

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

11 $3375 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow 7$ цифр.

Возможны два набора чисел из данных для составл.
8-и значных чисел:

① $\{3; 3; 5; 5; 3; 3; 3; 1\}$

Всего вариантов таких чисел:

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 56 \cdot 30 = 1680$$

② $\{3; 3; 5; 5; 9; 3; 1; 1\}$

Всего вариантов таких чисел:

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 80 \cdot 56 = 5040$$

$\Rightarrow$ Всего возможно составить чисел:

$$1680 + 5040 = 6720$$

Ответ: 6720.

18 $\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x}$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

Рассмотрим первое уравнение:

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg x}$$

т.к. $y > 0$, $x > 0$, получим:

$$y^{3 \lg x} = y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x}$$

Прологарифмируем по осн. 10:

$$3 \lg x \cdot \lg y = 2 \lg y \cdot \lg y + \lg x \cdot \lg x$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg x \lg y + \lg^2 x = 0$$

Пусть $\lg y = a$, $\lg x = b$:

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$(2a - b)(a - b) = 0$$

Решаем к записи:

ОДЗ:
 $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$\lg x = 2 \lg y \quad (\text{или}) \quad \lg y = \lg x$$

$x = y^2$ на ОДЗ | $y = x$ на ОДЗ

~~Вернемся к системе~~

① $\begin{cases} x = y^2 \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0$$

$$y(12) = \{ \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 12 \}$$

$$y = 3 \quad (\text{подбором}), \text{ тогда } x = 9$$

$$(y-3)(y^2 - y - 4) = 0$$

$$\boxed{y=3}$$

$$\boxed{x=9}$$

или

$$y^2 - y - 4 = 0$$

$$D = 17$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

по ОДЗ не подходит

$$-\frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \quad x = \frac{1-2\sqrt{17}+17}{4} = \frac{16-2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}}$$

$$(2) \begin{cases} x=y \end{cases}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^2 - 2y^2 - 4y - 3y^2 + 12y = 0$$

$$-4y^2 + 8y = 0$$

$$y=0$$

не по ОДЗ

$$\boxed{y=2}$$

$$\boxed{x=2}$$

Ответ: $(2; 2); (9; 3); \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

$$\boxed{15} \begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ ((x)-4)^2 + ((y)-3)^2 = a \end{cases}$$

① Изобразим график функции

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$\text{если } \begin{cases} y-3-x > 0 \\ y-3+x > 0 \end{cases}$$

$$y-3-x+y-3+x=6$$

$$y=6$$

$$\text{если } \begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x < 0 \end{cases}$$

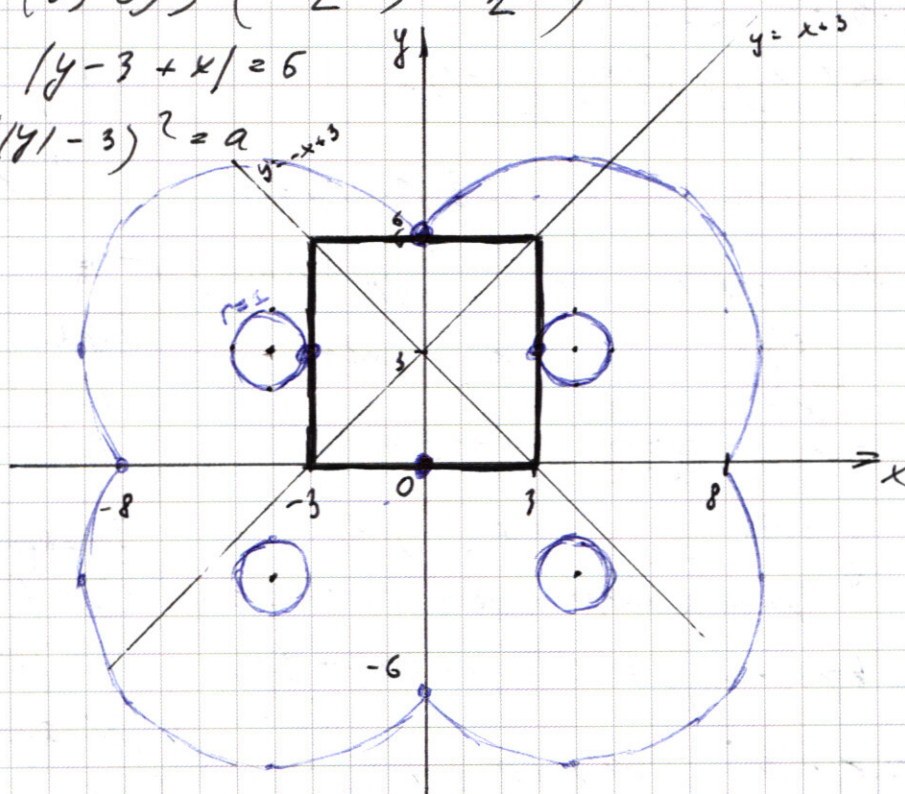
$$y=0$$

$$\text{если } \begin{cases} y-3-x > 0 \\ y-3+x < 0 \end{cases}$$

$$x=-3$$

$$\text{если } \begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x > 0 \end{cases}$$

$$x=3$$



② График функции $((x)-4)^2 + ((y)-3)^2 = a$ представляет из себя 4 окружности радиуса a , ограниченные четвертями с центрами $(4; 3), (4; -3), (-4; 3)$ и $(-4; -3)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

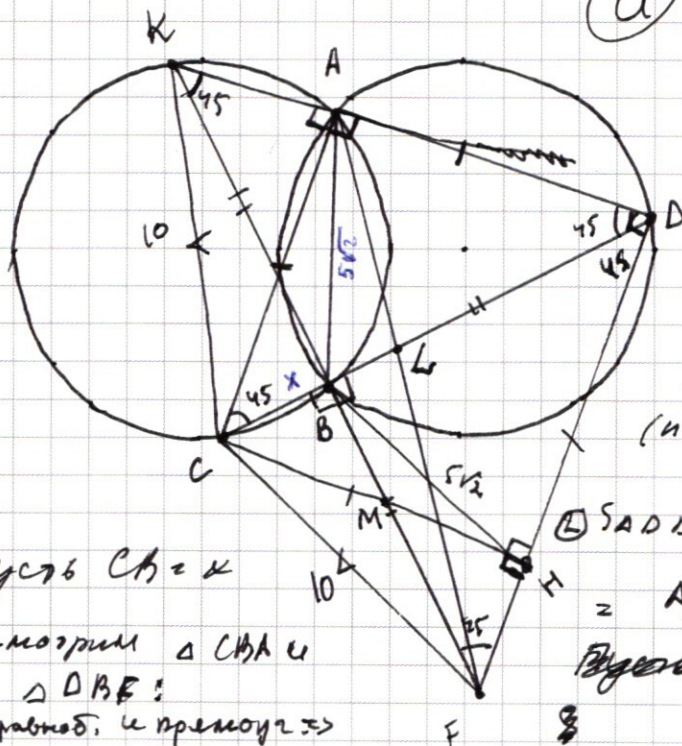
③ Графики данных функций пересекаются
ровно 2 раза только при: $\sqrt{2}$

$$r_{\text{okp.}} = 1 \Rightarrow a = 1$$

Рокр. = 5 $\Rightarrow$ $a = 25$

Order: 1, 25,

WG



а) Температуру:

② пересекающиеся окружности.
образуют попарно равные
углы $\angle$

$\rightarrow \angle ACB = \angle ADB$, т.к. опир.
на разн. малые дуги AB .

7. k. $\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$

$$\Rightarrow AB = 5 \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

(по расшир. теореме синусов
в ΔBO)

$$\textcircled{E} S_{ADB} = \frac{AD \cdot DB \cdot AB}{2R} = \frac{AD \cdot DB \cdot \sqrt{2}}{2}$$

Pigeon Creek

③ Пусть $CH = x$

Рассмотрим $\triangle CBA$ и $\triangle DBE$:

Они равны, и прямоугольн $\Rightarrow$
2) по 2-ому 2)

$$2) \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{FD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{x+BD}{FD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD \cdot FD = (x + BD) \cdot AD \quad \left. \begin{array}{l} \text{same?} \\ \Rightarrow \end{array} \right\}$$

$$(DB + x) - DB = AD \cdot \angle D \Rightarrow$$

$$2) \quad KD = DF$$

④ т.к. $\angle KDC = 45^\circ$; $\angle BDF = 45^\circ \Rightarrow$

$\rightarrow \angle KDF = 90^\circ \Rightarrow KFD$ - прямоугольный.
по теореме Пифагора.

DB - это база данных.

$$\Rightarrow KB = BF = BD$$

⑤ $\Delta KDC = \Delta FDC$ (по двум сторонам и углу) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow K_L = \frac{CF}{2R} = 10 \Rightarrow x^2 + 80x = 100$$

Order: 10.

8) $BC = 6$; т.к. $BC^2 + BD^2 = 100 \Rightarrow BD = 8 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2AC^2 = 14^2 = \sqrt{2} AC \cdot 14 \Rightarrow AC = \frac{14\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$

~~т.к. $AC = 6$~~ , а $\triangle ABD = \triangle DBH$ (по двум сторонам и углу)
 $\Rightarrow AB = BH = 5\sqrt{2}$

$\triangle CBM \sim \triangle FHM$ (по трём углам) $\Rightarrow \frac{BM}{MH} = \frac{CM}{MF} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CM}{BM} = \frac{BM}{MF} \Rightarrow \triangle BMH \sim \triangle CMF \Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{BM}{CM} \Rightarrow$

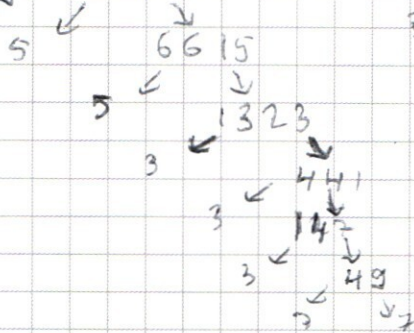
$\Rightarrow BM = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot CM = \frac{CM}{\sqrt{2}}$

по т. Пифагора в $\triangle CBM$:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \quad 7 \text{ цифр.}$$



$$\begin{aligned} & \cancel{5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7} \cdot 1 \cdot 7 \text{ цифр.} \\ & \boxed{5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7} \cdot 1 \cdot 6 \text{ цифр.} \\ & 2 \text{ мадора.} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 2} = 56 \cdot 30$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3}{1 \cdot 1 \cdot 1} = 90 \cdot 56$$

$$90 \cdot 56 + 56 \cdot 30 = 56 \cdot 120 = \boxed{6720}$$

Ответ: **6720**

№2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos 14x - \sin 11x + \sin 3x - \cos 3x$$

$$\sin 3x - \sin 11x + \cos 11x - \cos 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

№3

$$\left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg x y} \cdot x^{\lg x}$$

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg x y + \lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x}$$

т.к. $y > 0$ и $x > 0$ можно сократить на $y^{2 \lg x}$

$$\lg(y^{3 \lg x}) = \lg(y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x})$$

$$3 \lg x \cdot \lg y = 2 \lg y \cdot \lg y + \lg x \cdot \lg x$$

ОДЗ:

$$x > 0$$

$$xy > 0$$

$$y > 0$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg x \lg y + \lg^2 x = 0$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - (2y+4)x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\Delta = 4y^2 + 16y + 16 - 12y^2 + 48y = -8y^2 + 64y + 16$$

$$= -8(y^2 - 8y - 2)$$

$$3x^2 - 2xy - 3y(y-4)$$

$$\left(\frac{y^3}{x}\right) \lg x = y^2 \lg y$$

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$2a^2 - 2ab - 1ab + b^2 = 0$$

$$2a(a-b) + b(b-a) = 0$$

$$(2a-b)(a-b) = 0$$

$$2a=b \quad \text{или} \quad a=b$$

$$\lg y = \lg x = 2 \lg y \quad \text{или} \quad \lg y = \lg x$$

$$\lg x = 2 \lg y^2$$

$$y=x \quad \text{на ОДЗ;}$$

$$x=y^2 \quad \text{на ОДЗ;}$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0$$

$y \neq 0$
не подходит
по ОДЗ;

$$(или) \quad y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

8 22 - 18 - 21 + 12 = 0

$$22 - 18 - 21 + 12 = 0$$

$$(y-3)$$

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

1	-2	-7	+12
3	1	1	-4
			0

$$(y-3)(y^2+y-4) = 0$$

$$y=3 \quad \text{или}$$

$$y^2+y-4=0$$

$$\Delta = 1+16 = 17$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

подходит только

$$\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \quad \text{по ОДЗ;}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$CF^2 = x^2 + a^2$$

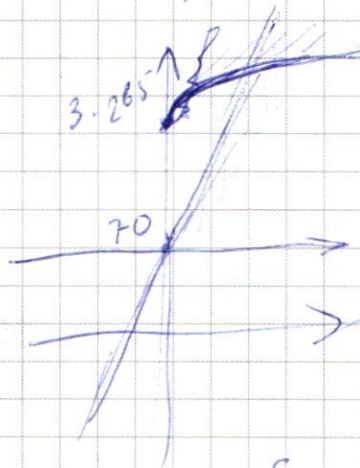
$$(m+y)^2 = 2x^2$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{(m+y)(x+y)}{2}$$

17

(x, y)

$$\begin{cases} y > 2x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$



$$x \cdot (x+y) = y(y+m)$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x \cdot m + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x \cdot y$$

$$x^2 = x\sqrt{2}(m+y)$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(m+y)$$

$$2^x / (1 + 3 \cdot 2^{65-x})$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{x \cdot x \cdot (m+y)}{2}$$

$$BL = y - \frac{(m+y)}{2} = \frac{2y - m - y}{2} = \frac{y - m}{2}$$

$$\frac{m+y}{x+y} = \frac{x}{y}$$

$$S = \frac{x \cdot y \cdot \sqrt{2}}{10}$$

$$BL = y - \frac{x\sqrt{2}}{2} \quad AL = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

$$50 = BL^2 + AL^2$$

$$50 = y^2 - xy\sqrt{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}$$

$$y^2 - xy\sqrt{2} + x^2 = 50$$

$$x_{1/2} = \frac{-y\sqrt{2} \pm \sqrt{200 - 2y^2}}{2}$$

$$x^2 - xy\sqrt{2} + y^2 = 50 = 0$$

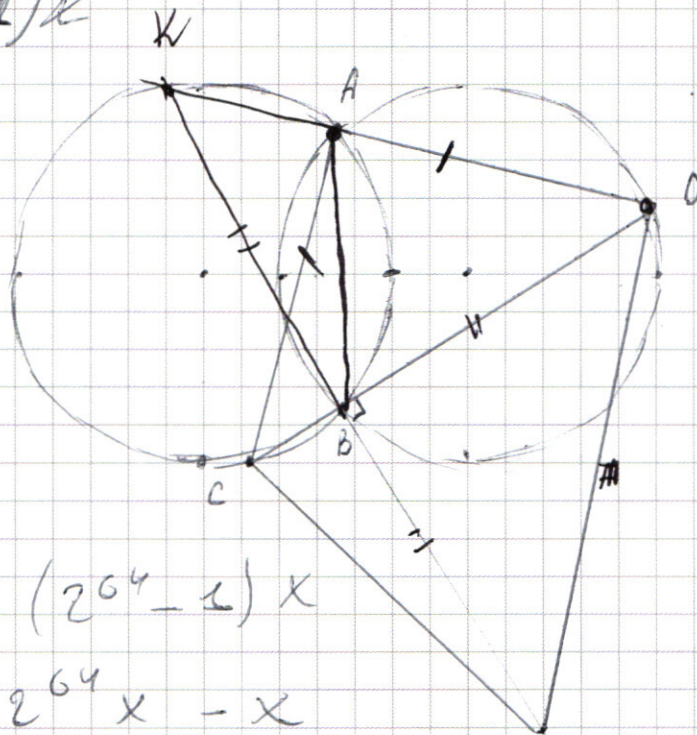
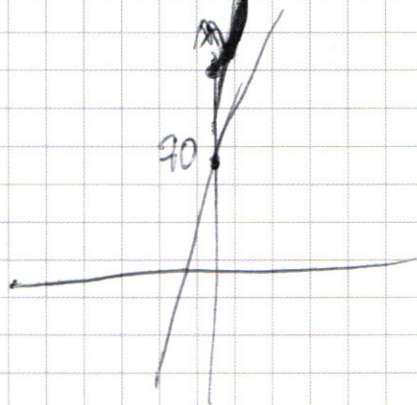
$$\Delta = 2y^2 - 4y^2 + 200 = 200 - 2y^2 = 2(100 - y^2)$$

$$[12] \quad \cos 11x - \cos 3x = 2 \cdot \cos 7x \cdot \cos 4x$$

$$\sin 3x - \sin 11x = 2 \sin 7x \cdot \sin 4x$$

$$y > 2^k + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$



$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 2^{64}x - x$$

$$2^{64}(6 - x) + 2^x + x - 70 = 0$$

$$2^{64} \cdot -64 + 2^{70}$$

$$-2^{70} + 2^{70} + 70 - 70 = 0$$

$$x = 70 \text{ (по порядку)}$$

$$y = S_{CKA} = \frac{KA \cdot KB \cdot AD}{KB} = \frac{KA \cdot AD \cdot \sqrt{100^2 - AD^2}}{100}$$

$$= KA \cdot AD$$

$$AD^2 + AK^2 = 100$$

$$\frac{BD + x}{BD \cdot 2} = \frac{AD}{AD + y}$$

$$(BA + x)(AD + y) = AD \cdot BD \cdot 2$$

$$BA \cdot DA + xAD + yBA = AD \cdot BD \cdot 2$$

$$xAD + yBA = AD \cdot BD$$

$$x^2 = 100^2 - AD^2$$

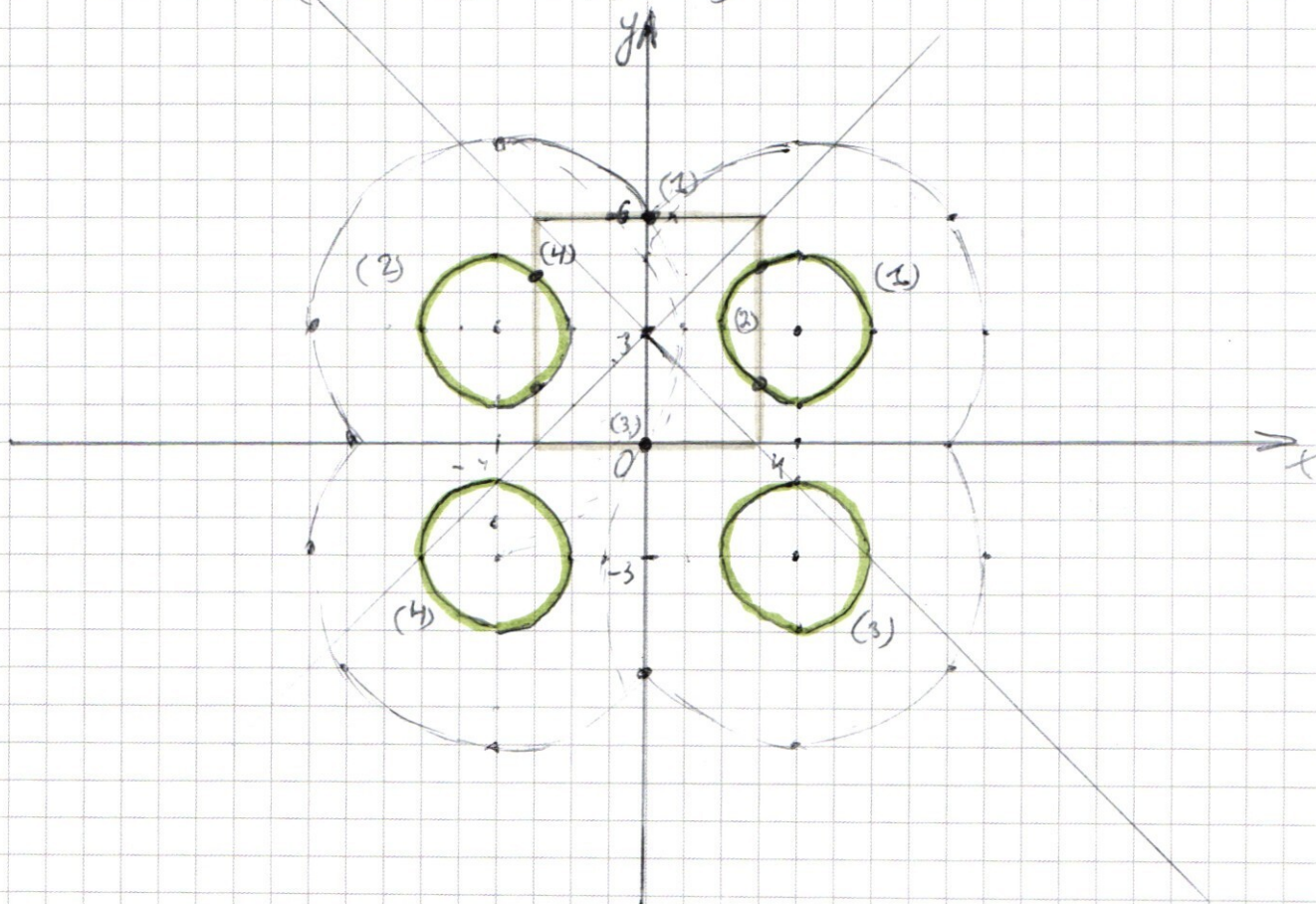
$$BD^2 = 100^2 - x^2$$

$$2BD^2 = FD^2 = 2(100^2 - x^2)$$

$$AD = \frac{5\sqrt{2}}{10}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Решить~~ 15
$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| \geq 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9 \end{cases}$$
 Ровно 2
решения



① При $\begin{cases} y-3-x > 0 \\ y-3+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > x+3 \\ y > -x+3 \end{cases}$

$$y-3-x+y-3+x=6$$

$$2y=12$$

$$\boxed{y=6}$$

② При $\begin{cases} y < x+3 \\ y < -x+3 \end{cases}$

$$-y+3+x-y+3-x=6$$

$$-2y=0 \quad y=0$$

③ При $\begin{cases} y > x+3 \\ y < -x+3 \end{cases}$

$$y-3-x-y+3-x=6$$

$$-2x=6$$

$$\boxed{x=-3}$$

④ При $\begin{cases} y < x+3 \\ y > -x+3 \end{cases}$

$$-y+3+x+y-3+x=6$$

$$2x=6$$

$$\boxed{x=3}$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$$

$\Rightarrow$ Окружности (1) и (2) имеют 2 точки

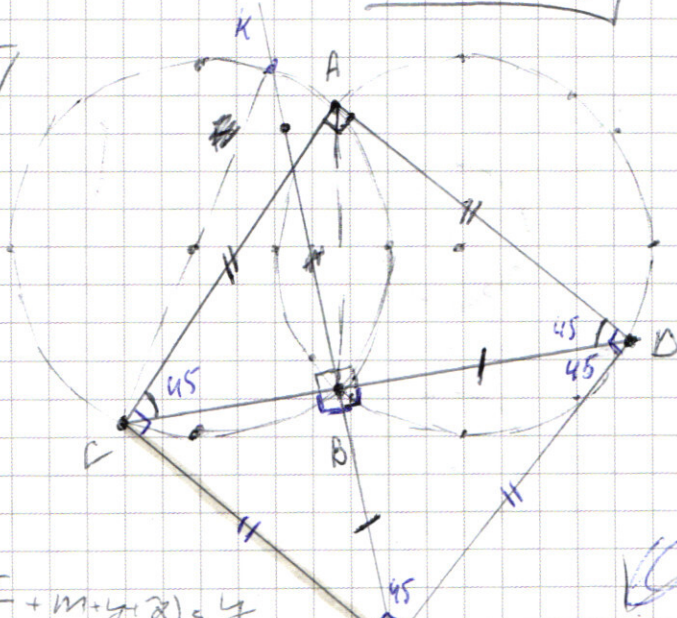
Данной график (2) имеет равно 2 точки совпадают с графиком (1) только при: ~~еще~~

~~еще~~ $r_{\text{окр.}} = 1 \Rightarrow a = 1$

~~еще~~ $r_{\text{окр.}} = 5 \Rightarrow a = 25$

$\Rightarrow$ Ответ: $[1; 25]$

№ 6



$$R = 5$$

$$FC^2 = FB \cdot FK$$

$$CK = 10$$

$$\sin \angle KCB =$$

$$S_{\triangle CAB} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot x \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} m \cdot x$$

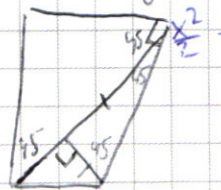
$$\frac{KB}{KB} = 10 = \frac{x^2 - \sqrt{2}xy}{2}$$

$$\sin \angle KCB = \frac{\sqrt{2} \cdot m \cdot x}{2} = \frac{x^2 - \sqrt{2}xy}{2}$$

Answers (10)

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + m + y + x \right) = y$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + m + y + x = \sqrt{2}y$$

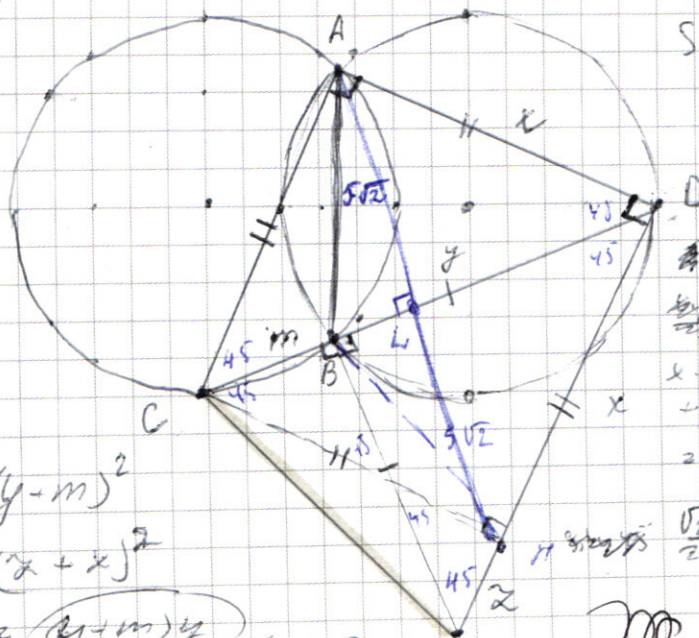


$$\frac{x \cdot y}{\sqrt{2}} = \frac{x^2 - \sqrt{2}xy}{2} = S_{\triangle CAB}$$

$$S = \frac{x \cdot y \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{x \cdot y}{\sqrt{2}}$$

$$S = \frac{abc}{2R}$$

$$S = \frac{abc}{10}$$



$$x \cdot m \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 45^\circ + y \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 45^\circ = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} x(m+y) = \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 &= y^2 \\ 2y^2 &= (x+2)^2 \\ y^2 &= \frac{(x+2)^2}{2} \\ 4x^2 &= (x+2)^2 \\ 2x &= x+2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 &= (y-m)^2 \\ 2y^2 &= (x+x)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (m+y) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 + m + y \right) = \frac{x^2}{2} = S_{\triangle CAB}$$