

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р.
Работы без вложенного задания не проверяются.

✓ 1. ~~[3 балла]~~ Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

✓ 2. ~~[5 баллов]~~ Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

✓ 3. ~~[5 баллов]~~ Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

✓ 5. ~~[5 баллов]~~ Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

✓ 6. ~~[6 баллов]~~ а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

✓ 7. ~~[6 баллов]~~ Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2) $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$

$$\frac{\cos 11x - \cos 3x}{2} - \frac{\sin 11x + \sin 3x}{2} = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x + \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$-2 \sin \frac{11x + 3x}{2} \sin \frac{11x - 3x}{2} - 2 \sin \frac{11x + 3x}{2} \cos \frac{11x - 3x}{2} = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 4x \sin 7x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos (2 \cdot 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cdot (\cos^2 7x - \sin^2 7x) \quad | : (-\sqrt{2})$$

$$\sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \cos^2 7x - \sin^2 7x$$

$$\sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = (\sin 7x - \cos 7x)(\sin 7x + \cos 7x)$$

$$(\sin 7x + \cos 7x)(\sqrt{2} \sin 4x - \sin 7x + \cos 7x) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin (7x + \frac{\pi}{4}) \cdot (\sqrt{2} \sin 4x - (\sin 7x - \cos 7x)) = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\sin (7x + \frac{\pi}{4}) \cdot (\sqrt{2} \sin 4x - \sqrt{2} \sin (7x - \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\begin{cases} \sin (7x + \frac{\pi}{4}) = 0 & (1) \\ \sqrt{2} \sin 4x - \sqrt{2} \sin (7x - \frac{\pi}{4}) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\sqrt{2} \sin 4x - \sqrt{2} \sin (7x - \frac{\pi}{4}) = 0 \quad (2)$$

Заметим, что

$$\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \sin (\alpha \pm \frac{\pi}{4})$$

и тогда:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin (\alpha \pm \frac{\pi}{4}) &= \\ &= \sqrt{2} (\sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{4} \pm \cos \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{4}) \\ &= \sqrt{2} (\sin \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \cos \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ &= \sin \alpha \pm \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\sin 7x + \cos 7x = \sqrt{2} \sin (7x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin 7x - \cos 7x = \sqrt{2} \sin (7x - \frac{\pi}{4})$$

$$1) \quad 7x + \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \pi \cdot \frac{n}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \quad \sqrt{2} (\sin 4x - \sin (7x - \frac{\pi}{4})) = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\sin 4x - \sin (7x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2 \sin \frac{4x - 7x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{4x + 7x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \quad | : 2$$

$$\sin \frac{-3x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\sin (\frac{-3x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\cos (-\frac{\pi}{8} + \frac{11x}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{8} + \frac{11x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi l}{11}, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3 \cdot 8} - \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2 \cdot 5\pi}{3 \cdot 11} - \frac{2\pi l}{11}, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi l}{11}, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$

6) а) Дано:

окр. ω_1, ω_2
 $r_1 = r_2 = 5$

ω_1 и ω_2 пересекаются в т. А и т. В

$C \in \omega_2$

$D \in \omega_1$

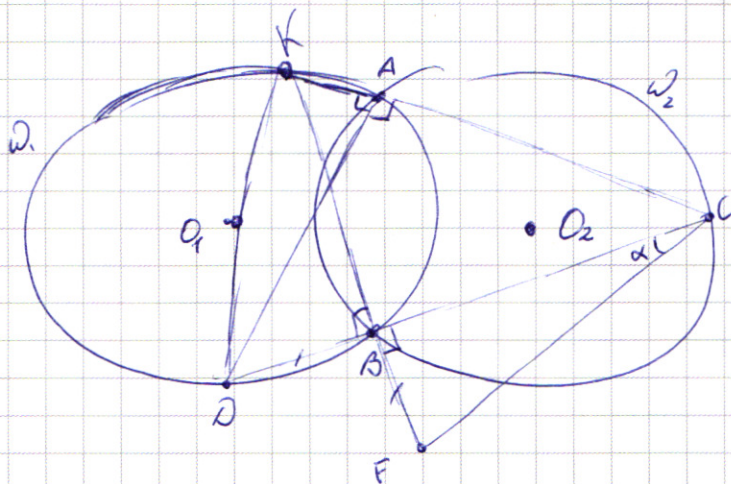
$\angle CAD = 90^\circ$

$B \in CD$

$BF \perp CD, BF = BD$

А и F — разл. стороны от CD

CF = ?



Решение:

1) Продолжим BF за т. В до перес. с окр. ω_1 в т. К.

$\angle DBK = 90^\circ$ (т.к. $BF \perp CD$) $\Rightarrow \angle DBK$ опирается на диаметр $\Rightarrow DK$ — диаметр
 $DK = 2r = 2 \cdot 5 = 10$

2) $\angle KAD$ опирается на KD , т.е. на диаметр $\Rightarrow \angle KAD = 90^\circ$

3) $\angle KAC = \angle CAD = 90^\circ$

$\angle KAC + \angle CAD = 180^\circ \Rightarrow$ точки К, А, С лежат на одной прямой, А между К и С. $A \in KC$

4) $\angle ADB$ опирается на дугу АВ в окр. ω_1
 $\angle ACB$ опирается на дугу АВ в окр. ω_2 | т.к. окр. ω_1 и ω_2 имеют
 одинак. радиус, то
 они равны

5) $\triangle ADC$: $\angle CAD + \angle ADB + \angle ACB = 180^\circ$
 90°

$\angle ADB + \angle ACB = 90^\circ$

но $\angle ADB = \angle ACB$

$\angle ADB = \angle ACB = 45^\circ$

градусная мера дуги АВ
 в обоих окр. одинаковая

$\angle ADB = \angle ACB$

$\triangle ADC$ — равнобедр. и прямоуг.
 $(AD = AC)$

6) $\triangle KBC$:

$\angle KBC = 90^\circ$ (т.к. $BF \perp CD$)

$\angle KCB + \angle BKC = 90^\circ$

$\angle BKC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow \triangle KBC$ прямоуг. и равнобедр.

$KB = BC$

7) Ищем: $\angle KBD = \angle CBF$ (вертик.) $= 90^\circ$
 $BD = BF$ (гип.)
 $KB = BC$

$\Rightarrow \triangle KBD = \triangle CBF$ по Гипотенуз.

$CF = KD = 10$ (KD — диаметр)

Ответ: CF = 10

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑥ продолжение:

8) В добавок к укл. из п. а) : $BC=6$ $S_{ACF}=?$

8) $\triangle BCF$: по теореме Пифагора: $BF^2 = CF^2 - BC^2$ ($CF=10$ (из п. а))
 $BC=6$

$$BF^2 = 100 - 36 = 64$$

$$BF = 8$$

$$DB = BF = 8$$

9) $\triangle BCF$: $\angle BCF = \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{BF}{CF} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{BC}{CF} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$10) CD = DB + BC = 8 + 6 = 14$$

11) в прямоугол. $\triangle ADC$ по теореме Пифагора:

$$AD^2 + AC^2 = CD^2 = 14^2 \quad | AD = AC \text{ (из пункта а)}$$

$$2AD^2 = 14^2$$

$$AD = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2} = AC$$

$$12) S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF \quad | \angle ACF = \angle ACB + \angle BCF = 45^\circ + \alpha$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \sin(45^\circ + \alpha) = 5 \cdot 7\sqrt{2} \cdot (\sin 45^\circ \cos \alpha + \cos 45^\circ \sin \alpha)$$

$$= 35\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{5} \right) = 35\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) = 35 \cdot \frac{7}{5} = 7 \cdot 7 = 49$$

Ответ: $S_{ACF} = 49$

① $3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 9 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ (произведение из 1-знач. чисел (единиц)
столько раз, сколько можно)
3 · 3 = 9 > 3
3 · 3 = 9 > 3
5 · 5 = 25 > 5

Нужно составить 8-ми знач. число $\Rightarrow$ добавим еще 2 нуля
единицы

Тогда искомое число составлено из следующих цифр:

1) 11333555

2) 11139555

1) 11333555

Самая первая цифра 1, то как во втором раскладе 333555

Кон-во способ составлено из тех 8-ми знач. число —
перестановка цифр

$$N = \frac{8!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 3!}$$

1 — одна цифра
2! — две цифр
3! — три цифр

$$N_1 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$$

$$2) 11139555$$

$$N_2 = \frac{8!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 цифра 1 цифра 3 цифра 5 цифра 8

~~240~~
240+40

Всего способов $N = N_1 + N_2 = 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 8 \cdot 5 \cdot 7 (6 + 4) = 8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 10 = 80 \cdot 35 = 2800$

Ответ: ~~28~~ максимум чисел 2800 штук

~~(5) $|y-3-x| + |y-3+x| = 6$ (1)~~

~~$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9$~~

~~(1) $|y-3-x| + |y-3+x| = 6$ Возм: $\pm x$~~

~~$y-3 \geq 0 \Rightarrow y \geq 3$~~

(3) $\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$ (1)

$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$ (1)

ОДЗ: $x > 0$
 $y > 0$

1) $(x^2 - 2xy + y^2 - y^2) - 4x - 3y^2 + 12y = 0$

$(x-y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$

$(x-y-2y)(x-y+2y) - 4(x-3y) = 0$

$(x-3y)(x+y) - 4(x-3y) = 0$

$(x-3y)(x+y-4) = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = 3y \\ x = -y + 4 \end{cases}$

Если $x = 3y$, то: $\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg(3y)} = y^{2 \lg(3y)}$

$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg(3y)} = y^{2 \lg 3y + 2 \lg y} \quad | : y^{2 \lg 3y} \neq 0$

$\left(\frac{y^4}{3y^2}\right)^{\lg(3y)} = y^{2 \lg y}$

$\left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg(3y)} = y^{2 \lg y}$

$\left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg y} \cdot \left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg 3} = y^{2 \lg y} \quad | : y^{2 \lg y}$

$\left(\frac{y^2}{3y^2}\right)^{\lg y} \cdot \left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg 3} = 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) продолжение:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg y} \cdot \left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg 3} = 1$$

$$\frac{y^{2\lg 3}}{3^{\lg y + \lg 3}} = 1$$

$$y^{2\lg 3} = 3^{\lg 3y}$$

Заметим, что $y=3$ - корень: $3^{2\lg 3} = 3^{\lg 9}$.

$y^{2\lg 3}$ - монотонно убывает при $y \in (0; +\infty)$, т.к. $2\lg 3 < 1$:

$3^{\lg 3y}$ - монотонно возрастает

↑
общая точка $y=3$

$$x = 3 \cdot 3 = 9$$

$(9; 3)$ - решение.

$$\left. \begin{aligned} \lg 3 < \frac{1}{2} \\ 10^{\lg 3} < 10^{\frac{1}{2}} \\ 3 < \sqrt{10} \\ 9 < 10 \end{aligned} \right\}$$

Если $x = -y + 4$, то

$$\left(\frac{y^5}{-y+4}\right)^{\lg(-y+4)} = y^{2\lg(-y+4) \cdot y} = y^{2\lg(-y+4) + 2\lg y}$$

$$\left(\frac{y^5}{y^2(-y+4)}\right)^{\lg(-y+4)} = y^{2\lg y}$$

$$\left(\frac{y^3}{-y+4}\right)^{\lg(-y+4)} = y^{2\lg y}$$

$$\frac{y^{3\lg(-y+4)}}{(-y+4)^{\lg(-y+4)}} = y^{2\lg y} \quad | : y^{2\lg y}$$

$$\frac{y^{3\lg(-y+4) - 2\lg y + \lg(-y+4)}}{(-y+4)^{\lg(-y+4)}} = 1$$

$$(-y+4)^{\lg(-y+4)}$$

$$y^{2\lg \frac{-y+4}{y}} + \lg(-y+4) = (-y+4)^{\lg(-y+4)}$$

$$y^{\lg \frac{(-y+4)^2}{y}} + \lg(-y+4) = (-y+4)^{\lg(-y+4)}$$

$$y^{\lg \frac{(-y+4)^2}{y}} = (-y+4)^{\lg(-y+4)}$$

корней нет $\Rightarrow$ единственный корень
исполнен: $(9; 3)$

Ответ: $(9; 3)$

$$\textcircled{5} \begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

1) Пусть $a = y-3$, тогда: $|a-x| + |a+x| = 6$
 $|x-a| + |x+a| = 6$

Пусть: ~~$x = \pm a$~~

• $x \in (-\infty; -a)$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ &-x+a - x - a = 6 \\ &-2x = 6 \\ &x = -3 \end{aligned}$$

• $x \in \text{---} [-a; a] \Rightarrow -x+a + x+a = 6$
 $2a = 6$
 $a = 3$

• $x \in [a; +\infty) \Rightarrow x-a + x+a = 6$
 $2x = 6$
 $x = 3$

Т.е.: 1. $x < -y+3 \Rightarrow x = -3$

$$\begin{aligned} &-3 < -y+3 \\ &y < 6 \end{aligned} \Rightarrow x = -3$$

2. ~~x~~ $-y-3 = 3$
 $y = 6 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\text{---} |3-x| + |3+x| = 6 \\ &\hookrightarrow |x-3| + |x+3| = 6 \end{aligned}$$

• $-x+3 - x - 3 = 6$
 $x = -3$ — негр.

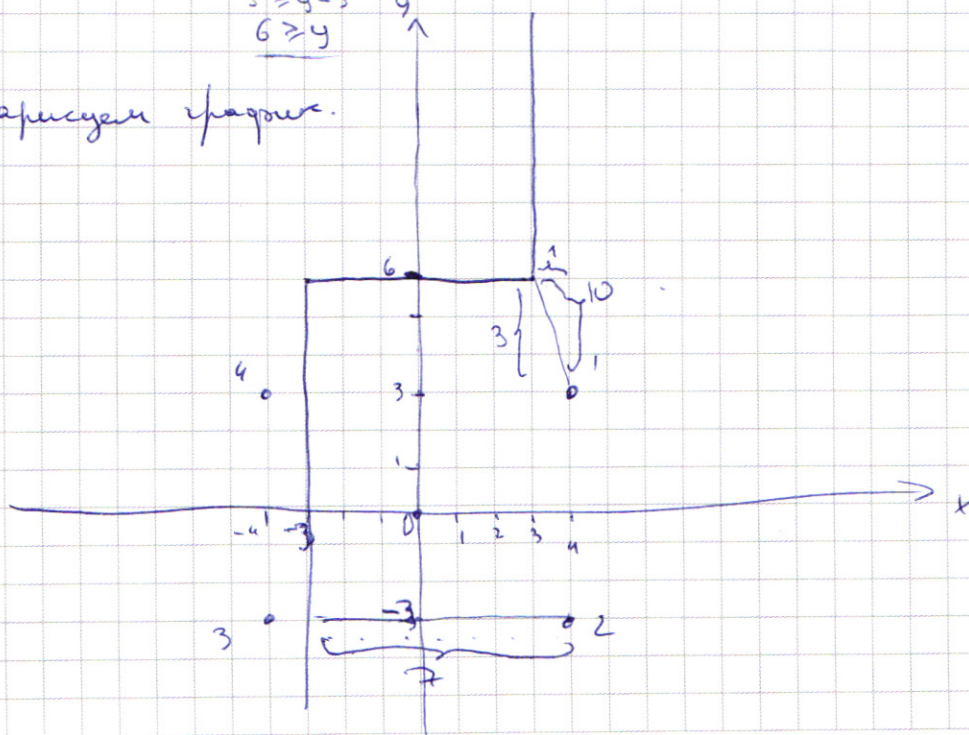
• $-x+3 + x+3 = 6$
 $x \in [-3; 3]$

$\Rightarrow x \in [-3; 3]$

• $x-3 + x+3 = 6$
 $x = 3$ — негр.

3. $x \geq y-3 \Rightarrow x = 3$
 $3 \geq y-3$
 $6 \geq y$

Нарисуем график.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑤ продолжение:

Второе ур-е — без модулей — окр. с центром в $x=4$
 $y=3$

$a=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 4 \\ y=\pm 3 \end{cases}$ — не удовл. первому ур-ю

$a < 0 \Rightarrow x, y \in \emptyset$

$a > 0$: пока $a^2 < 3$ (расст. от центра окр. до ОХ)

это 4 окр. с центрами в $(4; 3) - 1$

$(4; -3) - 2$

$(-4; 3) - 4$

$(-4; -3) - 3$

по числу
на графике

Расст. от 4 и 3 до графика равно единице (это при $x=7$)

Если $\text{радиус окр.} > 1$, то будет минимум 4 окр.

радиус окр. < 1 , то корней не будет

радиус окр. $= 1$, то две окр. с центрами

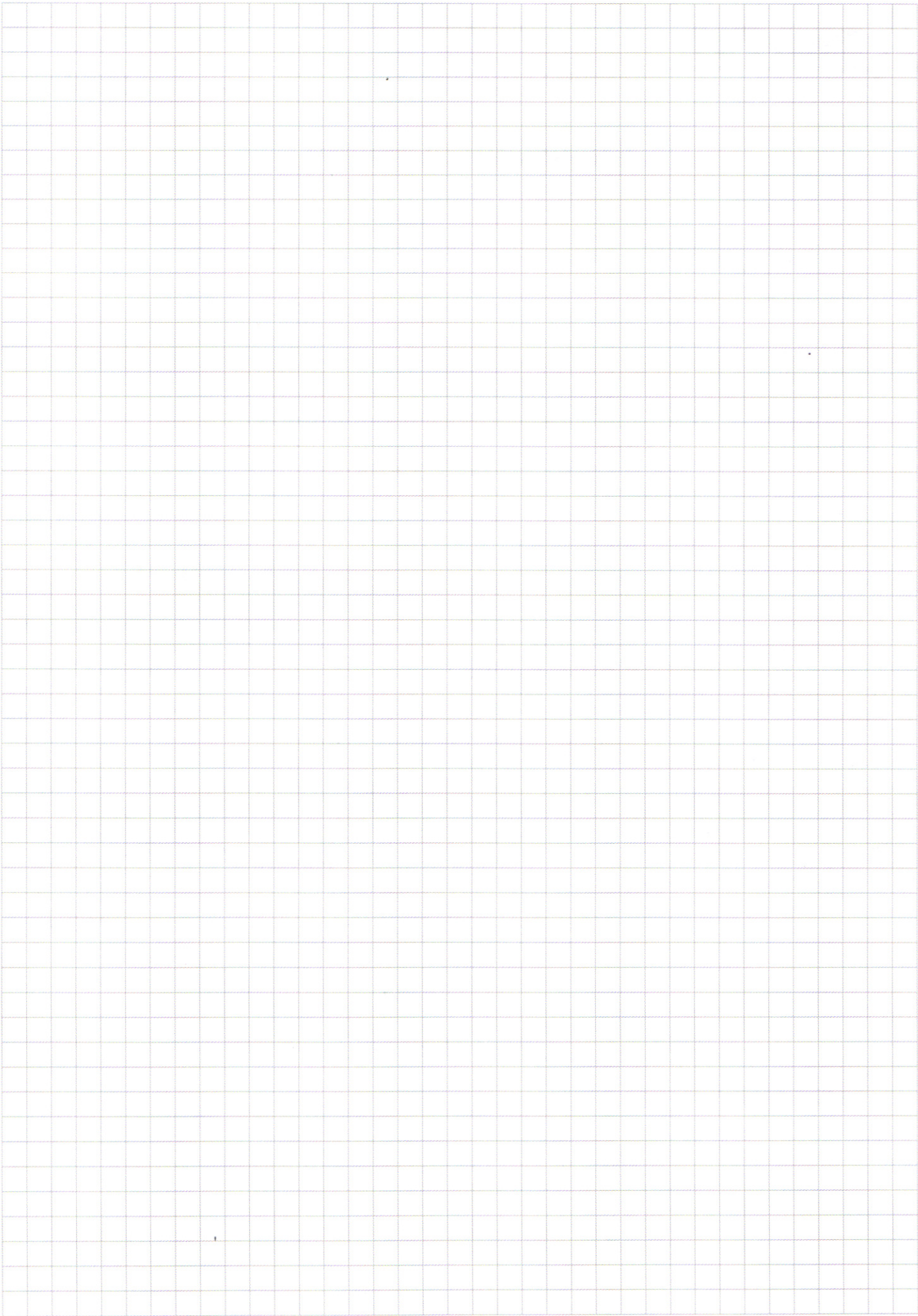
в п.3 и п.4 будут касаться
графика, а в п.1 и п.2

не будут (расстояние до графика
равно $\sqrt{10}$ и 7
соответственно)

2 корня

$$a = r^2 = 1^2 = 1$$

Отв. при $a=1$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta \\ -\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) &= 2\sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) &= 2\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$



$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\alpha - \beta = 11^\circ$$

$$\alpha + \beta = 3^\circ$$

$$2\alpha = 14^\circ$$

$$\alpha = 7^\circ \Rightarrow \beta = -4^\circ$$

$$-2\sin 7^\circ \sin 4^\circ$$

$$= -2(\sin 7^\circ \sin 4^\circ)$$

$$= -(2\sin 7^\circ \sin 4^\circ) = -(\cos(7^\circ - 4^\circ) - \cos(7^\circ + 4^\circ)) =$$

$$= -\cos 3^\circ + \cos 11^\circ = \cos 11^\circ - \cos 3^\circ$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\beta-\alpha)$$

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin 11^\circ - \sin 3^\circ = 2\sin\alpha\cos\beta$$

$$11^\circ = \alpha + \beta$$

$$3^\circ = \beta - \alpha$$

$$\Rightarrow 2\beta = 14^\circ$$

$$\beta = 7^\circ \Rightarrow \alpha = 4^\circ$$

$$\sin 11^\circ - \sin 3^\circ = 2\sin 4^\circ \cos 7^\circ$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow \sin\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2} =$$

$$= \sin\alpha + \sin\beta$$

$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\alpha-\beta+\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta-\alpha+\beta}{2} =$$

$$= \sin\alpha + \sin\beta$$



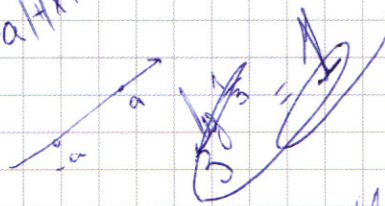
5

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$$

$$|a-x| + |a+x| = 6$$

$$|x-a| + |x+a| = 6 \quad 2 \text{ решения, } a = ?$$



lg 3

$$|y-x-3| + |x+y-3| = 6$$

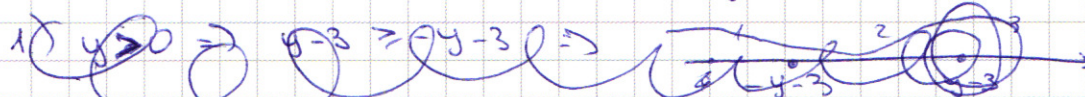
$$|x-y+3| + |x+y-3| = 6$$

$$|x-(y-3)| + |x+(y-3)| = 6$$

пусть: $x = y-3$ $x = -y+3$

$$y-3 \vee -y+3$$

$$|y| + |y-6| = 6$$



$$1) y > 3 \Rightarrow y-3 > -y+3$$

$$y-3 > -y+3$$

$$-x + (y-3) - x - (y-3) = 6$$

$$-2x = 6$$

$$x = -3$$

$$-x + (y-3) + x + (y-3) = 6$$

$$2y-6 = 6$$

$$y = 6$$

$$-3: 2x = 6$$

$$x = 3$$

$$2) y = 3 \Rightarrow |x| + |x| = 6$$

$$|x| = 3$$

$$x = \pm 3$$

$$3) y < 3 \Rightarrow y-3 < -y+3$$

$$-x + (y-3) - x - (y-3) = 6$$

$$-2x = 6$$

$$x = -3$$

$$2: x - (y-3) - x - (y-3) = 6$$

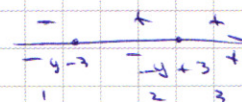
$$-2(y-3) = 6$$

$$y-3 = -3$$

$$3: x - (y-3) + x + (y-3) = 6$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

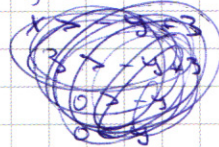


$$x > -y+3$$

$$3 > -y+3$$

$$0 > -y$$

$$y < 0$$



$$2^x + 2^y \leq 2^0 + 2^6 \quad 2^x + 2^y \leq 2^6$$

$$2^x + 2^y \leq 2^6$$

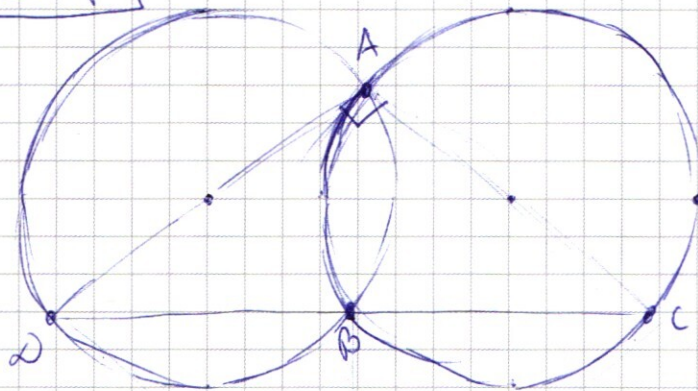
$$\left(\frac{x}{3^5}\right)^{\lg x} = \left(\frac{x}{3}\right)^{\lg x - 2 \lg 3}$$

$$y = \frac{x}{3}$$

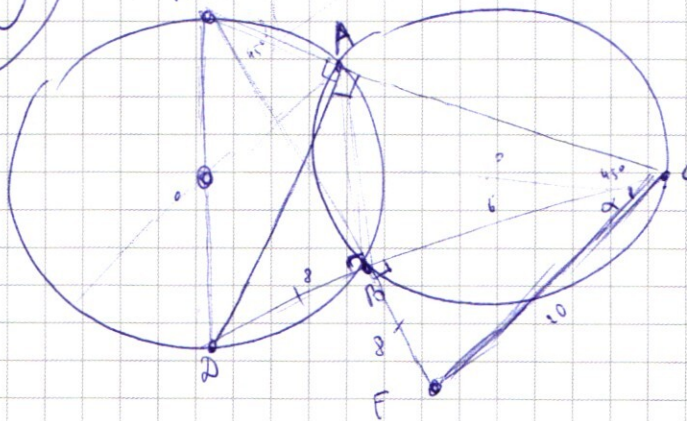
$$\left(\frac{x}{3^5 x}\right)^{\lg x} = \left(\frac{x}{3}\right)^{2 \lg x \cdot \frac{x}{3}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6 номер



(10)



~~2 m, 2 m~~

$$14^2 = 2x^2$$

$$x = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$$

$$AD = AC = 7\sqrt{2}$$

$$S_{ACE} = 7\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(45^\circ + \alpha)$$

$$\frac{10}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$$

$$BD = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

$$CF^2 = BC^2 + BD^2 = \frac{100}{2} + \frac{100}{2} = 100$$

$$CF = 10$$

РР

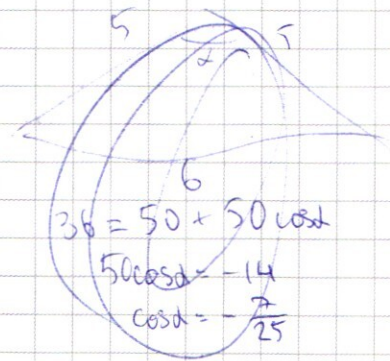
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 100 \\ a + b = x \end{cases}$$

$$(a+b)^2 = 100 + 2ab$$

$$x^2 = 100 + 2ab$$

$$10^2 = d^2 + 2(CB \cdot BD)$$

$$CB^2 + BD^2 = d^2$$



$$36 = 50 + 50 \cos \alpha$$

$$50 \cos \alpha = -14$$

$$\cos \alpha = -\frac{7}{25}$$

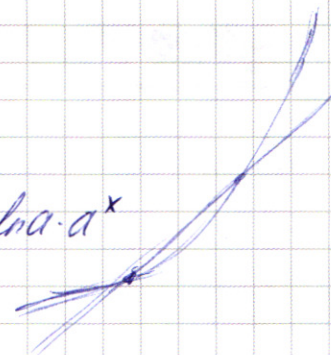
$$(3) \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 6 \cdot 2^{64} < 70 + 2^{64}x - x$$

$$2^x + (6-x)2^{64} - 70 + x < 0$$

$$f(x) = 2^x - (x-6)2^{64} + x - 70 < 0$$

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$$



$$f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x - 2^{64} + 1 = 2^x \cdot \ln 2 - (2^{64} - 1) \quad \vee 0$$

$$2^x \ln 2 = 2^{64} - 1$$

$$2^x = \frac{2^{64} - 1}{\ln 2}$$

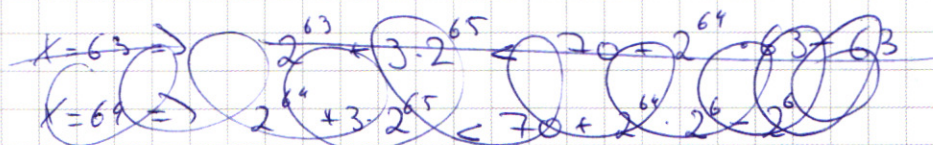
$$x = \log_2 \frac{2^{64} - 1}{\ln 2} = \log_2(2^{64} - 1) - \log_2(\ln 2) \approx 63.41$$

$$x = 63.41$$

$$x \in (-\infty, 63) \rightarrow \downarrow$$

$$x \in (63, +\infty) \rightarrow \uparrow$$

2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6



69

$$x=1 \Rightarrow \begin{cases} y > 2 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 2^{64} - 1 \end{cases}$$

$$2 + 3 \cdot 2^{65} < 70 + 2^{64} - 1$$

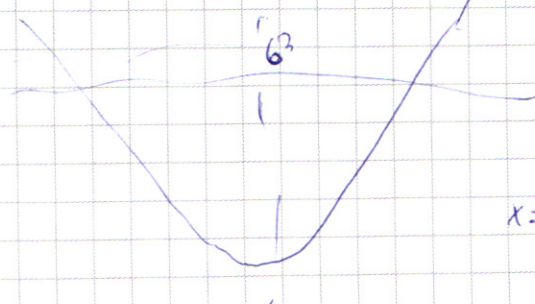
$$3 \cdot 2^{65} < 67 + 2^{64}$$

$$x=60 \Rightarrow \begin{cases} 2^{60} + 3 \cdot 2^{65} < 70 + 2^{64} \cdot 60 - 60 \\ 2^{60} + 2^{65} + 2^{66} < 70 + 2^{69} + 2^{64} \cdot 28 \end{cases}$$

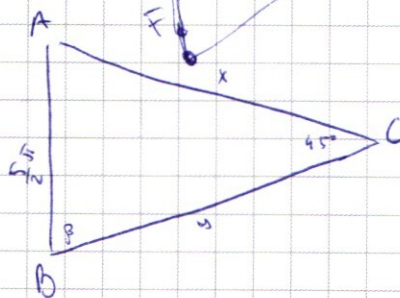
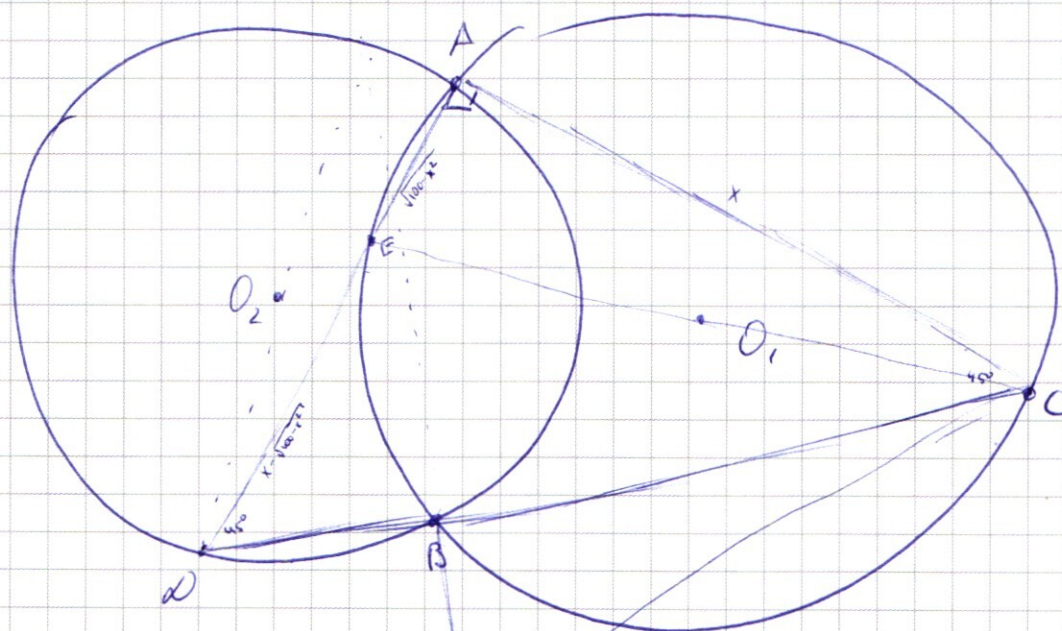
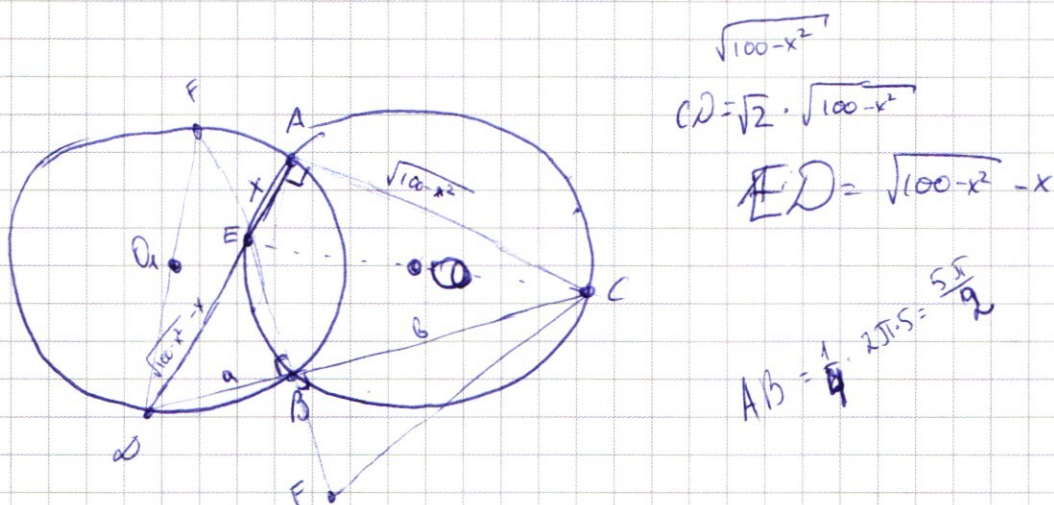
$$x=64 \Rightarrow \begin{cases} 2^{64} + 3 \cdot 2^{65} < 70 + 2^{64} \cdot 6 - 2^6 \\ 2^{64} + 6 \cdot 2^{64} < 70 + 2^{70} \\ 7 \cdot 2^{64} < 6 + 2^{70} \end{cases}$$

$$x=65 \Rightarrow \begin{cases} 2^{65} + 3 \cdot 2^{65} < 70 + 2^{64} \cdot 65 - 65 \\ 4 \cdot 2^{65} < 5 + 2^{64} \cdot 65 \\ 2^{67} < 5 + 2^{64} \cdot 65 = 2^6 \end{cases}$$

$$x=70 \Rightarrow \begin{cases} 2^{70} + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + 2^{64} \cdot 70 - 70 \\ 2^{70} + 3 \cdot 2^{65} \leq 2^{64} \cdot 70 \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2}} = \frac{x}{\sin \beta}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{x}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{x}{\frac{\sqrt{2} \sqrt{2}}{2}} = \frac{2x}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} x}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{2x^2}{25 \cdot 2}} =$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x=3y \\ x=-y+4 \end{cases}$$

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$$

$$\left(\frac{y^3}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg x + 2\lg y} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y}$$

$$\left(\frac{y^3}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg y}$$

$$\frac{y^{3\lg x - 2\lg y}}{x^{\lg x}} = 1$$

$$y^{3\lg x - 2\lg y} = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg x}$$

$$x=3y \Rightarrow y^{\lg 27y} = (3y)^{\lg(3y)} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{\lg 3y}$$

$$y^{\lg 27y - \lg 3y} = 3^{\lg 3y}$$

$$y^{\lg 3} = 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y}$$

$$\frac{y^{2\lg 3}}{3^{\lg 3}} = 3^{\lg y}$$

$$\left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg 3} = 3^{\lg y}$$

$$y^{3\lg(-y+4) - 2\lg y} = (-y+4)^{\lg(-y+4)}$$

$$y^{2\lg 3} = 3^{\lg 3 + \lg y}$$

$$2\lg 3 = \lg y + \lg 3$$

$$\lg x + 2(\lg x - \lg y) = \lg x + 2\lg \frac{x}{y} = \lg x + \lg \frac{x^2}{y^2} = \lg \frac{x^3}{y^2}$$

$$\lg 27y - \lg 3y = \lg \frac{27y}{3y} = \lg 9$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{\lg 10}} = -5 - \frac{1}{\lg 10}$$

$$\left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg 3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3} \cdot y^{2\lg 3}$$

Нр.: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3} \cdot 2\lg 3 \cdot y^{2\lg 3-1}$

Некоторые
график $(0; +\infty)$

$$(3^{\lg y})' = (3^{f(x)})' \cdot f'(x) = \ln 3 \cdot 3^{\lg y} \cdot \frac{1}{y}$$

$$(\lg 3y)' = 0$$

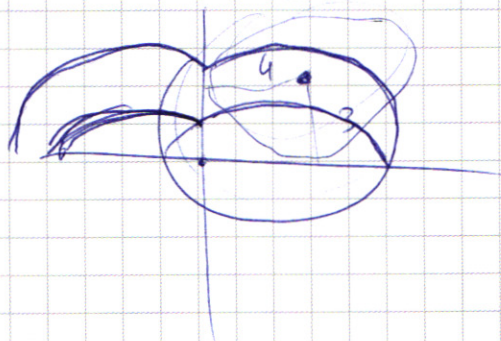
$$2^{60} + 2^{65} + 2^{66} < 10 + 2^{68} + 2^{64} \cdot 12 + 2^{69}$$

$$56 \quad 2^{56} + 3 \cdot 2^{65} < 70 + 2^{64} \cdot 56 - 56$$

$$2^{56} +$$

$$x = \pm 4$$

$$y = \pm 3$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

②

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

~~$$2 \sin 7x \cdot \sin 4x =$$~~

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x \quad | \cdot (-1)$$

$$2 \sin 7x \sin 4x + 2 \sin 4x \cos 7x + \sqrt{2} \cos 14x = 0$$

$$2 \sin 4x \sin 7x + 2 \sin 4x \cos 7x + \cos^2 7x - \sin^2 7x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) + (\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x) = 0$$

$$(\cos 7x + \sin 7x)(\sqrt{2} \sin 4x + \cos 7x - \sin 7x) = 0$$



$$\sqrt{2} \sin 4x + \cos 7x - \sin 7x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 4x - (\sin 7x - \cos 7x) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 4x - \sqrt{2} \sin(7x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sin 4x - \sin(7x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2 \sin \frac{4x + 7x - \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{4x - 7x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$



~~$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \\ &\quad + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= 2 \cos \alpha \cos \beta \end{aligned}$$~~

~~$$\cos \alpha - \cos \beta = 2$$~~

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

~~$$2 \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$~~

$$\cos 14x = \cos^2 7x - \sin^2 7x$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{y^3}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg(x y)} = y^{\lg x} \cdot y^{\lg x} \cdot y^{\lg y} \Rightarrow \left(\frac{y^3}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg y}$$

$$\frac{y^{3 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg y}$$

$$\frac{y^{2 \lg x - 2 \lg y}}{x^{\lg x}} = 1$$

$$y^{2 \lg x - 2 \lg y} = x^{\lg x}$$

$$y^{2 \lg \frac{x}{y}} = x^{\lg x}$$

$$\lg 3 = \lg 3$$

$$y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3 y} \cdot y^{\lg 3 y}$$

1) $x = 3y$

$$y^{2 \lg 3} = (3y)^{\lg(3y)} = 3^{\lg 3 y} \cdot y^{\lg 3 y}$$

$$y^{\lg 6 - \lg 3 y} = 3^{\lg 3 y}$$

$$y^{\lg \frac{2}{y}} = 3^{\lg(3y)} = 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y}$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg(3y)} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y^2 + 12y &= (x-y)^2 - 4y^2 - 4x + 12y = \\ &= (x-y-2y)(x-y+2y) - 4(x-3y) = \\ &= (x-3y)(x+y) - 4(x-3y) = (x-3y)(x+y-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y^2 + 12y &= (x-y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = (x-y-2y)(x-y+2y) - 4(x-3y) = \\ &= (x-3y)(x+y) - 4(x-3y) = (x-3y)(x+y-4) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 3y & (1) \\ x = -y + 4 & (2) \end{cases}$$

$$1) \left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg(3y)} = y^{2 \lg(3y)}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3 + \lg y} = y^{2 \lg 3 + 2 \lg y}$$

$$\lg(3y \cdot y) = \lg 3 + 2 \lg y$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg(3y)} = y^{2 \lg(3y)}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg(3y)} = y^{2 \lg(3y) + 2 \lg y} = y^{2 \lg(3y)} \cdot y^{\lg(3y)} \cdot y^{2 \lg y} \quad | : y^{\lg(3y)}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{\lg 3y} \cdot y^{2 \lg y} \quad | : y^{\lg(3y)}$$

$$\left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg(3y)} = y^{2 \lg y}$$

$$\left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg y} \cdot \left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg 3} = y^{\lg y} \cdot y^{\lg y}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg y} \cdot \left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg 3} = 1$$

$$\frac{(y^2)^{\lg 3}}{3^{\lg y} \cdot 3^{\lg 3}} = 1 \Leftrightarrow y^{2 \lg 3} = 3^{\lg(3y)}$$

$$\log_y 2 \log 3 = \log_y 3^{\lg(3y)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1)

Кодифик.: 1) 11333555
2) 11193555

3375 = 5
675 = 5
135 = 5
27 = 3
9 = 3
3 = 3
1

3375 | 5
30 | 675
32 |
25 |
135 | 5
10 | 27
35 |
35 | 0

675 | 5
5 | 135
12 |
15 |
25 |
25 | 0

11 333555

333555 11

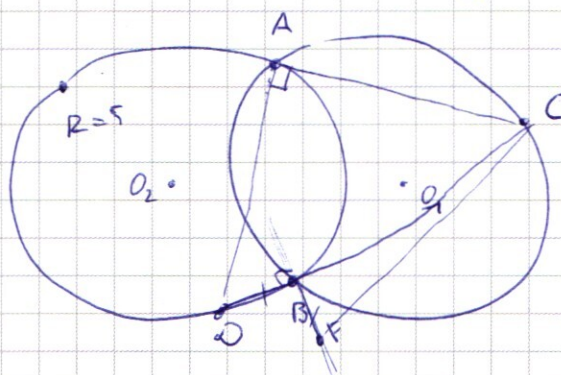
~~1~~ 1

125
x 22
875
250
3375

(6)

BF и CB - угл.
BD и CB - угл.

$CD = \sqrt{2} \cdot x$

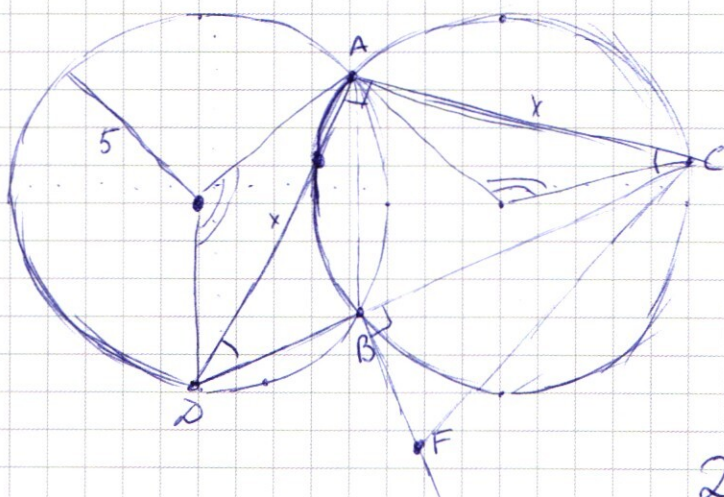


3355
3535
3553

3355

~~20~~

$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$



11 333

1

$\frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3} = 20$

1333555

333555

335355

2.2.2

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg x} = \underline{y^{\lg x}} \cdot \underline{y^{\lg x}} \cdot \underline{y^{\lg y}} \cdot \underline{y^{\lg y}}$$

$$\left(\frac{y^3}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg y}$$

~~$$\left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg y}$$~~

$$\frac{y^{2\lg 3y} - 2\lg y}{3^{\lg 3y}} = 1$$

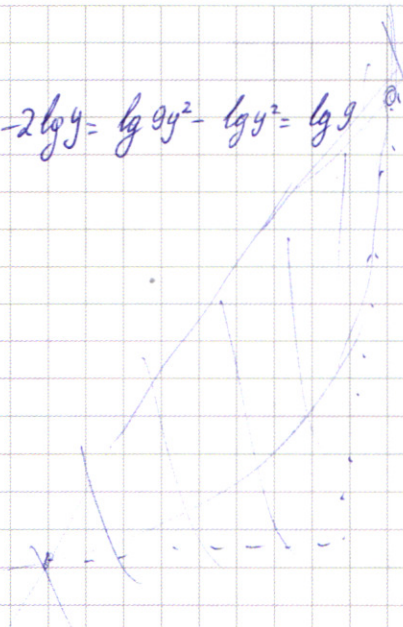
$$y^{\lg 9} = 3^{\lg 3y}$$

$$y^{2\lg 3} = 3^{\lg 3y}$$

$$2\lg 3 = \log_y 3^{\lg 3y}$$



$$2\lg 3y - 2\lg y = \lg 9y^2 - \lg y^2 = \lg 9$$



5

