

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа. ✓
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$. ✓
3. [5 баллов] Решите систему уравнений ✓

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4. ✓
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{2}{5} \cos x \pm \sin x - x \pm 5 \cos \frac{2}{5} \pm 15 \right) 2j =$$

$$\Rightarrow \left(x \pm \frac{2}{5} \right) 15 2j = x \pm 15 - x \pm 5 \cos$$

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6 \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 0 \end{cases}$$

$$1) \quad y - x - 3 \leq 0 \quad y - 3 + x \leq 0$$

$$-y + 3 + x + -y + 3 - x = 6$$

$$\Rightarrow y = 0$$

$$x \geq -3 \quad x \leq 3$$

$$y = 0 \quad x \in [-3; 3]$$

$$\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 45$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 22 \\ \hline 875 \\ 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$84 - 20 = 1680$$

$$\begin{aligned} &(|x| - 4)^2 + 9 = 0 \\ &x^2 + 25 - 2|x| = 0 \end{aligned}$$

$$x = 3y + 4$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\frac{\lg x}{\lg y}} = y^{2 \lg x y \frac{\lg x}{\lg y}}$$

$$\frac{y^5}{x} = y^{2 \lg x y \lg x}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg_y x} = y^{\frac{2 \lg x y}{\lg y}} = \frac{1}{x} = y^{2 \lg^2 x + 2 \lg x \lg y - 5}$$

$$= y^{2 \lg x y} \frac{1}{x} = y^{2(\lg^2 x + 2 \lg x \lg y + \lg^2 y) - 2 \lg^2 y - 5}$$

$$\frac{x^5}{x^{\lg \frac{x}{y}}} = y^{2 + 2 \lg y x} \frac{1}{x} = y^{2(\lg x + \lg y)^2 - 2 \lg^2 y - 5}$$

$$\frac{x^5}{y^2} = x^2$$

$$\frac{x^5}{x^{\lg y}} = y^2 \cdot x^2 y^{5 - 2 \lg x y / \lg x} = x$$

$$x^{3 - \lg y^x} = y^2$$

$$x = y^{\lg y^x}$$

$$\left(\frac{y^5}{x^{\lg_y x}}\right)^{\lg x} = \frac{2 \lg x y \lg_{10} y}{x}$$

$$y^{(5 - \lg_y x) \lg x} = x y^{\lg x y}$$

$$\lg x = \lg y^{\lg_y x}$$

$$\lg_y x \lg_{10} y$$

$$\begin{aligned} 5 - \frac{2 \lg x + 2 \lg y}{\lg x} &= 5 - 2 + 2 \lg x y = \\ &= 3 + \lg_x y^2 = \\ &= \lg_x x^3 y^2 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓ 1) $3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ \underline{30} \\ 37 \overline{) 5} \\ \underline{35} \\ 25 \overline{) 5} \\ \underline{25} \\ 0 \overline{) 5} \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11555333 \\ \underline{11155533} \\ 44333525 \\ \underline{44333525} \\ 0 \end{array}$$

$C_8^2 \cdot C_3^3 + 8 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3$

✓ 2) $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

$$\cos 11x - \sin 11x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 11x - \sin 11x \cos \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \cos 14x$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} =$$

$$= 2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) =$$

$$= 2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) =$$

$$\sin \alpha + \sin \beta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$y^5 \lg x = y^2 \lg xy + \lg x = y^2 \lg x^3 y^2$$

$$y \lg x^5 = y^2 \lg x^3 y^2$$

$$\underline{y = 1}$$

$$\lg x^5 = \lg x^3 y^2$$

$$x^5 = x^3 y^2$$

$$x^2 = y^2$$

$$\underline{x = y}$$

$$x^2 - 2x - 4x - 3 + 12 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2$$

$$x = 3$$

$$\boxed{x = 3 \quad y = 1}$$

$$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$$

$$-4x^2 + 8x = 0$$

$$x(8 - 4x) = 0$$

$$x = 0 \quad x = 2$$

$$\boxed{x = y = 2}$$

$$\begin{aligned} \cos 7x \sin 7x &= \sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} + 7x \right) \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 7x + \sin 7x \cos \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \sin(-4x) \cos\left(\frac{\pi}{2} - 14x\right) = 2 \cos 7x \sin 7x$$

$$2 \sin(-4x) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$$

$$\sin 3x + \sin(-11x) = 2 \sin(-4x) \cos(7x)$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) &= \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= 2 \sin(-4x) \cos\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) \end{aligned}$$

$$2 \sin(4x) (\cos(7x) + \sin(7x)) = 2 \cos 7x \sin 7x$$

$$\sin(-4x) \cos\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) = \cos 7x \sin 7x$$

$$y^{5 \lg x - 2 \lg x y} = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg x^5 - \lg x y^2} = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg \frac{x^5}{y^2}} = x^{\lg x}$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x + 2 \lg y}$$

$$\begin{aligned} y^{3 \lg x + 2 \lg y} &= x^{\lg x} \\ y^{3 \lg} \end{aligned}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 + x(-2y-4) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\begin{aligned} (4+2y)^2 - 4(12y-3y^2) &= \\ = 16 + 4y^2 + 16y - 48y + 12y^2 &= \\ = 16y^2 - 32y + 16 = (4y-4)^2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{2y+4 \pm (4y-4)}{2}$$

$$x_1 = \frac{2y+4 + 4y-4}{2} =$$

$$= 3y+4$$

$$x = 3y+4$$

$$x_2 = \frac{2y+4 - 4y+4}{2} =$$

$$= -y \quad X$$

$$\left(\frac{y^5}{3y+4} \right)^{\lg x} = y^2 \lg(3y+4) y$$

$$y \lg \frac{(3y+4)^3}{y^2} = (3y+4) \lg(3y+4) = \frac{(3y+4)}{y^2} \lg y$$

$$\left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} \cdot x^2 \lg x y = (xy)^2 \lg xy$$

$$y^3 \lg x \cdot x \lg xy^2 = xy$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{y^{\lg x}}{x^{\lg x}}$$

$$= y^{2 \lg xy}$$

$$\lg x = \lg y \cdot \lg y$$

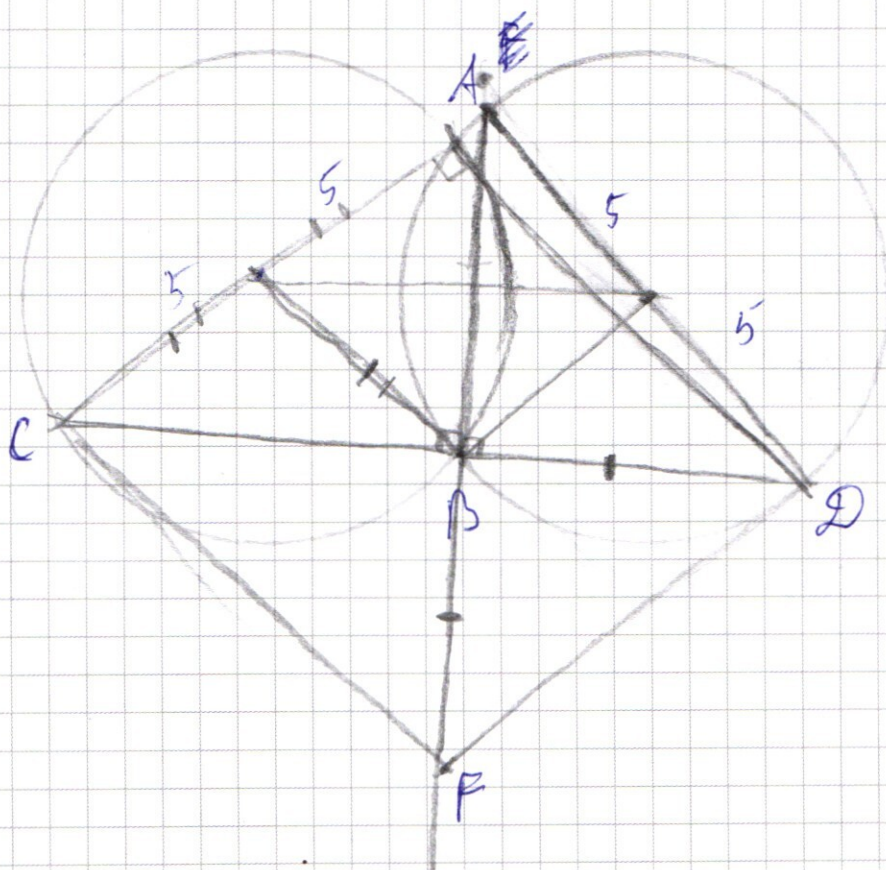
$$y^{2 \lg xy}$$

$$y^{2 \lg x}$$

$$\cdot y^{2 \lg y}$$

$$= x^2 y^{2 \lg y}$$

$$x^2 \cdot y^{2 \lg y}$$





SP

$$SPD \sim SLQ$$

$$\frac{SP}{4x} = \frac{x}{LQ} = \frac{SL}{3x} = \frac{PO}{SQ}$$

$$\frac{SP}{SQ} = \frac{3x}{4x}$$

$$\frac{SP}{SL} = \frac{SQ}{SQ}$$

$$\frac{SP}{4x} = \frac{3x}{SQ}$$

$$4x : SP = 3x : SQ$$

$$SLQ \sim SPD$$

$$\frac{SL}{SP} = \frac{LQ}{PO} = \frac{SQ}{SO}$$

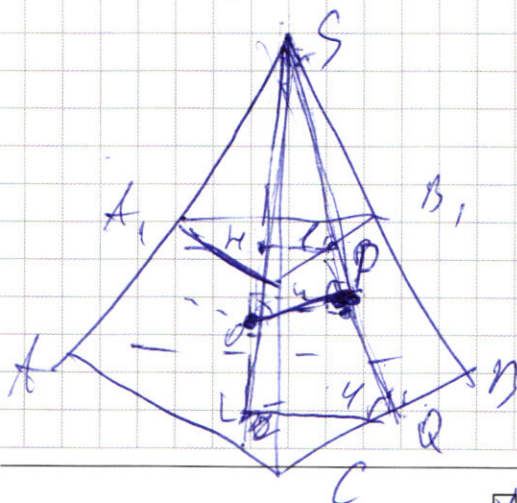
$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 4x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = 2 \sin(4x) \cos\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right)$$

$$\sin(3x) + \sin(-11x) = 2 \sin(4x) \cos 7x$$

$$2 \sin(4x) (\cos 7x + \sin 7x) = \sqrt{2} \cos^2 7x - \sin^2 7x -$$

$$- \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$



$$\frac{SL}{SO} = \frac{SP}{SC}$$

$$SL : SP = SO : SQ = LC : OP$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Разложим число 3375 на множители:

$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Тогда в искомым
числе встречается не менее двух единиц
(т.к. число 8-значное а среди его ~~чисел~~
цифр встречается не более ~~большее~~ отличных от

1) Рассмотрим случаи:

1.) Пусть в искомым числе содержится
две 1 тогда? оно содержит цифры

1, 1, 5, 5, 5, 3, 3, 3 (т.к. произведение равно 3375)
и всего таких таких чисел: $C_8^2 \cdot C_6^3$

2.) Сколько чисел содержат три единицы
тогда они содержат цифры 1, 1, 1, 5, 5, 5, 3, 3
и таких чисел $8 \cdot 7 \cdot C_6^3$

3.) Более трех единиц содержать не
может иначе ~~произведение цифр~~ ~~число~~ не может
быть равно 3375 (даже содержится
минимум 3 пятёрки, 3 и 9)

Тогда всего искомым чисел: $C_6^3 (C_8^2 + 56) =$
 $= 20 (28 + 56) = 1680$

Ответ: 1680

$$3. \quad \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

из первого уравнения системы:

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y}$$

$$y^{5 \lg x} - 2 \lg x y = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg x}$$

из второго уравнения системы:

$$x^2 + x(-2y - 4) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = (4 + 2y)^2 - 4(-2y - 3y^2) = (4y + 4)^2$$

$$x_{1/2} = 3y + 4 \quad \text{или} \quad x_2 = -y$$

второй случай невозможен т.к. $x > 0$ и $y > 0$
(из ОДЗ по условию).

Тогда: $x = 3y + 4$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2. \quad \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 3x + \sin(-11x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \sin(-4x) (\cos 7x + \sin 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos 7x = -\sin 7x \\ 2 \sin(-4x) = \cos 7x - \sin 7x \end{array} \right.$$

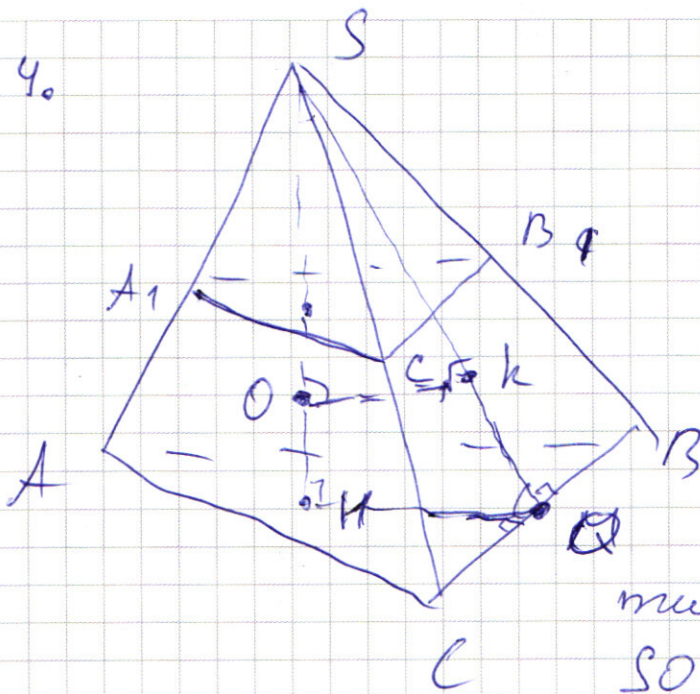
$$\left\{ \begin{array}{l} -1 = +97x \\ 2 \sin(-4x) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 7x = \frac{3\pi}{4} + \pi n \\ -4x = \frac{\pi}{4} - 7x + 2\pi n \\ -4x = \pi - \frac{\pi}{4} + 7x + 2\pi n \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = -\frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11} \end{array} \right.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, -\frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}$

4.



Обозначим точки пересечения перпендикулярных SO с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$ (см. рисунок)

Тогда т.к. плоскости перпендикулярны SO то эти параллельны

Откуда следует подобие $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, т.к. $S(\triangle ABC) = 4$ и $S(\triangle A_1B_1C_1) = 1$ то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом 2.

Тогда SH (SH - перпендикуляр из S на плоск. ABC) делится плоскостью $A_1B_1C_1$ пополам. а т.к. пл. $A_1B_1C_1$ и пл. ABC касаются сферы и параллельны то $SH = 4r$ (где r радиус сферы) Пусть OK - перпендикуляр из O на BC тогда:

$\triangle SOK \sim \triangle SHM$ (где M основание перпендикуляра из K на BC) Откуда следует что:

$$\frac{SO}{SH} = \frac{OK}{HM} \quad \text{или} \quad \frac{3r}{SH} = \frac{SK}{4r}$$

$$\frac{SK}{SH} = \frac{OK}{HM} = \frac{SO}{SH} \quad \text{или} \quad \frac{SK}{4r} = \frac{3r}{SH} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SK \cdot SH = 12r^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

то $S_k^2 = S_0^2 - O_k^2 = (3r)^2 - (r)^2 = 8r^2$

тогда $S_k = \frac{12r^2}{2\sqrt{2}r} = \frac{6}{\sqrt{2}}r$

а отношение $\frac{S_k}{S_0} = \frac{6r}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}r} = \frac{3}{2}$

тогда $S_{k \text{ lim}} = 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

Ответ: $\frac{16}{9}$.

5.)
$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

рассмотрим 4 случая:

- 1) $y-3-x \leq 0$; $y-3+x \leq 0$
- 2) $y-3-x \geq 0$; $y-3+x \leq 0$
- 3) $y-3-x \leq 0$; $y-3+x \geq 0$
- 4) $y-3-x \geq 0$; $y-3+x \geq 0$

1) $-y+3+x + 3-y-x = 6$

$y = 0$; $-3 \leq x \leq 3$

Погда из второго уравнения системы найдем:

$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$

$(|x|-4)^2 = a-9$, $1 \leq (|x|-4)^2 \leq 16$, $-4 \leq |x|-4 \leq 4$

~~при $a \in (10; 25)$ система имеет ровно два решения.~~

2)

$$y - 3 - x - y + 3 - x = 6$$

$$x = -3 \quad 6 \geq y \geq 0$$

из второго ур. $(|y| - 3)^2 = a - 1$

$$-3 \leq |y| - 3 \leq 3 \quad 0 \leq (|y| - 3)^2 \leq 9$$

~~при $a \in (1; 10)$ система имеет ровно два решения~~

3)

$$-y + 3 + x + y - 3 + x = 6$$

$$x = 3 \quad ; \quad 0 \leq y \leq 6$$

из второго ур. $(|y| - 3)^2 = a - 1$

$$a \in (1; 10)$$

4)

$$y - 3 - x + y - 3 + x = 6$$

$$y = 6 \quad -3 \leq x \leq 3$$

$$(|x| - 4)^2 = a - 9 \quad a \in (10; 25)$$

Итого. при $a \in (1; 10)$ и $(10; 25)$ система имеет более двух корней, при $a \notin (1; 10)$ и $(10; 25)$ и $a \neq \{1; 10; 25\}$ нет решений
остановимся рассмотреть $a = \{1; 10; 25\}$

1) при $a = 1$ 4 пары корней

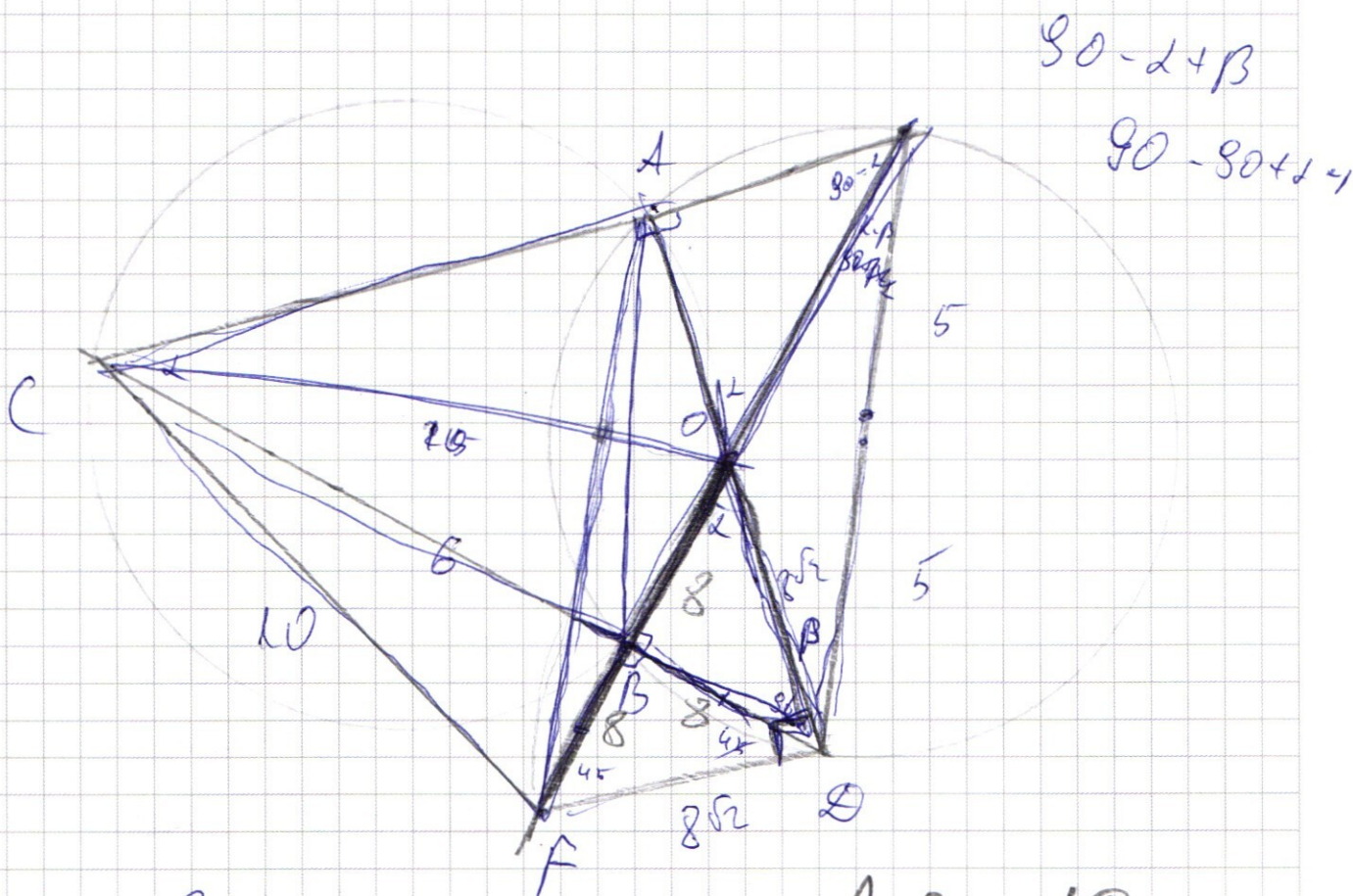
2) при $a = 10$ более четырех

3) при $a = 25$ два решения

Ответ: $a = 25$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$8h^2 = x^2 + 8r^2 = 88r^2$$

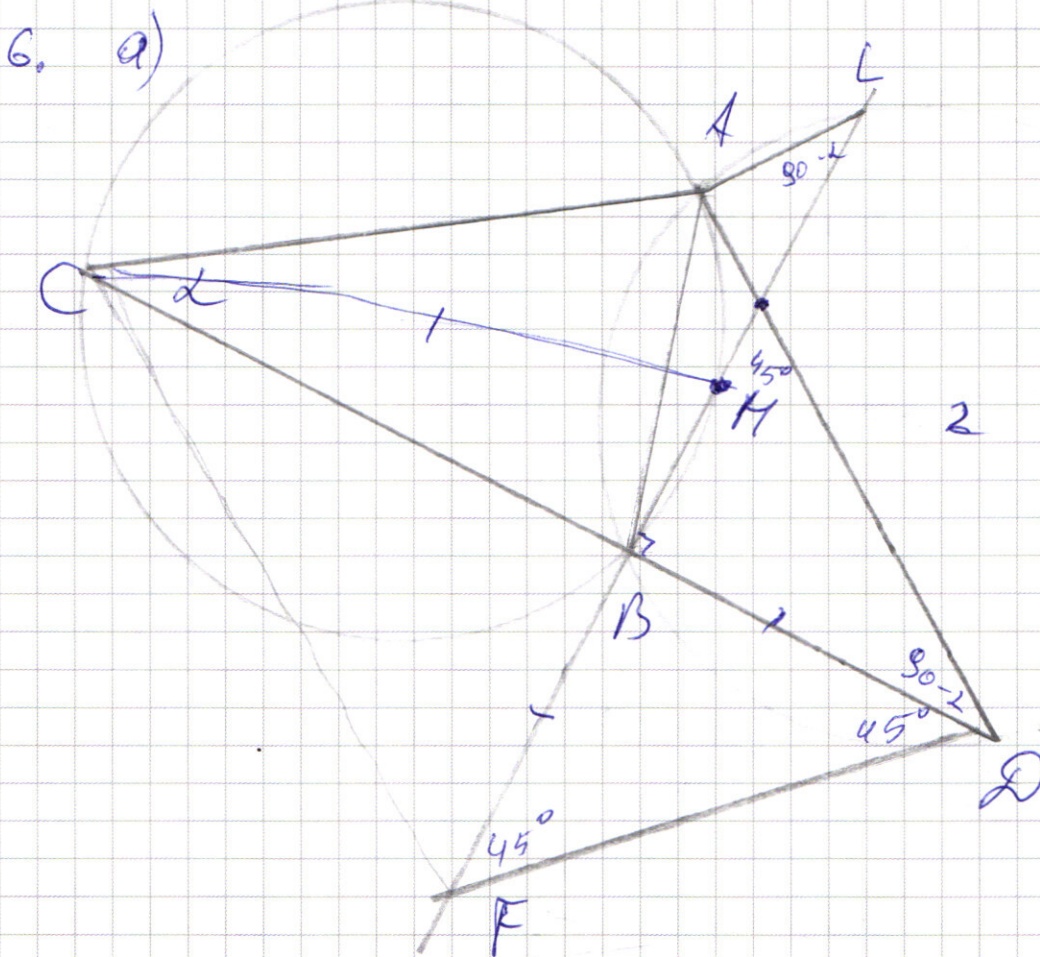


$$\frac{8}{x} = \frac{8\sqrt{2}}{14}$$

$$x = 7\sqrt{2}$$

$$\frac{6}{10}$$

$$AC = 10$$



Пусть AC пересекает внешнюю окружность в точке L тогда $\angle DAL$ опирается на диаметр. Пусть FB пересекает внешнюю окружность в L' тогда $\angle L'BD$ опирается на диаметр, но из точки на окружности можно провести один диаметр откуда следует $L = L'$ а ~~также~~ Пусть $\angle C\angle D = \alpha$ тогда т.н., $\angle C\angle D = 90^\circ$ но $\angle C\angle D = \angle C\angle LB = 90 - \alpha$ но окружности равны и $\angle C\angle B$ и $\angle A\angle B$ опираются на равную дугу, откуда получаем $90 - \alpha = \alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ$ т.н. $\angle C\angle D = \angle B\angle D = 90^\circ$ то они опираются на диаметр проходящий

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

через C откуда следует что AD и BE пересекаются на первой окружности в точке M . и т.к. $\angle CBM = 90^\circ$ то CM - диаметр.

Но $\angle MDB = \angle BDF = 45^\circ$ (по условию $\triangle ABD$ - равнобедренный прямоугольный.)

тогда $MB = BF$ и CB медиана и высота в $\triangle CBF$ тогда $CM = CF = 0$

Ответ: 10

6.5)

$$AC = x$$

тогда из подобия $\triangle BDF \sim \triangle ADF$

$$\frac{8}{x} = \frac{8\sqrt{2}}{8}$$

$$x = 7\sqrt{2}$$

$$BF = \sqrt{100 - 36} = 8$$

$$OD = 8\sqrt{2}$$

$$S_{ACF} = S_{ACDF} - S_{ADF} = \frac{7\sqrt{2} + 8\sqrt{2}}{2} \cdot 7\sqrt{2} -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 15 \cdot 7 - 56 = 105 - 56 =$$

$$= 49 \quad (\text{т.к. } AC \parallel FD, \triangle ACF -$$

равнобедренный прямоугольный, $\triangle BDF =$
равнобедренный прямоугольный)

Ответ: 49.

