

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 6$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a b c d e f g h

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 5 \end{array}$$

√

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3 = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h$$

1 ≤ каждая цифра числа ≤ 9  
и ∈ ℕ

1ч Три числа = 5

Три других числа = 3

остальные по 1

5 5 5 3 3 1 1

2ч

Три числа = 5

одно число = 3

одно число = 9

остальные = 1

5 5 5 3 9 1 1 1

где 1ч:         

$$\frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$$

вариантов расположить три пятёрки  
на восемь позиций

Остается 5 позиций:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

вариантов расположить три тройки

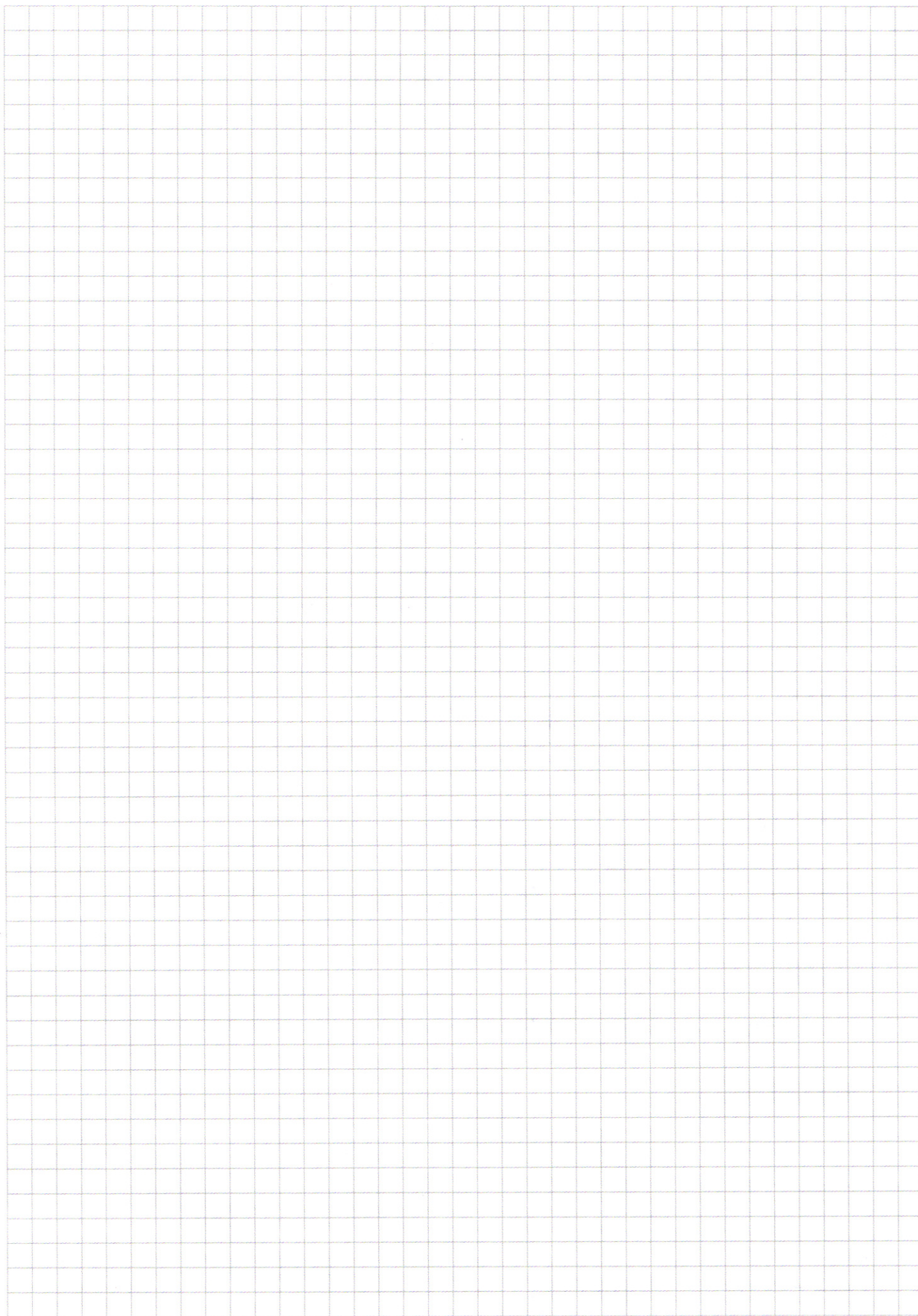
Остается 2 позиции каждая из которых должна быть занята 1

каждого случая:  $56 \cdot 10 = 560$

где 2ч:  $\frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$

вариантов расп. 5

$$\frac{5!}{4!} = 5 - \text{вариантов расположения 9}$$



☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{4!}{3!} = 4 - \text{вариантов расположения } 3$$

остальные 3 позиции это 1

$$\text{кол-во путей: } 56 \cdot 5 \cdot 4 = 1120$$

$$\text{общее кол-во путей: } 1120 + 560 = 1680$$

$$\text{Ответ: } 1680$$

$$\sqrt{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x + \sin 3x - \sin 11x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos(7x+4x) - \cos(7x-4x) + \sin(7x-4x) - \sin(7x+4x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x$$

$$\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\sin 7x + \cos 7x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x = 0$$

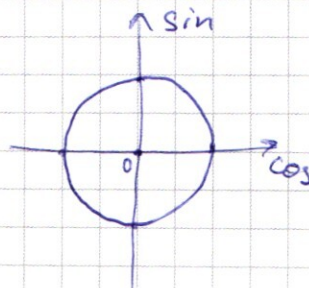
$\cos \frac{\pi}{4}$   $\sin \frac{\pi}{4}$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

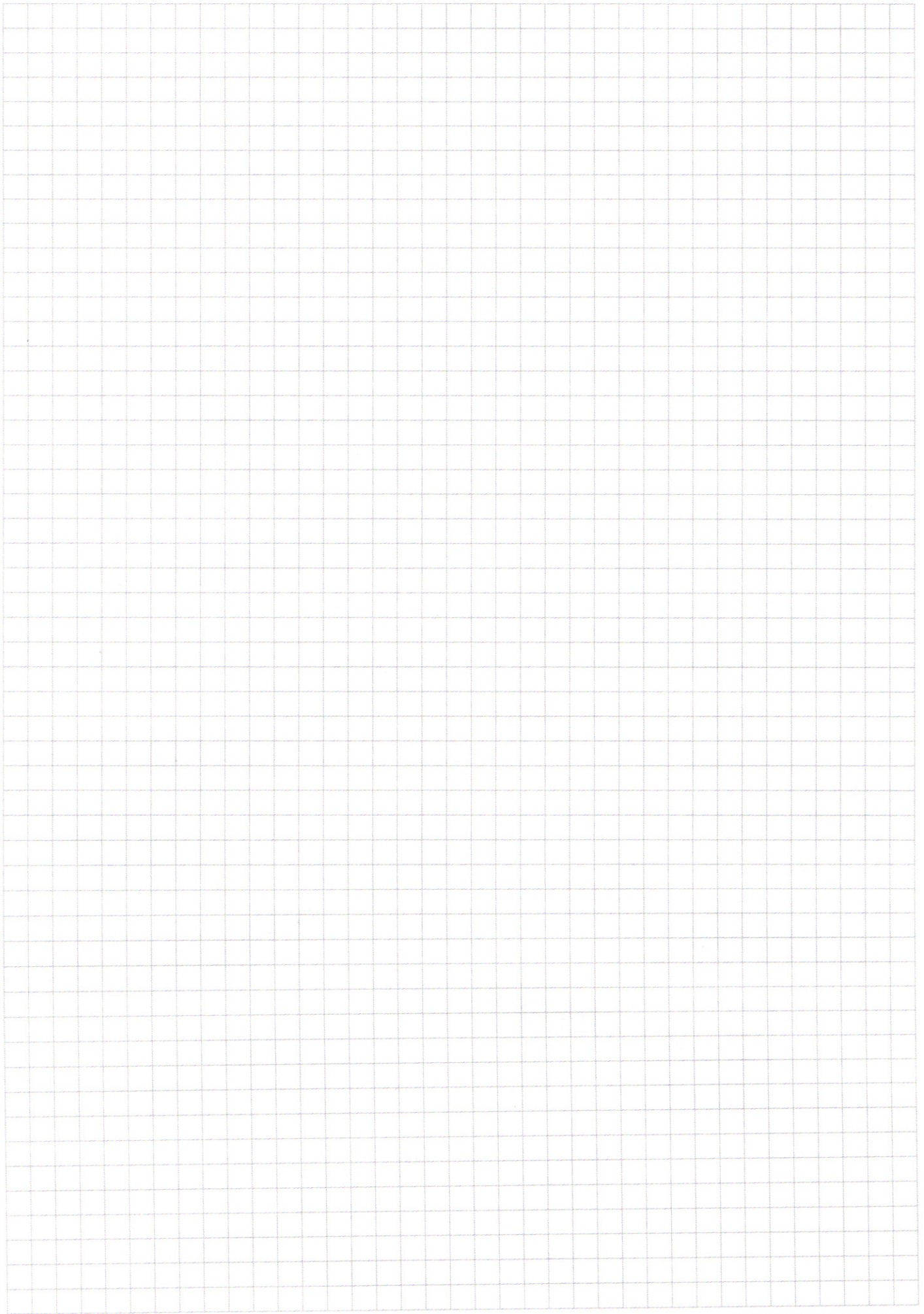
$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} n$$



$$\sin 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$\sin 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x + \sin 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\sin \frac{\pi}{4}$   $\cos \frac{\pi}{4}$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin 4x = \sin 7x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 7x$$

$$\sin 4x = \sin \left( 7x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin 4x - \sin \left( 7x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\frac{4x + 7x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{4x - 7x - \frac{\pi}{4}}{2} = -\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8}$$

$$-2 \sin \left( \frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = -2 \sin \left( -\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8} \right) \cdot \cos \left( \frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} \right)$$

$$\begin{cases} \sin \left( -\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8} \right) = 0 \\ \cos \left( \frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8} = \pi n \\ \frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n \end{cases}$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3}n \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n \end{cases}$$

Ответ:

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7}n$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3}n$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n$$

$\sqrt{3}$

$$\left( \frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \quad (1)$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \lg \frac{y^5}{x} \cdot \lg x &= \lg y \cdot 2 \lg xy \\ (\lg y^5 - \lg x) \lg x &= 2 \lg y (\lg x + \lg y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &> 0 \\ y &> 0 \end{aligned}$$

$$(5 \lg y - \lg x) \lg x = \lg y \cdot 2(\lg x + \lg y)$$

Заменим:  $\lg y = a$   $\lg x = b$

$$(5a - b) \cdot b = 2a^2 + 2ab$$

$$5ab - b^2 = 2a^2 + 2ab$$

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$$

$$a_1 = \frac{3b - |b|}{4}$$

$$a_2 = \frac{3b + |b|}{4}$$

если  $b \geq 0$

$$a_1 = 0,5b$$

$$a_2 = b$$

если  $b < 0$

$$a_1 = b$$

$$a_2 = 0,5b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,5b \\ a = b \end{cases}$$

опр. замена:

$$\begin{cases} \lg y = 0,5 \lg x \\ \lg y = \lg x \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = x \\ y = x \end{cases}$$

②  $x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$

при  $x = y^2$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0 \quad | : y$$

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

|   |   |    |    |    |
|---|---|----|----|----|
|   | 1 | -2 | -7 | 12 |
| 3 | 1 | 1  | -4 | 0  |

$$(y-3)(y^2+y-4)=0$$

$$(y-3) \times$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 9 \\ y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

при  $x = y$

$$y^2 - 2y^2 - 4y - 3y^2 + 12y = 0$$

$$-4y^2 - 4y = -8y$$

$$y = 2 \quad x = 2$$

Ответ:  $\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

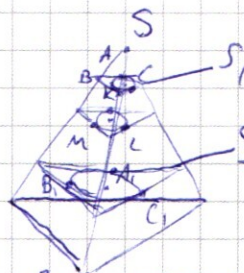
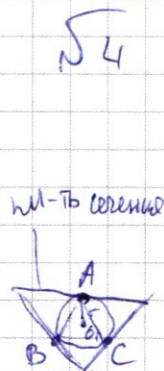
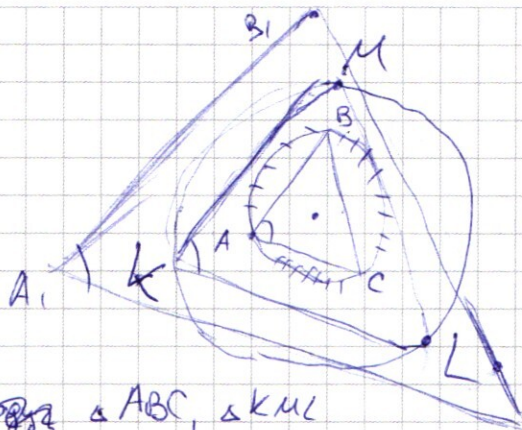
~~$y \geq 0$~~   
 ~~$x \geq 0$~~

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0 \\ y_2 &= \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= y^2 = \frac{1-2\sqrt{17}+1}{4} = \\ &= \frac{2-2\sqrt{17}}{4} = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$S_{\text{сферы}} = 4$$

$$S_{\text{сферы}} = 1$$

В которой A, B, C точки касания  
вписанной окружности

1) у ~~трех~~  $\triangle ABC$ ,  $\triangle KLM$   
и  $\triangle A_1B_1C_1$  - ~~одинаковые~~

2)  $\text{пл-ть } (A, B, C) \perp SO$   
 $\text{пл-ть } (ABC) \perp SO \} \Rightarrow (ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$   
(аналог.)

3)  $AB \parallel KM \parallel A_1B_1$   
 $BC \parallel ML \parallel B_1C_1$   
 $AC \parallel KL \parallel A_1C_1$   
(как линии пересеч. паралл. плоскостей)

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{1}{4}$$

их соответственные углы равны

(как площади  $\sim$  квадр.)  $\triangle ABC \sim \triangle KLM \sim \triangle A_1B_1C_1$  (по 2 углам)

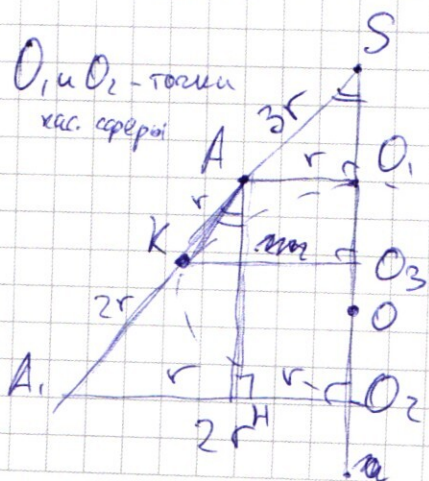
4)

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

радиусы описанных окружностей также подобны

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 2$$

(площади  $\sim$ , как квадр. подобия)



5)  $AO_1 \perp A_1O_2$   $AO_1O_2A_1$  - ~~прям.~~  $\triangle$   $AO_1 = O_1O_2 = r \Rightarrow A_1O_1 = r$

6)  $AO_1 = AK = r$  (как отрезки кас. к сфере)

$A.K = A.O_2 = 2r$



$A.A = r + 2r = 3r$

7)  $AH \parallel SO_2$  (т.к.  $AH \perp AO_2$  и  $SO_2 \perp AO_2$ )



$\angle A.AH = \angle A.SO_2$  (как соотв.)

8)  $\sin \angle A.AH = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$

$\angle ASO = \angle A.AH = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$

9)  $S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4r}$

$S_1 = p \cdot r$

$S_{A_1B_1C_1} = \frac{A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot A_1C_1}{8r}$

$S_2 = p \cdot 2r = 4p \cdot r$

$\frac{AS}{A_1S} = \frac{AO_1}{A.O_2} = \frac{1}{2}$  (по т. Понсе)

↓  
 $AS = A.A = 3r$

10)  $\frac{AO_1}{KO_3} = \frac{AS}{KS} = \frac{3}{4} \Rightarrow \triangle A.O_1S \sim \triangle KSO_3$  ( $k = \frac{3}{4}$ )



$\triangle A.MKL \sim \triangle ABC$  ( $k = \frac{3}{4}$ )

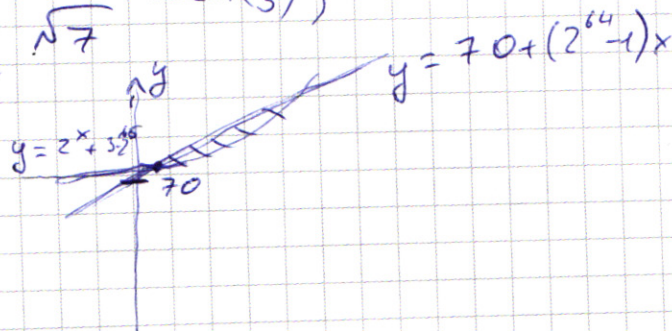
(подобные треугольники относятся так же как и радиусы вписанных окр.)

Ответ:  $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$

$S_{KSO_3} = \frac{4}{3} S_1 = \frac{4}{3} p \cdot r$

$2^x + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$

$2^x + 3 \cdot 2^{65} < 70 + (2^{64} - 1)x$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos(7x+4x) - \cos(7x-4x) = \cancel{\cos 7x \cos 4x} - \cancel{\sin 7x \sin 4x} - \cancel{\cos 7x \cos 4x} - \cancel{\sin 7x \sin 4x}$$

$$\frac{11x+3x}{2} = 7x \quad \frac{11x-3x}{2} = 4x \quad = -2 \sin 7x \cdot \sin 4x$$

$$\sin(7x-4x) - \sin(7x+4x) = \cancel{\sin 7x \cos 4x} - \cancel{\cos 7x \sin 4x} - \cancel{\sin 7x \cos 4x} - \cancel{\cos 7x \sin 4x} =$$

$$= -2 \sin 4x \cdot \cos 7x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x$$

$$\frac{4x + 7x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$y^5 \lg x = y^{2(\lg x + \lg y)} \cdot x \lg x$$

$$\lg \left( \frac{y^5}{x} \right) \cdot \lg x = \lg y \cdot 2(\lg x + \lg y)$$

$$(\lg y^5 - \lg x) \lg x = \lg y \cdot 2(\lg x + \lg y)$$

$$(5a - b) \cdot b = 2a(a + b)$$

$$5ab - b^2 = 2a^2 + 2ab$$

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$$

$$a_1 = \frac{3b - |b|}{4}$$

$$a_2 = \frac{3b + |b|}{4}$$

$\Leftrightarrow$

$$a = 0,5b$$

$$a = b$$

$$\begin{cases} \lg x = 0,5 \lg y \\ \lg x = \lg y \end{cases}$$

y

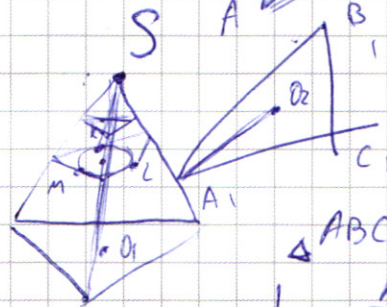
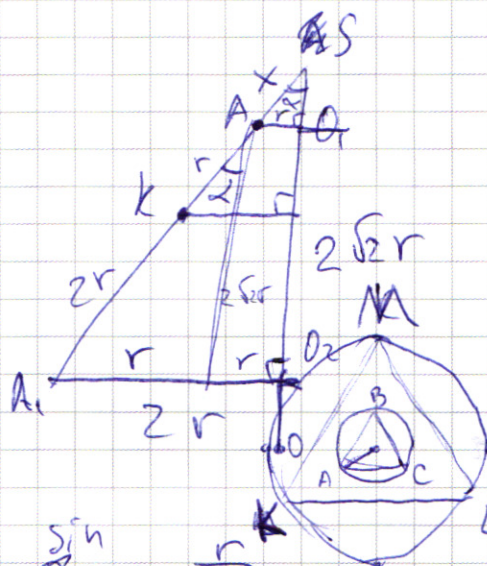
3-2-8

$$27 - 2 \cdot 9 - 7 - 3 + 12$$

$$6 - 18 + 12$$

$$9 - 21 + 12$$

D=



$$\triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1$$

$$k = \frac{AC}{A_1 C_1} = 2 = \frac{r}{R}$$

$$\sin \alpha = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

