

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$a_8 a_7 \dots a_1$.

Заметим, что $3375 = 5^3 \cdot 3^3 = 9 \cdot 3 \cdot 5^3$.

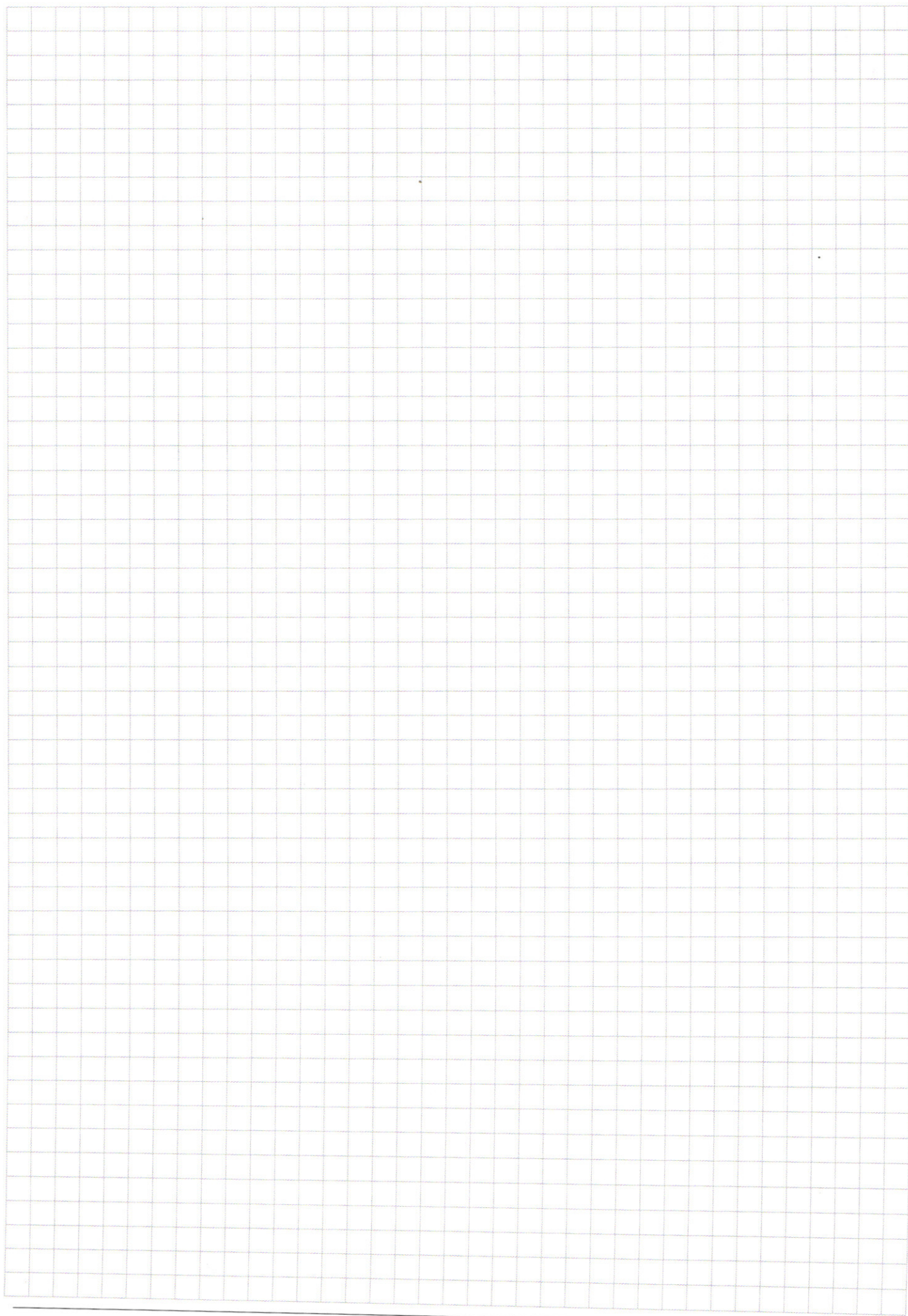
Т.к. каждая цифра ≤ 9 и ≥ 1 можно сделать вывод, что среди цифр всегда будут 3 пятёрки. Кол-во способов, которыми можно выбрать остальные для этих пятёрок: $C_8^3 = 56$. Делается 5 шагов.

Здесь 2 варианта:

- | | |
|--|---|
| 1) $\overline{33311}$ - итак заносятся 3 единицы и 2 тройки. Кол-во способов: $C_5^3 = 10$ | 2) $\overline{93111}$ - 1 девятка и 1 тройка. Т.к. в данном случае порядок важен, кол-во способов: $A_5^2 = 60$. |
|--|---|

$$\begin{aligned} \text{Всего способов: } C_8^3 \cdot C_5^3 + C_8^3 \cdot A_5^2 &= C_8^3 (C_5^3 + A_5^2) = \\ &= 56 \cdot (10 + 60) = 56 \cdot 70 = 3920. \end{aligned}$$

Ответ: 3920



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

ДЗ: $x > 0, y > 0$

Преобразуем второе уравнение системы:

$$(x-y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = (x-3y)(x+y) - 4(x-3y) = (x-3y)(x+y-4) = 0.$$

Таким образом, у нас есть два варианта:

1) $x = 3y$

Подставим в первое уравнение системы:

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg(3y \cdot y)} \Leftrightarrow 3 = y$$

$$y^{2\lg 3y - 2\lg y} = y^{\lg 3y}$$

случай $y = 2$ разберем отдельно. Пусть пока $y \neq 1$.

$$y^{2\lg 3 + 2\lg y - 2\lg y} = y^{\lg 3y}$$

$$2\lg 3 = \lg 3y \lg 3 \Rightarrow 2\lg 3 = \lg 3$$

~~$$2\lg 3 = \lg 3$$~~

$$2 \cdot \frac{\lg 3}{\lg 3y} = \lg 3 \Rightarrow \frac{2\lg 3}{1 + \lg 3} = \lg 3$$

$\lg 3 \neq 0$ по свойствам логарифма (значит сокращаем на $\lg 3$; $\lg 3 \neq -1$);

$$2 = 1 + \lg 3 \Rightarrow \lg 3 = 1 \Rightarrow y = 3.$$

Отсюда $x = 3y = 9$.

2) $x = 4 - y$

$$x^{\lg x} = y^{5\lg x - 2\lg x - 2\lg y} = y^{3\lg x - 2\lg y}$$

$$y^{\lg x \lg x} = y^{\lg x \lg y x} = y^{3\lg x - 2\lg y}$$

при $y = 1$ ($\lg y \neq 0$)

$$\lg x \lg y x = 3\lg x - 2\lg y$$

$$\frac{\lg x}{\lg y} = 3\lg x - 2\lg y$$

$$\left(\frac{\lg x}{\lg y}\right)^2 - 3\left(\frac{\lg x}{\lg y}\right) + 2 = 0.$$

Пусть $\frac{\lg x}{\lg y} = t$. Тогда:

$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$

$$t_1 = 1,$$

$$t_2 = 2.$$

$$\lg x = \lg y \Rightarrow x = y. \quad \lg x = 2\lg y = \lg y^2$$

и $x = 4 - y$, откуда $x = y^2$ и $x = 4 - y$.

$$x = y = 2$$

$$y^2 + y - 4 = 0.$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Т.к. $y > 0$ $y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$, а $x = \frac{8-\sqrt{17}+1}{2} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$

Далее отдельно случай: $y=1$. Тогда из первого уравнения: $\frac{1}{x^{\lg x}} = 1 \Rightarrow x^{\lg x} = x^0 \Rightarrow \lg x = 0 \Rightarrow x=1$. Но тогда для второго уравнения $x-3y \neq 0$, или $x+y \neq 4$. Значит $y=1$ не подходит.

Ответ: $(x,y): (9,3); (2,2); (\frac{9-\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17}-1}{2})$,
и др.

$$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = -2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x =$$

$$= -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x.$$

Возведем обе части в квадрат:

$$4 \sin^2 4x (\sin 7x + \cos 7x)^2 = 2 (\cos^2 7x - \sin^2 7x)^2 = 2 (\cos 7x - \sin 7x)^2 (\cos 7x + \sin 7x)^2$$

$$(\sin 7x + \cos 7x)^2 (2 \sin^2 4x - 1 + \sin 14x) = 0.$$

$$1) (\sin 7x + \cos 7x)^2 = 0.$$

$$1 + \sin 14x = 0.$$

$$\sin 14x = -1.$$

$$2) -(1 - 2 \sin^2 4x) + \sin 14x = 0.$$

$$-\cos 8x + \sin 14x = 0 \Rightarrow \cos 8x - \sin 14x = 0.$$

$$\cos 8x - 2 \cos 8x \sin 8x = 0.$$

$$\cos 8x (1 - 2 \sin 8x) = 0.$$

$$2.1) \cos 8x = 0$$

$$2.2) \sin 8x = \frac{1}{2}.$$

$$14x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$8x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$8x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

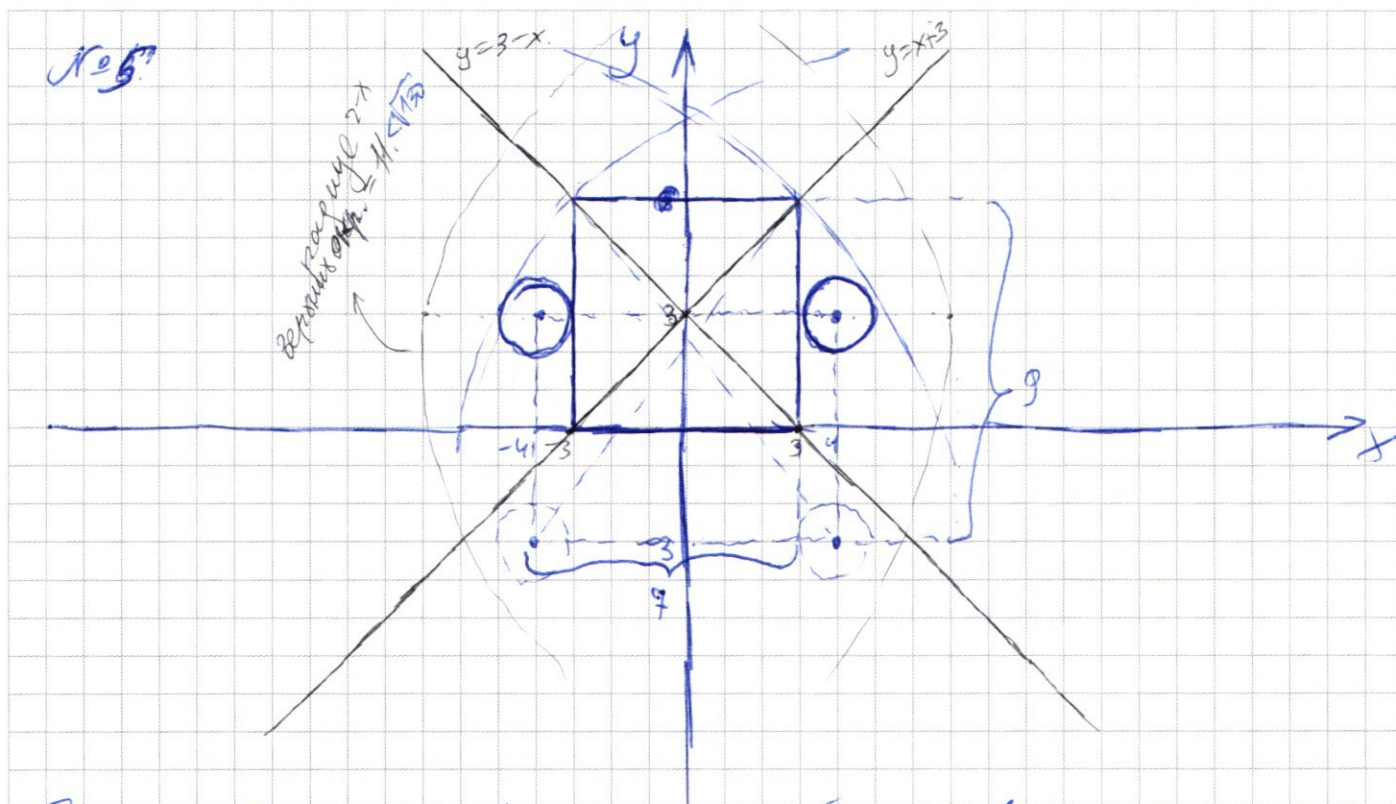
$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{(-1)^k \pi}{48} + \frac{\pi m}{8}, m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}, \frac{(-1)^k \pi}{48} + \frac{\pi m}{8}, k, n, m \in \mathbb{Z}.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Рассмотрим график значений первого у-я:

1) $y \leq 3 - x$ и $y \geq x + 3$: $y - 3 - x + y - 3 + x \leq 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3$.

2) $y \leq x + 3$ и $y \geq x + 3$: $-y + 3 + x + y - 3 + x = 2x = 6 \Rightarrow x = 3$.

3) $y \leq x + 3$ и $y \leq -x + 3$: $-y + 3 + x - y + 3 - x \leq 6 - 2y = 6 \Rightarrow y = 0$.

4) $y \geq x + 3$ и $y \leq -x + 3$: $y - 3 - x - y + 3 - x = -2x = 6 \Rightarrow x = -3$.

Значит график первого уравнения - это квадрат со стороной 6 и левой нижней границей $(-3; 0)$.

График второго уравнения - совокупность центров окружностей радиуса 3 (при $\alpha = 0$) и центрами.

$(4; 3)$; $(-4; 3)$; $(4; -3)$ и $(-4; -3)$. а $\alpha > 0$ мы не рассматриваем, т.к. в этом случае система вообще не будет иметь решений.

Система будет иметь только 2 решения в 2-х случаях.

1) окружности выше оси абсцисс касаются квадрата.

2) две нижние окружности касаются 2-х верхних углов квадрата, сам при этом две верхние окружности не пересекают квадрат вообще.

1. случай: $a=1$. Тогда две верхние окружности касаются квадрата, а две нижние - нет.

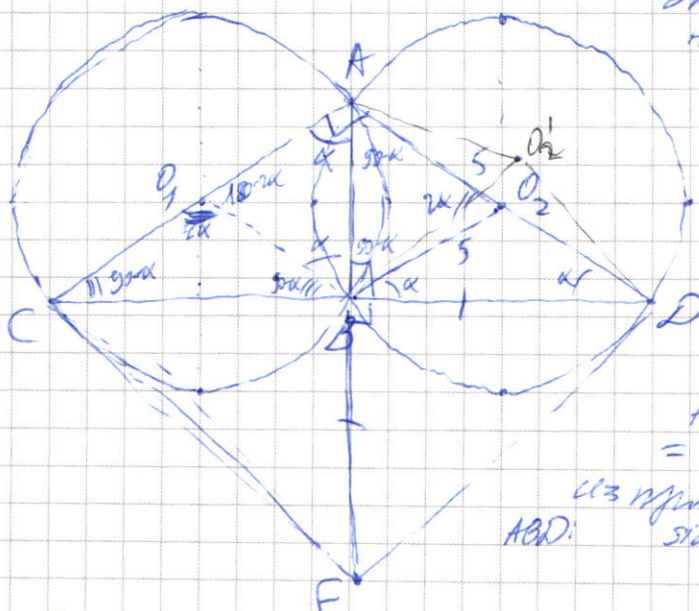
2) ~~если~~ $r = 7^2 + 9^2 = 49 + 81 = 130$. Тогда $r = \sqrt{130} > \sqrt{121} = 11$

Как видно из рисунка, если радиусы двух верхних окружностей не меньше 11, то они уже не могут пересечь квадрат. А при $r = \sqrt{130}$ и по-прежнему.

В остальных случаях, как не трудно убедиться из графика, либо вообще не будет решений, либо их будет не меньше четырех.

ответ: ~~1; 130~~ 1; 130.

$N=6$.



1) Докажем, что центр второй окружности лежит на AD (предположим, что это не так, пусть O_2' - положение центра). Т.к. $\angle O_1 O_2 B$ - центральный угол, то он в 2 раза больше вписанного угла $\angle ADB$, опирающегося на ту же дугу; но тогда по косинусов для $\triangle O_2 B$:

$$AB^2 = 50 - 50 \cos 2\alpha = 50(1 - 1 + 2 \sin^2 \alpha) = 100 \sin^2 \alpha$$

из прямоугольного треугольника ABD : $\sin \alpha = \frac{AB}{\sqrt{AB^2 + BD^2}} = \frac{AB}{100}$, откуда

$AB^2 + BD^2 = 100 = AD^2 \rightarrow AD = 10 = 5 + 5$. Таким образом, положение точки O_2' совпадает с положением точки O_2 .

Аналогично точка O_1 лежит на AC.

Т.к. $O_1 A O_2 B$ - ромб (все стороны - радиусы), а у ромба диагонали - биссектрисы углов $\alpha = 45^\circ \Rightarrow CB = CD \Rightarrow AB = \frac{10}{\sqrt{2}}$
 $\Rightarrow CF = 10$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.1.

$$a_8 a_7 a_6 \dots a_1$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_8$$

$$27 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ -10 \overline{) 27} \\ \hline 35 \\ -35 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ -30 \overline{) 675} \\ \hline 37 \\ -35 \\ \hline 25 \\ -25 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ -5 \overline{) 135} \\ \hline 17 \\ -15 \\ \hline 25 \\ -25 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3 = 9 \cdot 3 \cdot 5^3$$

3 цифры - обязательно пятёрки.

Остальные 5: либо 33311, либо 33111, либо 31111

кол-во перестановок: C_8^3 ; тройки могут располагаться: C_5^3 вариантов
Если 9 и 5 то A_5^2 . Всего: $C_8^3 \cdot A_5^2 + C_8^3 \cdot C_5^3$

$$C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 10; \quad A_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 20$$

33111

91311

91131

91113

33111

31911

31191

31119

91311

13911

13191

13119

19311

19131

19113

Всего таких чисел: $C_8^3 \cdot C_5^3 + C_8^3 \cdot A_5^2$

$$C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 10$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

$$A_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

$$C_8^3 (C_5^3 + A_5^2) = 10 \cdot (10 + 10) = 200$$

$$\begin{array}{r} 20 \cdot 56 \\ \hline 00 \\ 392 \\ \hline 3920 \end{array}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x \quad \cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 7x \sin 4x$$

$$\sin 3x - \sin 11x = 2 \sin\left(\frac{4x}{2}\right) \cos 7x = 2 \sin 2x \cos 7x$$

$$-2 (\sin 7x \sin 4x + \sin 4x \cos 7x) = -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos 4x - 1)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = -2 \sin 4x \sqrt{1 + \sin 14x}$$

$$\sqrt{2} \sin^2 4x (1 + \sin 14x) = \cos^2 4x = \sqrt{(1 - \sin 14x)(1 + \sin 14x)}$$

$$1 + \sin 14x = \sin^2 7x + \sin 14x + \cos^2 7x = (\sin 7x + \cos 7x)^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$$

$$-2 \sin 4x \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = \cos^2 4x$$

$$\sin 4x \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) \sin\left(11x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) \sin\left(11x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2 4x$$

$$\cos 14x = \cos^2 7x - \sin^2 7x = (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$$

$$-2 \sin^2 4x (\sin 7x + \cos 7x) = (\cos 7x - \sin 7x)^2 (\cos 7x + \sin 7x)^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right)$$

$$-\sin^2 4x = \cos^2 4x$$

$$-2 \sin 4x \sqrt{1 + \sin 14x}$$

$$4 \sin^2 4x (\sin 7x + \cos 7x)^2 = 2 (\cos 7x + \sin 7x)^2 (\cos 7x - \sin 7x)^2$$

$$2 \sin^2 4x = (\cos 7x - \sin 7x)^2 = 1 - 2 \cos 7x \sin 7x = 1 - \sin 14x$$

$$2 \sin^2 4x - 1 = -(1 - 2 \sin^2 4x) = -\cos 8x$$

$$\cos 8x - \sin 14x = 0 \Rightarrow \cos 8x - 2 \sin 8x \cos 8x = 0$$

$$\cos 8x = 0 \text{ или } \sin 8x = \frac{1}{2} \quad \cos 8x (1 - 2 \sin 8x) = 0$$

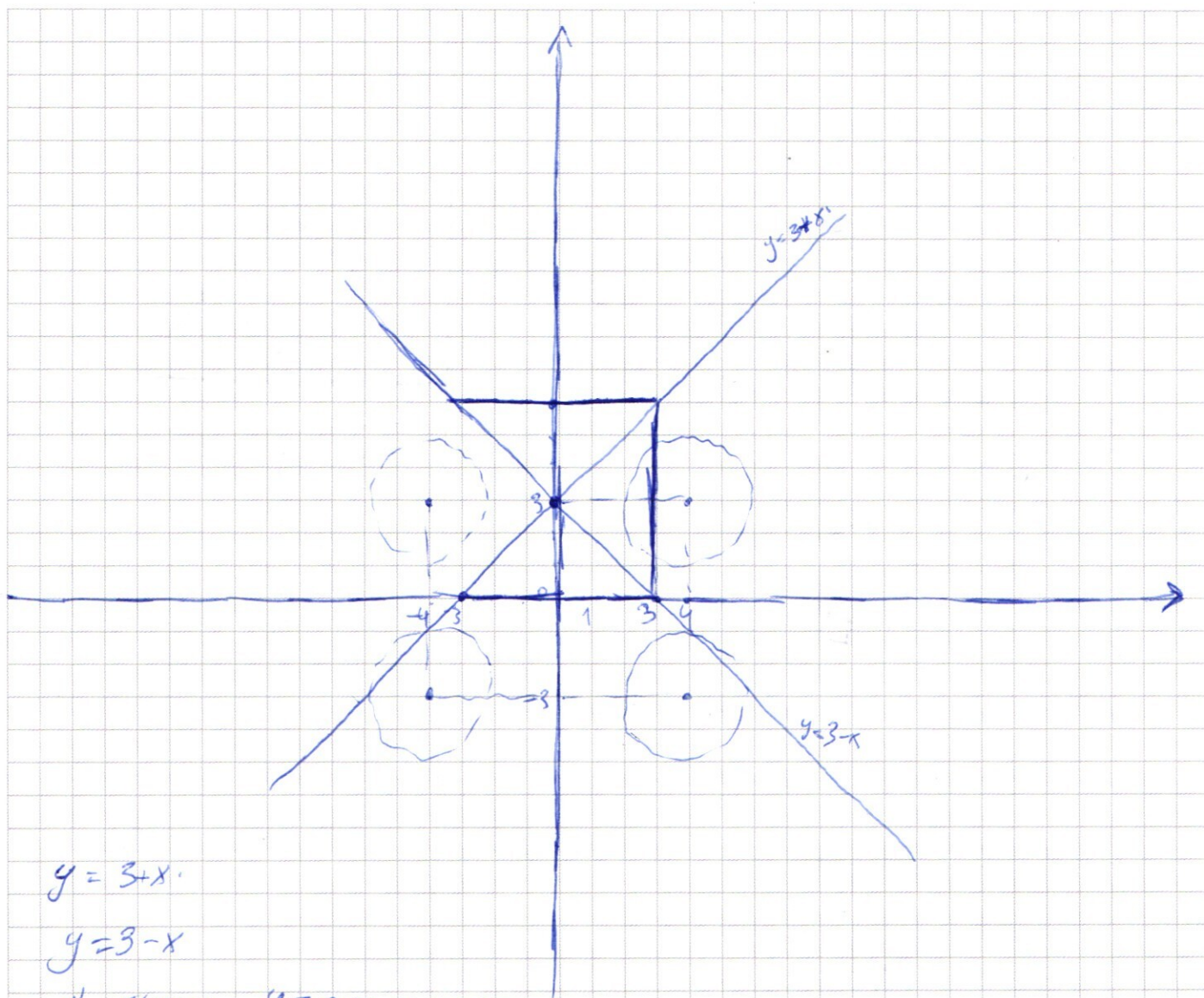
$$\cos 8x = 0 \text{ или } \sin 8x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Случаи: } 8x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad 8x = \dots$$

$$(\sin 7x + \cos 7x)^2 = 1 + \sin 14x \Rightarrow \sin 14x = -1 \Rightarrow 14x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\cos 7x - \sin 7x = \sqrt{1 - \sin 14x}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$y = 3 + x$$

$$y = 3 - x$$

1. Пусть $y \neq 3 + x$ и $y \neq 3 - x$

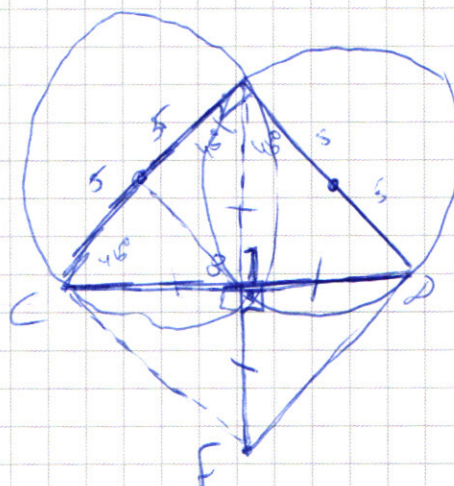
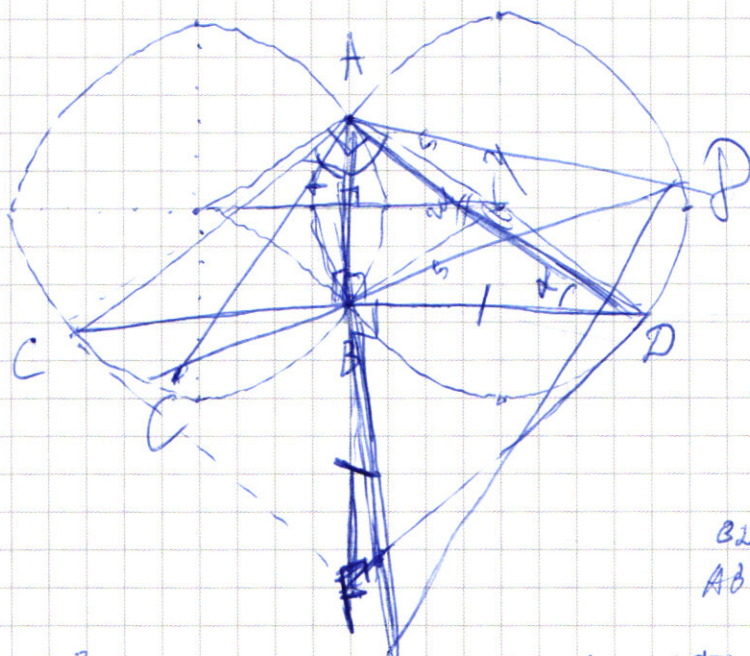
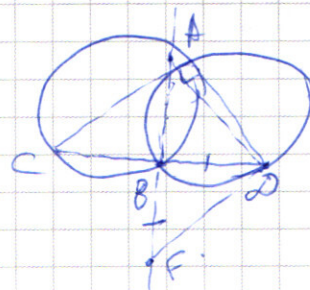
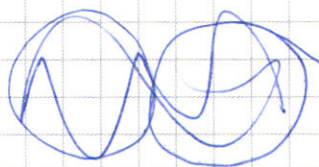
Тогда: $2y - 6 = 6 \Rightarrow y = 6$.

2) $y \leq 3 + x$, $y \geq 3 - x$: ~~ИЗВЕСТНО~~ $-y + 3 + x + y - 3 + x \geq 2x = 6 \Rightarrow x = 3$.

3) $y \leq 3 + x$, $y \leq 3 - x$

$$-y + 3 + x + y + 3 - x \Rightarrow 6 - 2y = 6 \Rightarrow y = 0.$$

~~$9 > 2 + 3 + 65$~~
 ~~$45 = 70 - (8 - x) \cdot x$~~



$$BD^2 = 100 - AB^2$$

$$AB^2 = CB \cdot BD; \quad CF^2 = CB^2 + BD^2$$

$$CB = AB \Rightarrow AB = BD$$

$$AB^2 = CB \cdot BD = CB \cdot BF \Rightarrow AB = BF$$

$$AB^2 = 50 - 50 \cos 2\alpha = 50(1 - 2 \cos^2 \alpha + 1) = 100(1 - \cos^2 \alpha) = 100 \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{AB}{\sqrt{AB^2 + BD^2}}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{BD^2}{AB^2 + BD^2}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{AB^2}{AB^2 + BD^2}$$

$$\frac{AB^2}{100} = \frac{AB^2}{AB^2 + BD^2} \Rightarrow AB^2 + BD^2 = 100$$

$$AD^2 = 50 - 50 \cos \gamma = 100 \Rightarrow 1 - \cos \gamma = 2 \Rightarrow \cos \gamma = -1$$

$$\gamma = \pi = 180^\circ$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x &= (\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \\ &= -2\sin 7x \sin 4x - 2\sin 4x \cos 7x = -2\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) \\ -2\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) &= \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x) \\ (\sin 7x + \cos 7x) (-2\sin 4x - \sqrt{2} \cos 7x + \sqrt{2} \sin 7x) &= 0. \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} \sin 4x + (\cos 7x - \sin 7x) = 0. \quad \sqrt{2} \sin 4x + |\cos 7x - \sin 7x| = \sqrt{2} + \sqrt{1 - \sin 14x}$$

Возвращаемся в квадрат от значения:

$$(\sin 7x + \cos 7x)^2 (4\sin^2 4x - 2(\cos 7x - \sin 7x)^2) = 0.$$

$$1) \cos 7x + \sin 7x = \sqrt{1 + \sin 14x} = 0 \quad 2) 2\sin^2 4x - (1 - 2\sin 7x \cos 7x) = 0.$$

$$\sin 14x = -1$$

$$\begin{aligned} 2\sin^2 4x - 1 + \sin 14x &= 0. \\ -(1 - 2\sin^2 4x) + \sin 14x &= 0. \\ -\cos 8x + \sin 14x &= 0. \\ \cos 8x - \sin 14x &= 0. \\ \cos 8x - 2\sin 8x \cos 8x &= 0 \\ \cos 8x (1 - 2\sin 8x) &= 0. \end{aligned}$$

$$1) \cos 8x = 0$$

$$\cos^2 4x - \sin^2 4x = 0 \Rightarrow 1 - 2\sin^2 4x = 0.$$

$$\sin 14x = 2\sin 8x \cos 8x = 0.$$

$$\sin^2 4x = \pm \frac{1}{2}.$$

$$\cos 7x - \sin 7x = \pm 1.$$

$$(\sin 4x) \cos (7x - 5x)$$

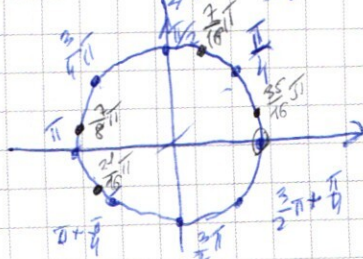
разных знаков

$$\sin 4x (\cos 7x - \sin 7x) = 0.$$

$$8x = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

$$x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{8} = \frac{\pi(R+2)}{16}$$

$$4x = \frac{\pi}{4}(R+2); \quad 7x = \frac{7\pi}{16}(R+2).$$



23.

$x > 0, y > 0$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \Rightarrow \frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg xy} \Leftrightarrow y^{5 \lg x - 2 \lg xy} = x^{\lg x}$$

$$(x-y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$$

$$(x-3y)(x+y) - 4(x-3y) = 0 \Leftrightarrow (x-3y)(x+y-4) = 0$$

МНД $x = 3y$ $x+y=4$

$$y^{5 \lg 3y - 2 \lg 3y} = y^{3 \lg 3y} \Rightarrow y^{3 \lg 3y} = y^{3 \lg 3y}$$

$$y^{5 \lg 3y - 2 \lg 3y} = y^{3 \lg 3y} \Rightarrow y^{3 \lg 3y} = y^{3 \lg 3y}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y} \Leftrightarrow \frac{y^{4 \lg 3y}}{3^{\lg 3y}} = y^{2 \lg 3y} \Rightarrow y^{4 \lg 3y - 2 \lg 3y} = 3^{\lg 3y} \Rightarrow y^{2 \lg 3y} = 3^{\lg 3y}$$

$$y^{2 \lg 3y} = 3^{\lg 3y} \Rightarrow y^{2 \lg 3y} = 3^{\lg 3y} \Rightarrow y^{2 \lg 3y} = 3^{\lg 3y}$$

$$y^{2 \lg 3y} = 3^{\lg 3y} \Rightarrow y^{2 \lg 3y} = 3^{\lg 3y} \Rightarrow y^{2 \lg 3y} = 3^{\lg 3y}$$

МНД $x = 4-y$

$$x^{\lg x} = y^{5 \lg x - 2 \lg x - 2 \lg y} = y^{3 \lg x - 2 \lg y} = y^{\lg x \lg y} = y^{\lg x \lg y}$$

$$\lg x \lg y = 5 \lg x - 2 \lg x - 2 \lg y \Rightarrow \lg x \lg y = 3 \lg x - 2 \lg y$$

$$\lg x (\lg y - 3) + 2 \lg y = 0$$

$$\frac{\lg x}{\lg y} = 3 \lg x - 2 \lg y \text{ ; делим на } \lg y: \left(\frac{\lg x}{\lg y}\right)^2 - 3 \frac{\lg x}{\lg y} + 2 = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = 1; t_2 = 2$$

$$\frac{\lg x}{\lg y} = 1$$

$$\lg x = \lg y$$

$$t_2 = 2$$

$$\frac{\lg x}{\lg y} = 2$$

$$\lg x = 2 \lg y$$

$$\begin{cases} x = y \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 2$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{т.к. } y > 0: y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, x = 4 - y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} > 0$$

Отдельные случаи:

$$y = 1: \left(\frac{1}{x}\right)^{\lg x} = 1$$

$$\frac{1}{x^{\lg x}} = 1; x^{\lg x} = 1 = \sqrt{\lg x}^{\lg x}$$

$$\lg x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Первая y-с верна

$$(1-3) \cdot (1+1-4) = 0$$

Неверно

$$\lg y = 0 \Rightarrow y = 1$$

Тогда был рассмотрен!