МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

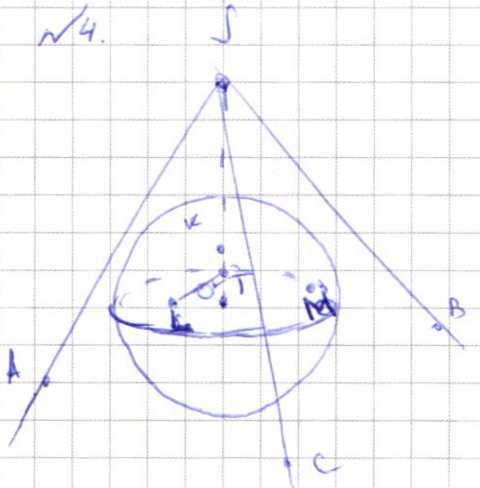
$3375 = 3^3 \cdot 5^3 \Rightarrow$ цифрами 8зн. числа могут быть

5; 5; 5; 3; 3; 3; 1; 1 или 9; 5; 5; 5; 3; 1; 1; 1

Тогда кол-во таких чисел $C_8^3 \cdot C_5^3 + C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 = 1680$.

Ответ: 1680.

№4.



$S_м = 1 \qquad S_б = 4.$

$\frac{S_м}{S_б} = \frac{(h_м)^2}{(h_б)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 2h_м = h_б$, где $h_м$ – расстояние от S до малого сечения, а $h_б$ – до большего.

$h_м = h_б - 2R \Rightarrow h_б = 4R \Rightarrow h_м = 2R \Rightarrow SO = 3R \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin\frac{1}{3}$, тк $OK \perp (SAB)$ и $OK = R$, аналогично с углами

$\angle LSO$ и $\angle MSO \Rightarrow SL = SK = SM = 2\sqrt{2}R \Rightarrow LT = MT = KT =$

$= 2\sqrt{2}R \sin\angle LST = \frac{2\sqrt{2}}{3}R \Rightarrow \cancel{\frac{S_м}{S_{нс}}} \quad ST = \sqrt{8 - \frac{8}{9}}R = \sqrt{\frac{64}{9}R^2} = \frac{8}{3}R \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{нужн.сеч.}}{S_м} = \frac{\frac{64}{9}R^2}{4R^2} = \frac{16}{9} \Rightarrow S_{нуж.сеч} = \frac{16}{9}$

№5.

$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$

$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 \geq 0 \Rightarrow a \geq 0.$

$|y-3-x| + |y-3+x| = 6.$

① $\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$

$y = 6. \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$

② $\begin{cases} y \geq x+3 \\ y < -x+3 \end{cases}$

$x = -3 \Rightarrow 0 \leq y < 6$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

③ $\begin{cases} y < x+3 \\ y > -x+3 \end{cases}$

$x = 3 \Rightarrow 0 < y < 6$

④ $\begin{cases} y < x+3 \\ y < -x+3 \end{cases}$

$3 \cdot y = 3$

$y = 0 \Rightarrow -3 < x < 3$

⑤ $y = x+3$

~~$y = 2x - 3$~~

$|2x| = 6$

$x = \pm 3$

$(3;6)$; $(-3;0)$

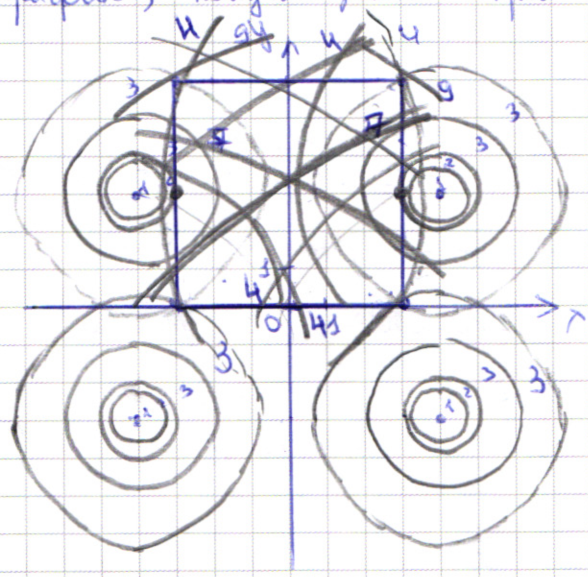
⑥ $y = -x+3$

$|-2x| = 6$

$x = \pm 3$

$(3;0)$; $(-3;6)$

~~Так~~ как 2ая функция без модулей представляла бы собой уравнение окружности с $r = \sqrt{a}$, но раз они есть, то ~~график~~ это ~~получится~~ график, получающийся при осевой симметрии отн. осей.



при 1) $a \in [0; 1)$ – корней нет

2) $a = 1$ – 2 корня $(3;3)$ $(-3;3)$

3) $a \in (1; \sqrt{10}]$ – 4 корня

~~4) $a \in (\sqrt{10}; \sqrt{58})$ – 8 корней~~

~~5) $a \in [\sqrt{58}; \sqrt{82}]$ – 4 корня~~

4) $a \in (\sqrt{10}; 7)$ – 8 корней ; $\sqrt{57}$

при $a = 5$ – 4 корня

5) $a = 7$ – 8 корней

6) $a \in (7; \sqrt{58}]$ – 6 корней

7) $a \in [\sqrt{58}; \sqrt{82}]$ – 4 корня ; $\sqrt{97}$

8) $a \in (\sqrt{82}; \sqrt{130})$ – 4 корня

$a = \sqrt{97}$ – 3 корня

9) $a = \sqrt{130}$ – 2 корня $(3;6)$; $(-3;6)$

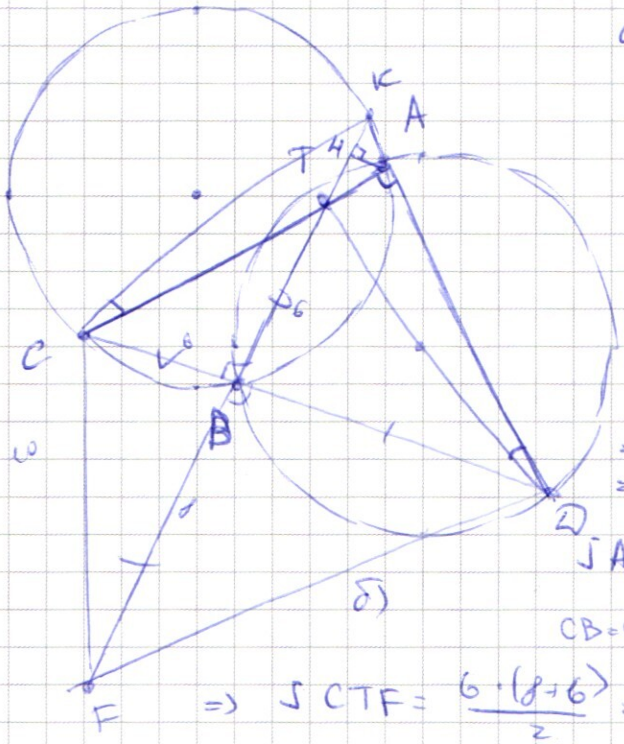
10) $a > \sqrt{130}$ – 0 корней.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.



а) Тк $\angle TAD = \angle TBD = 90^\circ$, то $TD = d = 10$ одной из 2х окр.; $\angle CBK = \angle CAK = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow CK = d = 10$

$\angle KCA = \smile KA = \angle KBA = \smile TA = \angle TDA \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CKA = \triangle DTA$ по гипот. и острому углу $\Rightarrow KA = AT \Rightarrow \angle AKT = \angle ATK = \angle CTB = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle TCB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow \triangle CBT$ – р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow CB = BT$; $BF = BD$; $\angle CBF = \angle TBD \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CBF = \triangle TBD \Rightarrow CF = TD = 10.$

$S\,ACF = S\,ATF + S\,CTF.$

б)

$CB = 6$; $CF = 10 \Rightarrow BF = 8$ по т. пифагора, $TB = BC = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow S\,CTF = \frac{6\cdot(8+6)}{2} = 42$; $BK = 8$ по т. Пифагора $\Rightarrow TK =$

$= BK - BT = 2 \Rightarrow TA = \sqrt{2}$ ($\sin 45^\circ \cdot TK = \sqrt{2}$) $\Rightarrow AH = TA \cdot \sin 45^\circ = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow S\,ATF = \frac{1\cdot 14}{2} = 7 \Rightarrow S\,ACF = 49$.

№2.

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\left(\cos 11x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)\right) - \left(\cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right)\right) = 2\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right)\right) =$

$= -2\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin 4x = \cos 14x$

$-\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$

$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin 4x\right) = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = \sin(4x - \pi)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\frac{3\pi}{4} + \pi n}{7},\ n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{4} - 7x = 4x - \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{или} \\ \frac{\pi}{4} - 7x = \pi - (4x - \pi) + 2\pi t,\ t \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7} \\ 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \\ 3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11} \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}. \end{array}\right.$$

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

ОДЗ: $x; y > 0$

$x^2 - 2x(y+2) - (3y^2 - 12y) = 0.$

$D_1 = y^2 + 4x + 4 + 3y^2 - 12y = 4(y-1)^2$

$x = 3y; \; 4-y.$

$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$

$3 = y^{4\lg 3y - 2\lg 3y^2}$

$y^{\lg 81y^4 - \lg 9y^4} = y^{\lg 9}.$

$y = \sqrt{10} \Rightarrow x = 3\sqrt{10}.$

$x = 4-y \Rightarrow x, y \in [0; 4]$

$y^{3\lg x - 2\lg y} = x^{\lg y}$

$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg y}.$

$f(x) = \frac{(4-y)^3}{y^2}.$

$f'(x) = \frac{-y^3 + 48y - 128}{y^3}$

$-y^3 + 48y - 128 = 0.$

$y = -4; 4; 8.$

$+ \quad -4 \quad + \quad 0 \quad - \quad 4 \quad + \quad y \Rightarrow$ на $y \in [0; 4)$

$f(x) \downarrow \Rightarrow y^{\lg\frac{(4-y)^3}{y^2}} \downarrow$, а $(4-y)^{\lg(4-y)} \uparrow \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1 корень $\quad x = 2; y = 2.$

Ответ: $(3\sqrt{10}; \sqrt{10})$; $(2; 2)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

3375	3
1125	3
375	3
125	5
	5
	5.

$3375 = 3^3 \cdot 5^3 \Rightarrow$ цифры данного 8-зн. числа

5; 5; 5; 3; 3; 3; 1; 1. или 9; 3; 5; 5; 5; 1; 1; 1

$C_8^3 \cdot C_5^3 + 8 \cdot 7 \cdot C_6^3 = 1680$

1120

$\frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$ 560

$C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$

$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2 =$

2. $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

1) $\cos(7x+4x) - \cos(7x-4x) = \cancel{\cos 7x \cos 4x} - \sin 7x \sin 4x - \cancel{\cos 7x \cos 4x} - \sin 7x \sin 4x =$

$= -2 \sin 7x \sin 4x$

$\sin(7x-4x) - \sin(7x+4x) = \cancel{\sin 7x} \cos 4x - \sin 4x \cos 7x - \cancel{\sin 7x \cos 4x} - \sin 4x \cos 7x =$

$= \cancel{2\sin 7x \cos 4x} - 2\cos 7x \sin 4x$

$-\sqrt{2} \sin 4x \ (\cos 7x + \sin 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$

$\cos 14x = \cos^2 7x - \sin^2 7x = (\cos 7x + \sin 7x) \cdot (\cos 7x - \sin 7x)$.

$(\cos 7x + \sin 7x)(\sin 7x - \cos 7x - \sqrt{2} \sin 4x) = 0$.

1) $\operatorname{tg} 7x = -1$

$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \ n \in Z$.

$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}$

2) $\sin 7x - \cos 7x = \sqrt{2} \sin 4x$.

$\sin 4x \cos 3x - \sin 3x \cos 4x - \cos 3x \cos 4x + \sin 3x \sin 4x$

$\sin 4x (\cos 3x + \sin 3x) - \cos 4x (\cos 3x + \sin 3x)$

$(\sin 4x - \cos 4x)(\cos 3x + \cos(\frac{\pi}{2} - 3x)) = (\ ) \cdot (\cos(3x - \frac{\pi}{4}) \cdot \cos\frac{\pi}{4}) \ 2$.

$(\sin 4x - \cos 4x) \cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \sin 4x$

$(1 - \operatorname{ctg} 4x) \cdot \cos(3x - \frac{\pi}{4}) = 1$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

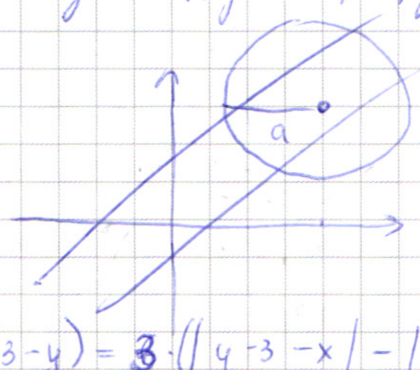
(Нумеровать только чистовики)

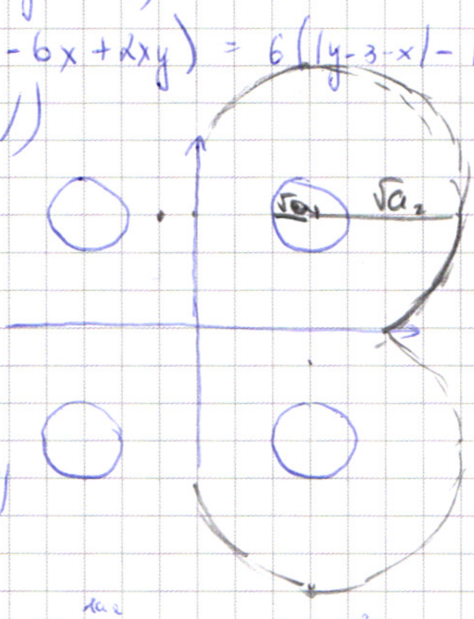
5. $\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x|=6 \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a \end{cases}$

$(y-3-x)^2-(y-3+x)^2 = 6(|y-3-x|-|y-3+x|)$

$\cancel{y^2}+\cancel{9}+\cancel{x^2}-\cancel{6y}+6x-2xy-(\cancel{y^2}+\cancel{9}+\cancel{x^2}-\cancel{6y}-6x+2xy) = 6(|y-3-x|-|y-3+x|)$

$12x-4xy = 6(|y-3-x|-|y-3+x|)$

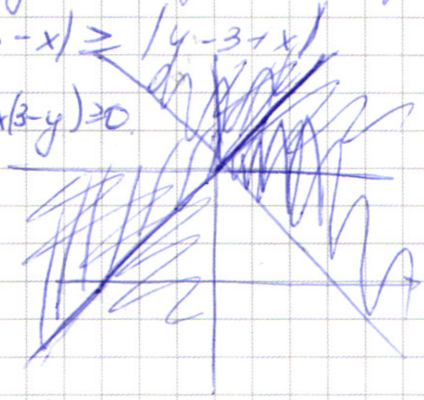




$2x(3-y) = 3(|y-3-x|-|y-3+x|)$

$|y-3-x| \geq |y-3+x|$

1) $4x(3-y) \geq 0$



1 a.z

$y-3-x \geq 0$
$y \geq x+3$

2 a.z

$y-3+x \geq 0$

$y \geq -x+3$

$\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$

$2x(3-y) = 3(-2x)$

$2x(y-3) = 6x$

$x(y-6) = 0$

$y = 6 \Rightarrow \begin{cases} 3 \geq x \\ 3 \geq -x \end{cases} \Rightarrow 3 \geq x \geq -3$

$x = 0 \Rightarrow y \geq 3$

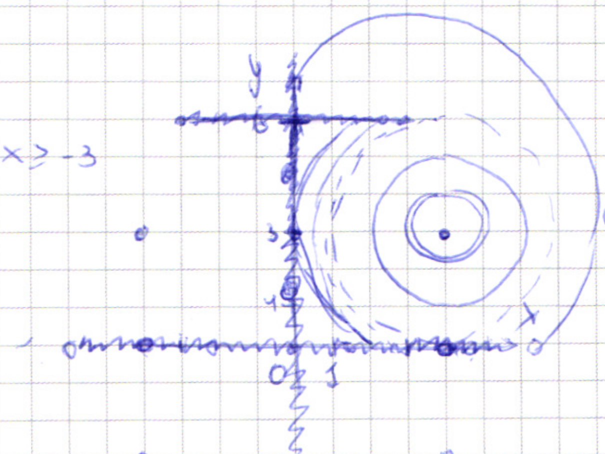
2) $\begin{cases} y < x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$

$x(3-y) = 3(y-3)$

$(x+3)(3-y) = 0$

$y = 3 \Rightarrow$ $x \geq 0$ и $-x \leq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$x = -3$ $y \geq 6$ $y < 0$ пк



a = 9 Vk

4 корня

6 корней

7 корней

8 корней

4 корня.

4) $\begin{cases} y < x+3 \\ y < -x+3 \end{cases}$

$x(3-y) = 3x$

$x \cdot (-y) = 0$

$x = 0 \Rightarrow y < 3$

$y = 0$ $-3 < x$

$x < 3$

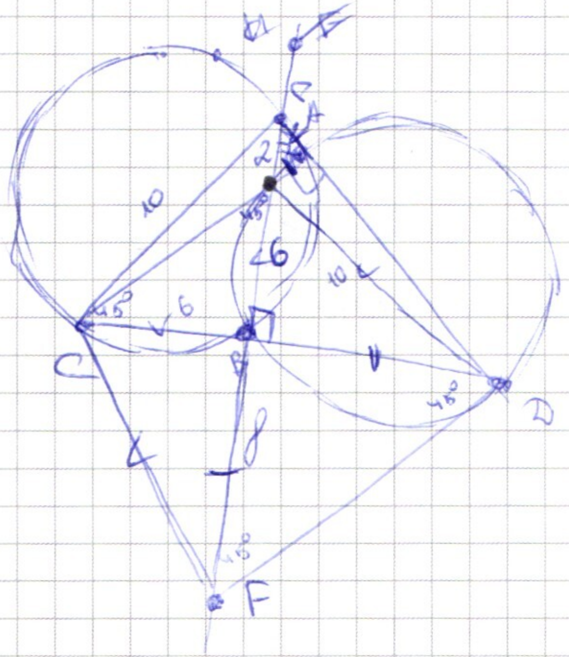
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

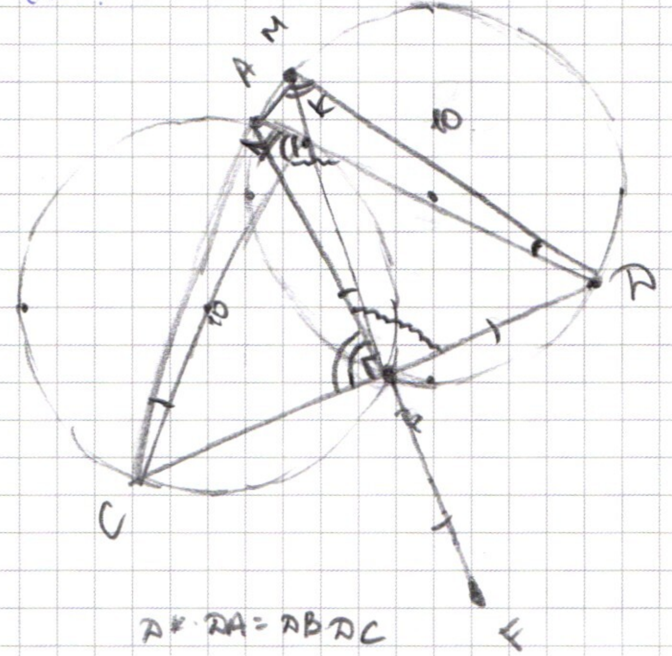
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



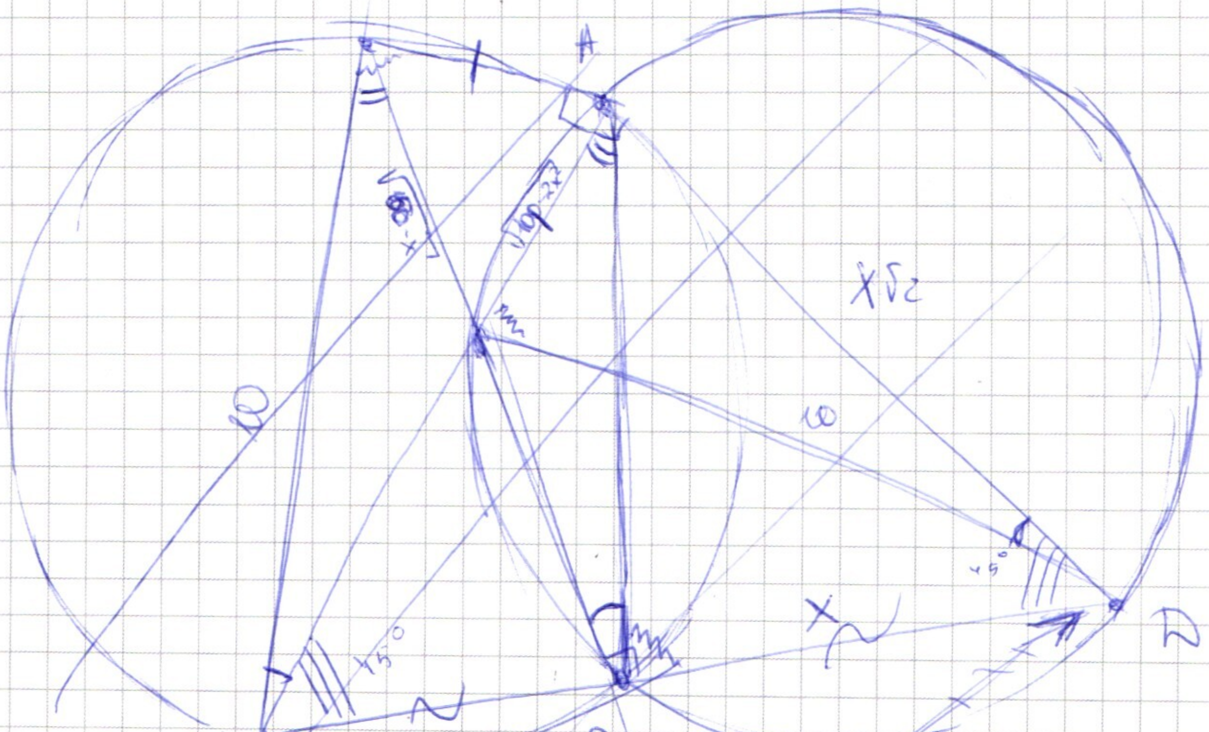
$BF = BD$

$CF - ?$

$CK = 10$



$DK \cdot DA = DB \cdot DC$



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

3. $\begin{cases} \cancel{y^{3\lg x} = y^{2\lg x}\cdot y^{2\lg y}\cdot x^{\lg x}} \\ \cancel{x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0} \end{cases}$ $\quad x;y>0$

$y^{3\lg x - 2\lg y} = x^{\lg x}$

$y^{\lg\left(\frac{x^3}{y^2}\right)} = x^{\lg x}$

$x^2 - x(2y+4) - 3y^2 + 12y = 0$

$D = (2y+4)^2 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = 16(y-1)^2$

$4y^2 + 16y + 16$

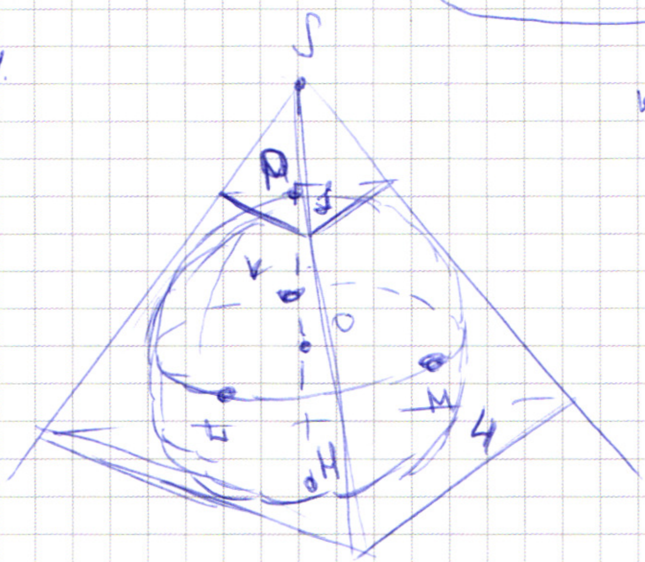
$x = \frac{2y+4 \pm 4(y-1)}{2}$

$\lg x = a \Rightarrow 10^a = x$

$x^a = t$

$(10^a)^a$

4.



$KO = KL = KM = R$

$2SP = SH = 4R \Rightarrow \sin \angle KJO = \frac{1}{3}$

$\angle KJO = \arcsin\frac{1}{3}$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}(\cos 11x\cos 3x - \sin 11x \sin 3x)$

$\cos 11x(1 - \sqrt{2}\cos 3x) - \sin 11x(1 - \sqrt{2}\sin 3x) - \cos 3x + \sin 3x$

$\cos 11x - \cos 3x - \sqrt{2}\cos 11x\cos 3x = \sin 11x - \sin 3x - \sqrt{2}\sin 11x \sin 3x$

$\cos 11x\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x\right) - \cos 3x\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 11x\right)$

$\left(\cos 11x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)\right) - \left(\cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right)\right) =$

$= 2\cdot\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) - 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right)\cdot\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) =$

$= 2\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)\left(\cancel{\cos 4x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 4x\frac{\sqrt{2}}{2}} - \ldots\right) = -2\sin 4x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-2\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin 4x = \cos 14x$

$-2 \quad // \quad = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$

$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\sin 4x + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)\right) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = y + 2 = 2(y-1)$

$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg x}$

① $x = y + 2 + 2y - 2$

$x = 3y$

$y^{\lg 27y} = (3y)^{\lg 3y}$

$y^{\lg 9} = 3$

$y^a = 3$

$a = \log_y 3$

$2\lg 3 = \log_y 3$

$y = \sqrt{10}$

$x = 3\sqrt{10}$

② $x = y + 2 - 2y + 2$

$x = -y + 4$

$y = 4 - x$

$(4-x)^{\lg \frac{x^3}{(4-x)^2}} = x^{\lg x}$

$y^{\lg \frac{(4-y)^3}{y^2}} = (4-y)^{\lg (4-y)}$

$(4-y)^3 = 64 - 48y + 12y^2 - y^3$

$f(y) = \frac{64}{y^2} - \frac{48}{y} + 12 - y$

$f'(y) = -\frac{128}{y^3} + \frac{48}{y^2} - 1$

$\frac{-y^3 + 48y - 128}{y^3}$

$y > 0$

$48y \geq y^3 + 128$

$y(y^2 - 48) \leq 0$

0 $\sqrt{48}$ y

нет.

$240 \cdot 148 \geq 216 + 128$

нет.

$240 \geq 125 + 128$

$192 \geq 192$

$$\begin{array}{l|l} -y^3 + 48y - 128 & y - 4 \\ -y^3 + 4y^2 & -y^2 - 4y + 32 \\ \quad -4y^2 + 48y & \\ \quad -4y^2 + 16y & \\ \qquad 32y - 128 & \end{array}$$

$D_1 = 36$

$y = 2 \pm 6$

$y = 8,\ -4.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$x+y=4.$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg(4-y)y}$$

~~x+y=a~~

$$\frac{y^{3\lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{2\lg y}.$$

$$y^{\lg\frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg x}$$

$\lg(4-y)=a.$

$$x^2 - x(2y+4) - (3y^2-12y) = 0.$$

$$D_1 = y^2+4y+4+3y^2-12y = 4(y^2-2y+1)$$

$$\frac{y^{3a}}{10^{a^2}} = y^{2\lg y}.$$

$$x = y+2 \pm 2(y-1).$$

$$y^{\lg\frac{(-y+4)^3}{y^2}} = (4-y)^{\lg(4-y)}.$$

$$8^{\log_2 8} = 512.$$

2^9

7. $\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$

$$70 + (2^{64}-1)x > 2^x + 3\cdot 2^{65}$$