

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

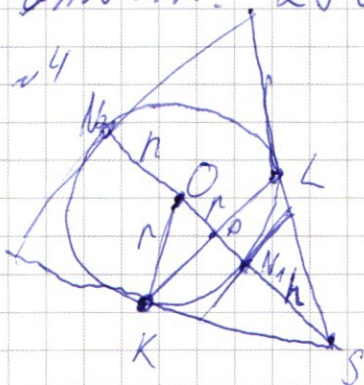
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $16845 = 5^4 \cdot 3^3 \Rightarrow$ это ~~возможное~~ число
состоит из 4 пятёрок 3 троек и 1 единицы.
Посчитаем кол-во распределений 5.
 $C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70.$

Посчитаем кол-во распределений 3 по
оставшимся 4 местам.

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

Единица теперь может распределиться ~~единицей~~
любым возможным способом. Тогда
количество таких чисел $C_8^4 \cdot C_4^3 \cdot 1 = 280.$
Ответ: 280 чисел.



Дано: $S_1 = 4$ $S_2 = 9$

Найти: $\angle KSO$ - ? $SKLM$ - ?

Докажем что $пл-ть KLM \perp SO$.
Рассмотрим $пл-ть KLS$, $KL \perp$ проекции

SO на плоскость, значит $KL \perp SO$. Рассмотрим
 $пл-ть KMS$, $KM \perp$ проекции SO на плоскость, значит
 $KM \perp SO$. Так как $KM \perp SO$ и $KL \perp SO$, значит
 $KLM \perp SO$. Пусть $SN_1 = h$, тогда $\frac{h^2}{(h+2r)^2} = \frac{S_1}{S_2}$, из-за
подобия $gh^2 = 4h^2 + 16r^2 + 16hr$. поделим на h^2
 $5(\frac{h}{r})^2 - 16\frac{h}{r} - 16 = 0. \Rightarrow \frac{h}{r} = 4. \quad h = 4r.$

Рассмотрим $\triangle KSO$, $SO = r_{H_2} = 5r$, $KO = r$.

$$\sin \angle KSO = \frac{r}{5r} = \frac{1}{5}; \quad \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}.$$

$$KS = \sqrt{25r^2 - r^2} = 2\sqrt{6}r.$$

Пусть SO пересекать плоскость KLM в т. P .

$$PS = KS \cdot \cos \angle KSO = 2\sqrt{6}r \cdot \cos \angle KSO$$

$$\frac{(2\sqrt{6}r \cdot \cos \angle KSO)^2}{(4r)^2} = \frac{S_{KLM}}{S_1} \quad - \text{из-за подобия}$$

$$S_{KLM} = 6 \cos^2 \angle KSO = 6 - 6 \sin^2 \angle KSO = 6 - \frac{6}{25} = 5 \frac{19}{25} = 5,46$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}; \quad S_{KLM} = 5,46$$

45

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

если y $x-6-y$ и $x-6+y$ разные знаки, тогда

$$\cancel{y=0} \quad y = \pm 6$$

$$\text{подставим: } |x| + |x-12| = 12 \Rightarrow x \in [0; 12], \text{ так как}$$

если $x < 0$, то $-2x+12=12 \quad x=0$ - против, а если

$x > 12$, тогда $2x=24 \quad x=12$ - против, а если $x \in [0; 12]$

$$x-x+12=12 \quad 0=0;$$

если y $x-6-y$ и $x-6+y$ одного знака, тогда

$$x = 0; 12.$$

$$\text{подставим: } |-y-6| + |y-6| = 12 \quad \text{или} \quad |6-y| + |6+y| = 12,$$

$$\text{а так как } |6-y| = |y-6|, \text{ то } |y+6| + |y-6| = 12.$$

если $y > 6$ или $y < -6$, тогда $|y+6| + |y-6| > 12$, а

если $-6 \leq y \leq 6$, тогда $y+6 - y+6 = 12, \quad 0=0$, значит

$$y \in [-6; 6].$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5 (продолж.)

при $x = 0, 12$ $y \in [-6; 6]$

при $y = \pm 6$ $x \in [0; 12]$.

$$(|x| - 6)^2 + (|y| - 6)^2 = a$$

$(|x| - 6)^2 \in [0; 36]$, если $|x| - 6$ не ноль, тогда больше 2 решений, так как y может быть равен ± 6 и мы можем подставить 2 значения $x = 6 \pm k$, $k \in [0; 6]$.

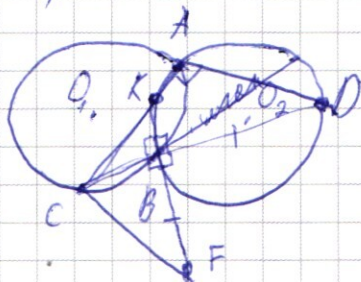
Значит $|x| - 6 = 0$, тогда $x = 6$, а $y = \pm 6$.

Итоговая сумма

от $a = 4$. При $a = 4$, другие значения x и y невозможны, так как ~~при любых~~ при любых других x $|x| - 6 > 0$, а при любых y $(|y| - 6)^2 \geq (|\pm 6| - 6)^2$.

Ответ: $a = 4$.

6 а)



Дано: $R = 13$, $\angle CAD = 90^\circ$

$BF = BD$, $BF \perp CD$

Найти CF - ?

Пусть M - пересечение дуг, CA и BF это K . Рассмотрим

$\triangle DBK$, так как $\angle KAD + \angle KBD = 180^\circ$, так как они вписаны, значит $\triangle DBK$ - равнобедренный, а так как A, D, B

лежат на окр 2, значит и К лежит на этой окружности.
 $\angle ACB = \angle APB$, потому что эти углы опираются
 на дуги равной длины в равных окружностях,
 $\angle AKB = 180 - \angle APB$, $\angle CKB = 180 - \angle AKB = \angle APB =$
 $= \angle ACB$, значит $\triangle CKB$ - равнобедренный, значит
 $CB = BK$. Также как $CB = BK$, и $BF = BD$, и $\angle CBF = \angle KBF$,
 значит $\triangle CBF = \triangle KBD$, поэтому $CF = KD$. $KD = 2R$ -
 потому что $\angle KAD = 90^\circ \Rightarrow KD$ - диаметр.
 $CF = KD = 2R = 26$.

4.

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Найдем пересечение

$$85 + (3^{81} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

при $x \leq 1$

$$85 + (3^{81} - 1)x < 0 ; 3^x + 4 \cdot 3^{81} > 0$$

при $x = 0$

$$85 < 1 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$x = 1$$

$$85 - 1 < 3 + 3 \cdot 3^{81}$$

$$x = 2$$

$$85 - 2 < 9 + 2 \cdot 3^{81}$$

$$x = 3$$

$$85 - 3 < 27 + 3^{81}$$

$$x = 4$$

$$85 - 4 \leq 81$$

$$x = 5$$

$$80 + 3^{81} > 3^5$$

у пр. $3^x + 4 \cdot 3^{81}$ и пр. $85 + (3^{81} - 1)x$ - 2 точки пересечения,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

р4 / продолж.

так как $ор\ 85 + (3^{81} - 1)/\pi$ - линейно возрастает, а
функция $3^x + 4 \cdot 3^{81}$ так же возрастает, но с
увеличивающейся скоростью возрастания

при $x = 85$

$$81 \cdot 3^{81} = 3^{85}$$

при $x = 86$

$$82 \cdot 3^{81} - 1 < 3^{86}, \text{ значит } x \in [5; 84].$$

~~Рассмотрим кал-во пар при~~

Представим кал-во пар как ^{сумма кал-в} сумму $\sum$ при каждом x

$$\begin{aligned} & 3^{81} + 80 - 3^5 + 2 \cdot 3^{81} + 49 - 3^6 + \dots + 80 \cdot 3^{81} + 1 - 3^{84} = \\ & = 3240 \cdot 3^{81} + 3240 - 3^5 - 3^6 - \dots - 3^{84} = 3240(3^{81} + 1) - 3^5(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{79}) \\ & = 3240(3^{81} + 1) - 3^5 \left(1 + \frac{3 \cdot (3^{78} - 1)}{2} \right) \\ \text{Ответ: } & 3240(3^{81} + 1) - \left(3^5 \left(1 + \frac{3 \cdot (3^{78} - 1)}{2} \right) \right) \end{aligned}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x-12 &= 12 & 12-2x &= 12 \\ x &= 12 & x &= 0 \end{aligned}$$

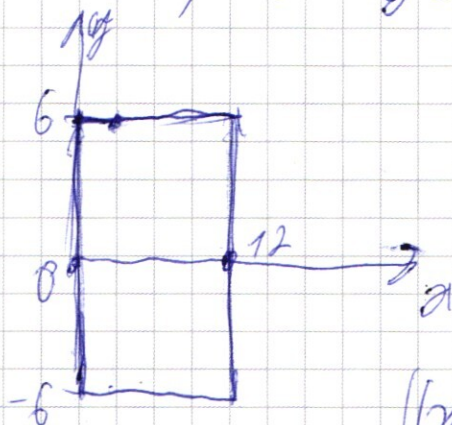
$$\begin{aligned} x^2 + 36 - 12|x| + y^2 + 64 - 16|y| &= a \\ x^2 + y^2 - 12|x| - 16|y| + 100 &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y &= 12 & -(|x| + |x-12|) \\ y &= \pm 6 & -|-y-y| + |-y+y| = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x| + |x-12| &= 12 & x=0 & x=12 \\ x &\in [0; 12] & x &\in [0; 12] \end{aligned}$$

$$y = \pm 6 \quad x \in [0; 12]$$

$$x = 0, 12 \quad y \in [-6; 6]$$



$$y = 6; -6$$

$$y^2 - 16y + 100 - a = 0$$

$$256 - 400 + 16a = -144 + 16a$$

$$\text{при } x \neq 36 \quad y = 4$$

$$(|x|-6)^2 \in [0; 36]$$

$$(|y|-8)^2 \in [4; 64]$$

$$36 (|y|-8)^2 = 4$$

$$a \in \{4\} = 4$$

$\frac{3 \cdot 3^{81} - 1}{2} = 12$
 $\frac{3 \cdot 3^{81} - 1}{2} = 12$
 $\frac{3 \cdot 3^{81} - 1}{2} = 12$

$\angle CAD = 90^\circ$
 $BD = BF$
 $(F - \dots)$
 $KD = 2r$
 $BC = 10$
 $\sum CF = \dots$
 $26^2 = 676 + \frac{26}{52} \dots$
 $\sqrt{546} = 24$
 $5 \cdot 34 = 170$

$1 + 9 + 9^2 + \dots + 9^{81} = \frac{9^{82} - 1}{9 - 1}$
 $9^4 - 9^1 = 81 - 9 = 72$
 $1 + 9 + 9^2 + \dots + 9^{81} = \frac{9^{82} - 1}{8}$

$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$
 $y < 85 + (3^{81} - 1)x$
 $85 + 3^{81} > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$
 $85 < 3 + 4 \cdot 3^{81}$
 $3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$

$e^{\ln a \cdot x} = a^x \cdot (\ln a)^x$
 $a^x \cdot \ln a$
 $3^x \cdot \ln 3$
 $\frac{(3^{81} - 1)x}{3^{81} - 1}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 16845 & 5 \\ 3375 & 5 \\ 645 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$16845 = 5^4 \cdot 3^3$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \cos 10x$$

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$$

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!} = 4 \quad 70 \cdot 4 = 280$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

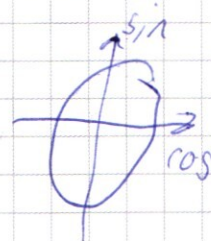
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2} \Rightarrow \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} \Rightarrow \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$



~~Мен~~

$e^{\ln x}$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^2}{y}\right)^{2 \cdot \log y} = (-x)^{\log(-xy)} \\ 2y^2 - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

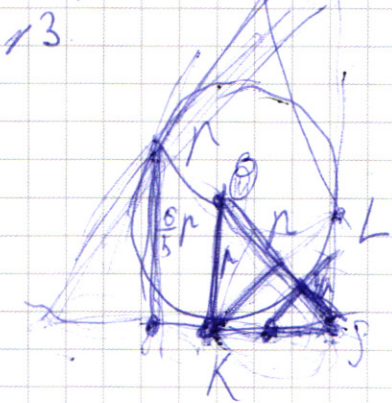
$$2y^2 + xy - y(x+4) - x(x+4)$$

$$y + y(xy + x) - (x+y)(x+4) = 0$$

$$y + (x+y)(y-x-4) = 0$$

$$y = (x+3)(x+4-y)$$

$$y = x^2 - 4x + 4(x+y)$$



$$6 \cos^2 L = 5$$

$$S = 6 \cos^2 \alpha = 6 - \sin^2 \alpha =$$

$$\frac{(2\sqrt{5}\cos x)^2}{2} = \frac{S}{2} = 6 - \frac{1}{25} = 5\frac{24}{25}, 5,96$$

$$25r^2 - n^2 = 24r^2$$

$2\sqrt{6} \text{ m}$

$$KJ = 2\sqrt{6}n$$

$$\frac{q_n}{G_n} = \frac{2}{3} SP$$

$$KS = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{1}{3}$$

$$\frac{h^2}{(h+2)^2} = \frac{16}{81} \cdot \frac{4}{9}$$

$$h = 4p \quad K = 4$$

$$gh^2 = 4h^2 + 16r^2 + 16hr$$

$$5h^2 = 76r^2 + 76hr$$

$$5\left(\frac{h}{n}\right)^2 - 16\frac{h}{n} - 16 = 0$$

$$5k^2 - 76k - 76 = 0$$

$$D = 256 + 320 = 576$$

$$k = \frac{46 + 24}{70} = 4$$

$$\frac{h}{n} = k$$

$$\sqrt{576} = 2^3 \cdot 3 = 24$$

$$\begin{array}{r} 576 \overline{) 2288} \\ \underline{288} \\ 144 \\ \underline{144} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$