1 + 8k_2); \frac{\pi}{12}\left(\frac{5}{4} + 2k_3\right); \right.$

$$\left. (k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}) \right\};$$

Задача №3

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy};$$

О.Д.З: $x > 0; y > 0;$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0; \quad x^2 + xy - 3xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0;$$

$$x^2 + xy - 4x - 3y^2 - 3xy + 12y = 0;$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(3-предложение); $X(X+y-4) \neq 3y(X+y-4)=0$;

Для начала рассмотрим $X+y-4=0$. $X=4-y$;

$$y^{5 \lg x} = x^{\lg x} y^{2 \lg x + 2 \lg y} \quad y^{3 \lg x - 2 \lg y} = x^{\lg x}$$

Трансформируем левую и правую части:

$$\lg y (3 \lg x - 2 \lg y) = \lg^2 x$$

$$\lg y (2 \lg x - 2 \lg y) = \lg^2 x - \lg x \lg y$$

$$2 \lg y (\lg x - \lg y) = \lg x (\lg x - \lg y)$$

Решение 1: $\lg x = \lg y \Rightarrow x = y = 2$;

$$2 \lg y = \lg x; (x \neq y); y^2 = x; y^2 + y - 4 = 0; D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$y = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}; \quad (\text{Корень со знаком } "+" \text{ берем, так как } y > 0)$$

$$X = 4 - y = \frac{7 - \sqrt{17}}{2}; \quad (\text{Корень со знаком } "-" \text{ не подходит, т.к. по ОДЗ, } y > 0)$$

Теперь рассмотрим $X+y-4 \neq 0$, $X=3y=0$ $X=3y$:

Решение 1: $\lg x = \lg y$; $\lg 3y = \lg y$; - невозможно

$$2 \lg y = \lg x; (x \neq y); y^2 = x; y^2 = 3y; y = 3; X = 9$$

Ответ: $(X_1=2; y_1=2), (X_2=\frac{7-\sqrt{17}}{2}; y_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2}), (X_3=9; y_3=3)$

Задание №5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6; \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a; \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение:

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6; \quad \text{Пусть } y-3+x = II, y-3-x = I$$

Пусть I и $II > 0$: $y-3-x+y-3+x=6; y=6; |x| \leq 3$

Пусть I и $II < 0$: $y-3-x+y-3+x=-6; y=0; |x| \leq 3$

Пусть $I > 0$, а $II < 0$: $y - 3 - x - y + 3 - x = 6$; $x = -3$; $0 \leq y \leq 6$;
Пусть $I < 0$, а $II > 0$: $-y + 3 + x + y - 3 + x = 6$; $x = 3$; $0 \leq y \leq 6$;

Рассмотрим $y = 6$; $|x| \leq 3$:

$$(|x| - 4)^2 + 9 = a; (|x| - 4)^2 = a - 9; \text{Т.е. если } a \geq 9$$

$$(|x| - 4)_{\max}^2 = 16; a \leq 25; \text{1-е решение если } 9 \leq a \leq 25$$

$$(|x| - 4)_{\min}^2 = 1; \text{1-е решение возможно, если } 10 \leq a \leq 25$$

Рассмотрим $y = 0$; $|x| \leq 3$:

$$(|x| - 4)^2 = a - 9; \text{2-е решение возможно если } 10 \leq a \leq 25;$$

Таким образом если $10 \leq a \leq 25$, то уравнение имеет как минимум два решения.

Случаи $x = -3 (0 \leq y \leq 6)$ и $x = 3 (0 \leq y \leq 6)$ эквивалентны, т.е. если один из них является решением, то и второй тоже.

$$(3 - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a; (|y| - 3)^2 = a - 1, \text{ т.к. } y \geq 0, \text{ можно опустить знак модуля. } (y - 3)^2 = a - 1;$$

$$(|y| - 3)_{\max}^2 = 9; (|y| - 3)_{\min}^2 = 0, \text{ тогда } 1 \leq a \leq 10.$$

Тогда система имеет ровно два решения, когда

$(1 \leq a \leq 10)$ - выполняется 3-е и 4-е, + $(10 \leq 25)$ - выполняется

1-е и 2-е. В точке $a = 10$, уравнение имеет 4 решения:

$$\{(6; 3) (6; -3) (0; 3) (0; -3)\}; \text{ для остальных } a \text{ система имеет}$$

Ответ: $a \in [1; 10) \cup (10; 25]$

Задача №7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}; \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x; \end{cases} \text{ } y \text{ принимает значения } [70 + (2^{64} - 1)x, (2^x + 3 \cdot 2^{65})];$$

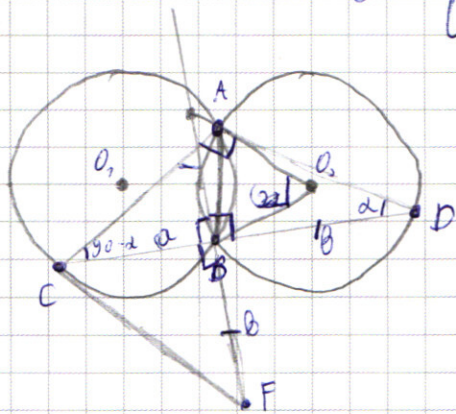
Тогда для любого $x \in \mathbb{Z}$ при котором $a = 70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} > 0$, найдётся ΔS^y , которые удовлетворяют неравенству.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(7, продолжение) $d = 70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 6 \cdot 2^{64} > 0$. d впервые
обращается в нуль при $x = 6$. Пусть $x = 6 + x_0, x_0 \in \mathbb{Z}$,
 $d = 70 + (2^{64} - 1)(6 + x_0) - 2^{6+x_0} - 6 \cdot 2^{64} > 0$
 $d = 64 + 6 \cdot 2^{64} + (2^{64} - 1)x_0 - 2^{6+x_0} - 6 \cdot 2^{64}$
 $d = 2^6(1 - 2^{x_0}) + (2^{64} - 1)x_0$
 $d = (2^{64} - 1)x_0 - 2^6(2^{x_0} - 1)$
 d во второй раз обращается в нуль при $x = 70$ ($x_0 = 64$).
 Подсчитаем число целых пар решений:
 $N = \sum_{x_0=1}^{x_0=63} (2^{64} - 1)x_0 - 2^6(2^{x_0} - 1) = \sum_{x_0=1}^{x_0=63} (2^{64} - 1)x_0 - 2^6(2^{x_0} - 1)$, $\mathbb{N}, \mathbb{K}$,
 $d(64) = d(64) = 0$
 $N = (2^{64} - 1) \sum_{x_0=1}^{x_0=63} x_0 - 2^6 \sum_{x_0=1}^{x_0=63} 2^{x_0} + 2^6 \cdot 63$
 $\sum_{x_0=1}^{x_0=63} x_0 = \frac{63(63+1)}{2} = 2^5 \cdot 63$
 $\sum_{x_0=1}^{x_0=63} 2^{x_0}$ — сумма геометрической прогрессии, $\sum_{x_0=1}^{x_0=63} 2^{x_0} = (2^{64} - 1) \cdot 2 =$
 $= 2^{65} - 2$
 $N = (2^{64} - 1) \cdot \frac{63 \cdot 64}{2} - 64 \cdot (2^{64} - 2) + 64 \cdot 63$
 $N = 2^{64} \left(\frac{63 \cdot 64}{2} - 64 \right) - \frac{63 \cdot 64}{2} + 64 \cdot 2 + 63 \cdot 64$
 $N = 2^{64} \cdot 61 \cdot 32 + 63 \cdot 32 + 32 \cdot 4$
 $N = 2^{69} \cdot 61 + 2^5 \cdot 67$
 Ответ: Всего есть $N = 2^{69} \cdot 61 + 2^5 \cdot 67$ пар элементов.

Задание №6

а)

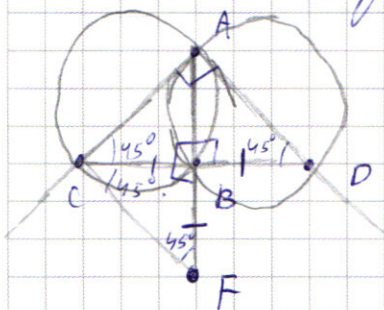


O_1, O_2 - центры первой и второй окружностей соответственно.

ABD - треугольник вписанный в O_2 . ABC - треугольник вписанный в O_1 . Записывая выражения для AB и приравняв

его для обеих окружностей получим $R \sin \alpha = R \sin(90-2\alpha)$, R - радиус окружности, $\Rightarrow \alpha = 45^\circ$, $\angle ABC = \angle ACP = 45^\circ$

В таком случае прямая AB - перпендикуляр к прямой CD , пересечем рисунок в соответствии с новыми данными:



П.к., $\angle ABD = 90^\circ$, то AD диаметр на $O_2 \Rightarrow AD = 10$, П.к., $BD = BF = CB$, то $\angle BCF = \angle BFC = 45^\circ$.

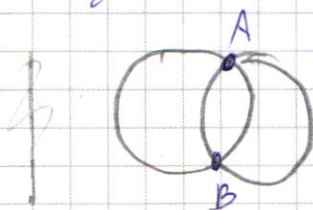
Потому $\angle CBF$ равен $\angle BAD \Rightarrow CF = AD = 2R$,

$$CF = 2R = 10$$

б) Пусть известно $BC = 6$

$$AB = 2R \sin \alpha = R\sqrt{2}$$

$$AB = 5\sqrt{2}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos \alpha - \sin \beta, \quad \varphi_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos(\phi_1 + \phi_2) - \sin(\phi_1 - \phi_2) &= \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2 - \sin \phi_1 \cos \phi_2 + \cos \phi_1 \sin \phi_2 = \\ &= \cos \phi_2 (\cos \phi_1 - \sin \phi_1) + \sin \phi_2 (\sin \phi_1 + \cos \phi_1) = (\cos \phi_1 - \sin \phi_1)(\cos \phi_2 + \sin \phi_2) \end{aligned}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta : f_1 = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad f_2 = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos(\phi_1 + \phi_2) - \cos(\phi_1 - \phi_2) &= \cos\phi_1 \cos\phi_2 - \sin\phi_1 \sin\phi_2 - \cos\phi_1 \cos\phi_2 - \sin\phi_1 \sin\phi_2 = \\ &= -2 \sin\phi_1 \sin\phi_2 \end{aligned}$$

$$\sin(\phi_1 + \phi_2) - \sin(\phi_1 - \phi_2) = \sin\phi_1 \cos\phi_2 + \cos\phi_1 \sin\phi_2 - \sin\phi_1 \cos\phi_2 + \cos\phi_1 \sin\phi_2 = 2\cos\phi_1 \sin\phi_2$$

$$\sqrt{2} \cos(7x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$-2\cos 7x \sin 4x$$

$$\cos 7x + \sin 7x = \sqrt{2} \left(\cos 7x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 7x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \cos 7x \sin 4x = \sqrt{2} \cos 14x, \quad 7x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{5} + \pi k$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos 7X + \sin 7X = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7X + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7X \right) = \sqrt{2} \cos \left(7X - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$-2 \sin 4x \cos (7x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 74x$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x \quad \cos \alpha - \sin \beta = \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) - \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 14x, \quad \pi$$

$$-2 \sin(7x + \frac{\pi}{9}) \cos 4x = \cos 11x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1; \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \cos(74x - \frac{\pi}{2})$$

$$\cos^2 7x - \sin^2 7x = (\cos 7x - \sin 7x) / (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x = \cos 7x - \sin 7x \quad - \sin 4x =$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x}, \quad (x > 0, y > 0), \quad \frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x}, \quad x^{\lg x} = y^{5 \lg x - 2 \lg x y}$$

$$x^{2-2xy-4x-3y^2+12y} = 0, \quad x^{\lg x} = y^{3 \lg x - 2 \lg y}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0,$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x} \cdot x^{\lg x} = y^{5 \lg x - 2 \lg x}$$

$$x^{\lg x} = y^{5 \lg x - 2 \lg x - 2 \lg y}$$

$$x = y^{3 - 2 \frac{\lg y}{\lg x}}$$

$$y^{6 - 4 \frac{\lg y}{\lg x}} - 2 y^{4 - 2 \frac{\lg y}{\lg x}} - 4 y^{3 - 2 \frac{\lg y}{\lg x}} - 3 y^{2 + 12 y} = 0$$

$$\lg x = \frac{\lg y \lg x}{\lg y \lg x} \cdot \frac{1}{\lg y \lg x} = \frac{1}{\lg y \lg x}$$

$$y^{5 \lg x} = (y^{5 \lg y \lg x})^{\frac{1}{\lg y \lg x}} = y^{5 \lg y}$$

$$x^{\lg x} = y^{3 \lg x - 2 \lg y}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x} = y^{2 \lg y}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg y}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0; x(x-4) - 3y(y-4) - 2xy = 0$$

$$x(x+y-4) - 3y(x+y-4) = 0; \text{ либо } x$$

$$x = y^{3 - 2 \frac{\lg y}{\lg x}}; 4-y = y^{3 - 2 \frac{\lg y}{\lg x}}$$

$$4-y = y^{3 - 2 \frac{\lg y}{\lg x}}; (4-x)^{5 \lg x} = x^{\lg x} (4-x)^{2 \lg x (4-x)}$$

$$(4-x)^{3 \lg x - 2 \lg(4-x)} = x^{\lg x}$$

$$\lg(4-y) = (3 - 2 \frac{\lg y}{\lg x}) \lg y$$

$$(4-y)^{\lg(4-y)} = y^{3 \lg y - 2 \lg(4-y)}$$

$$x^{\lg x} = y^{3 \lg x - 2 \lg y}; x^{\lg x} = (4-x)^{3 \lg x - 2 \lg(4-x)}$$

$$\lg^2 x = 3 \lg x \lg(4-x) - 2 \lg^2(4-x)$$

$$\lg^2 x - \lg x \lg(4-x) = 2(\lg x \lg(4-x) - \lg^2(4-x))$$

$$\lg x \lg \frac{x}{4-x} = 2 \lg(4-x) \lg \frac{x}{4-x}$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6; (x-4)^2 + (y-3)^2 = a$$

$$x^2 - 8|x| + 16 + y^2 - 6|y| + 9 = a$$

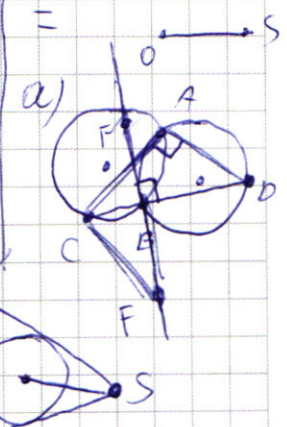
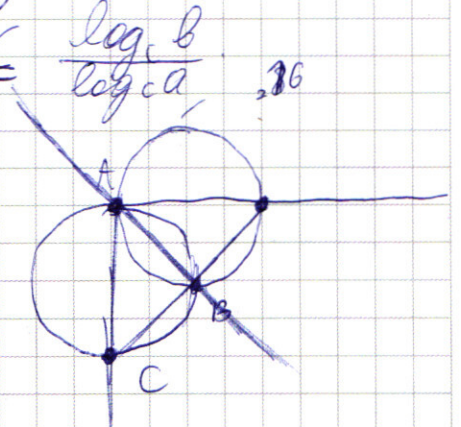
$$y-3-x + y-3+x = 6; y=6; y=-6$$

$$y-3-x - y+3-x = 6; x=-3; x=+3$$

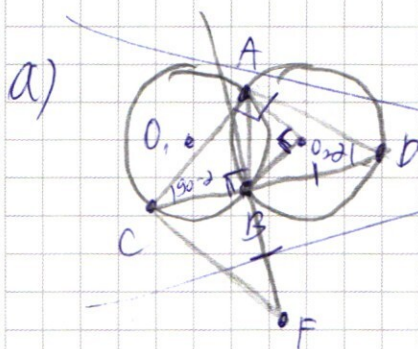
$$y-3 < x(-); y-3 > x(+)$$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}; 70 + 2^{64}x - x > 2 + 6 \cdot 2^{64}$$

$$y \leq 70 + (2-1)x; 2(x-6) - 2^x - x + 70 > 0$$

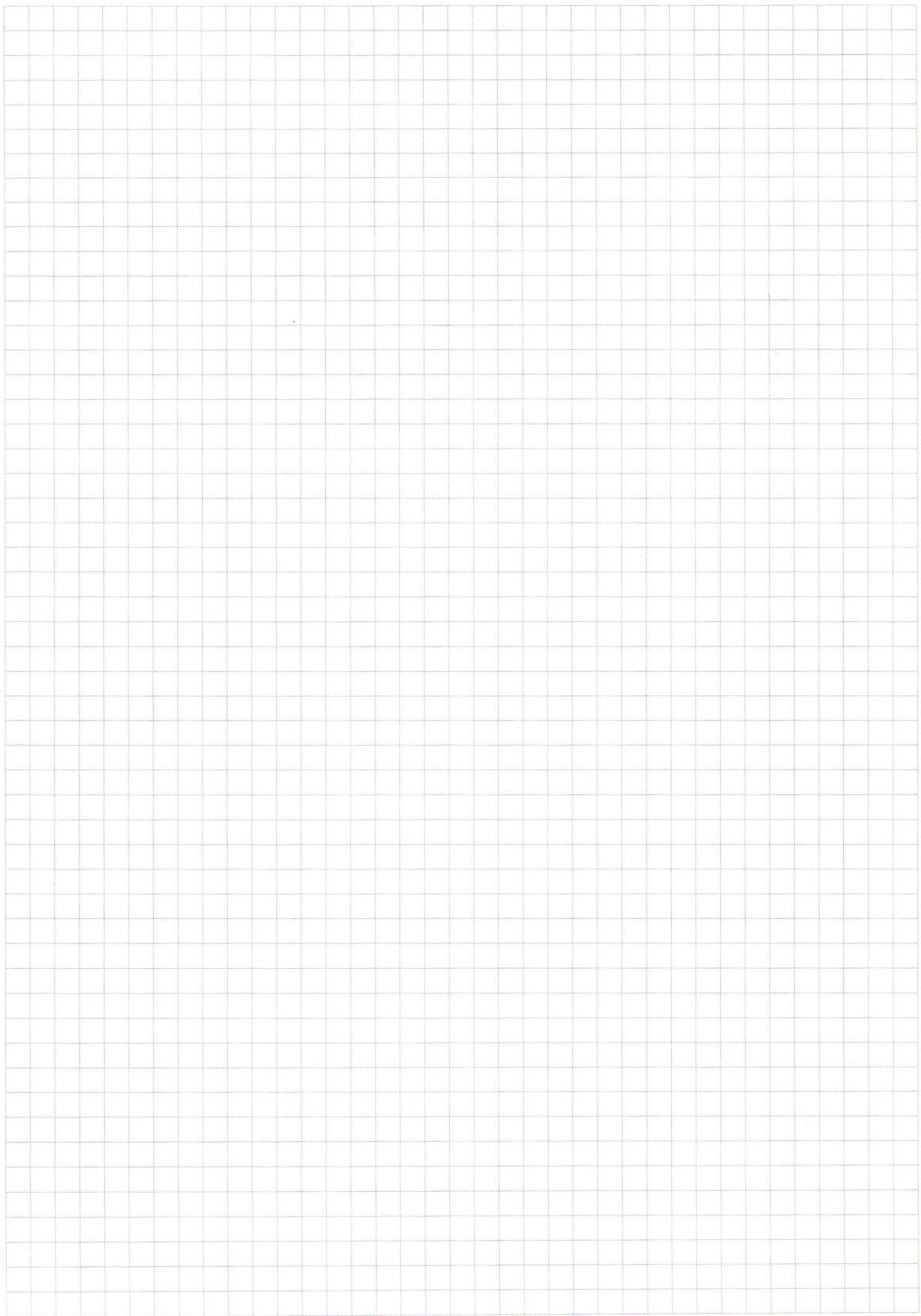


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Задача №6

П.к. ABD вписанный треугольник
то $AB = 2R \sin \alpha$, с другой
стороны (ABC) $AB = 2R \sin (90 - \alpha) \Rightarrow$
 $\alpha = 45^\circ$ ~~$AB = 2R$~~ $AB = 5\sqrt{2}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)