

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x \quad \text{OD3: } x \in \mathbb{R}$$

~~$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 7x \sin 4x$$~~

~~$$\sin 3x - \sin 11x = -2 \sin 4x \cos 7x$$~~

$$\cos 11x - \sin 11x = \sqrt{2} \cos \left(11x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin 3x - \cos 3x = -\sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2} \cos \left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos \left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$$

$$11x + \frac{\pi}{4} = \alpha$$

$$3x + \frac{\pi}{4} = \beta$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = \cos \left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = \sin(\alpha + \beta)$$

$$-2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\sin \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 0$$

~~$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \left(\sin 4x + \cos \left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \right) = 0$$~~

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) = 0$$

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 0$$

$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(\frac{11x}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi n$$

$$\begin{cases} \frac{3x}{2} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n & n \in \mathbb{Z} \\ \frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11} \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

№3

$$\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

П.к. x и y пос. под знамен логарифма, то $x > 0$, аналогично $xy > 0$ и, значит $y > 0$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 + x(-2y - 4) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = (2y+4)^2 + 12y^2 - 48y = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = (4y-4)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{2y+4 \pm |4y-4|}{2}$$

~~П.к.~~ $x_{1,2} = \frac{2y+4 \pm (4y-4)}{2}$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = -y + 4 \end{cases}$$

Подставим $x = 3y$ в (1) ур-ие системы

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right) \lg 3y = y^2 \lg 3y^2$$

$$\lg(3y) \lg\left(\frac{y^4}{3}\right) = 2 \lg(3y^2) \lg y$$

$$\lg 3 + \lg y (\lg 3 + \lg y) (4 \lg y - \lg 3) = 2 \lg 3 + 4 \lg y \lg y$$

$$4 \lg 3 \lg y - \lg^2 3 + 4 \lg^2 y - \lg y \lg 3 = 2 \lg y \lg 3 + 4 \lg y^2$$

$$\lg 3 \lg y - \lg^2 3 = 0$$

$$\lg y = \lg 3$$

$$y = 3$$

$$\text{Тогда } x = 9$$

Проверка:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пп.к. $x = 3y$, и $x > 0, y > 0$, то во (2) ур-ие
и 3 (предположение)

Пп.к. $x = 3y$, то во (2) ур-ие эти значения подст.
не требуется. Для (1):

$$\left(\frac{3^5}{9}\right) \lg 9 = 3^2 \lg 27$$

$$27 \lg 9 = 9 \lg 27$$

Исходя из св-ва, что $a \lg b = b \lg a$, упрощаем,
что пара $(9, 3)$ - решение

Подставим $x = -y + 4$ в (1) ур-ие системы:

$$\left(\frac{y^5}{-y+4}\right) \lg(-y+4) = y^2 \lg(y(-y+4))$$

$$-y+4 = u$$

$$y^5 = \lg u (\lg y^5 - \lg u) = \lg(yu) \lg y^2$$

$$\lg u (5 \lg y - \lg u) = 2(\lg y + \lg u) \lg y$$

$$5 \lg u \lg y - \lg^2 u = 2 \lg^2 y + 2 \lg u \lg y$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg u \lg y + \lg^2 u = 0$$

$$(\lg y - \lg u)(\lg y - 0,5 \lg u) = 0$$

$$\begin{cases} y = -y+4 \\ y = \sqrt{-y+4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y^2 + y - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Проверка:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

(2) ур-ие системы задаёт четыре окр. с центрами в $(-4; -3)$; $(-4; 3)$; $(4; -3)$; $(4; 3)$ и радиусом $\sqrt{a}$

Если $\sqrt{a} < 1$, то решений нет

Если $\sqrt{a} = 1$, то 2 решения.

$$A_4 K = \sqrt{49 + 9} = 58$$

При $\sqrt{a} \leq 58$ имеем больше 2 решений (т.к.

каждая из окр. с центр. A_2 и A_4 пересекает ст 2 до 3 решения

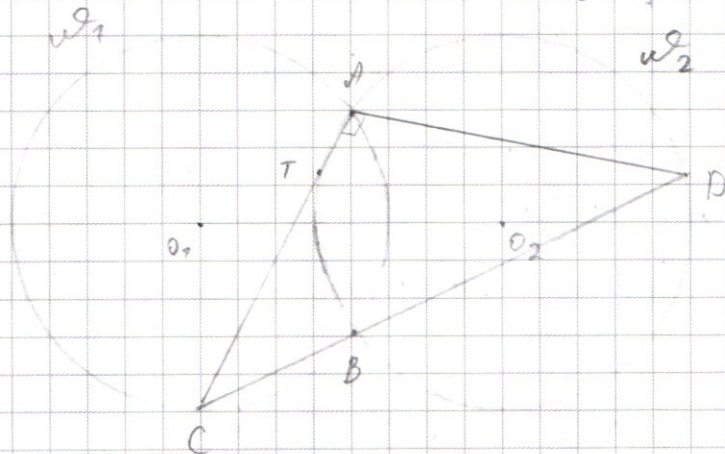
$$A_3 L = \sqrt{49 + 84} = \sqrt{130}$$

$$a = 130$$

Если $a = \sqrt{130}$, то решений 2.

Ответ: $a \in \{1; 130\}$

№6

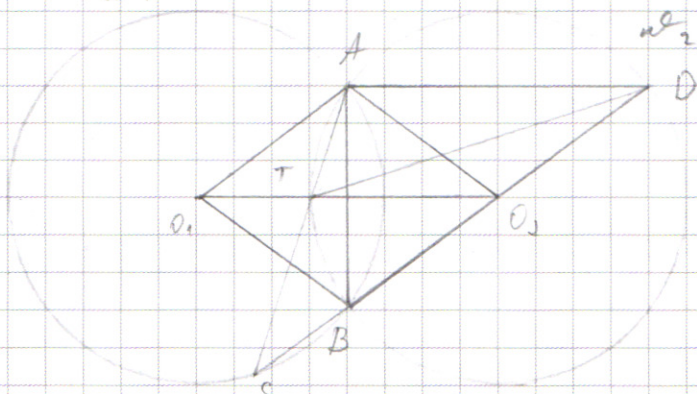


Возможно 2 случая: 1) CA пересек. ω_2 в какой-то точке T , $\Rightarrow \angle TAD$ - впис., но он равен 90° , $\Rightarrow BD$ - диам.

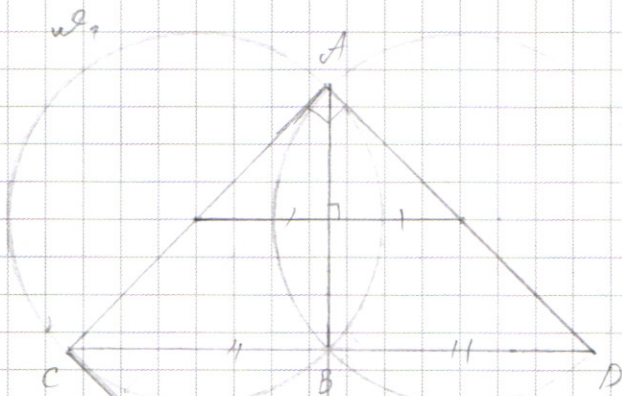
2

и 6 (продолж.)

Рассмотрим случай, когда BD — диаметр, а CA пересек. ω_2



Увидим, что $\angle CAD = 90^\circ$ и $\angle BAD = 90^\circ$ (как отпр. на диам.), $\Rightarrow$ противоречие, $\Rightarrow$ CA — касат. к ω_2 (это второй случай).



П.к. CA — касат, то AD — диаметр, ведь $\angle CAD = 90^\circ$ (по т. ω о прямой перпенд. касат. к ω).

$\angle ABD = 90^\circ$ (как отпр. на диам.).

П.к. C, B и D лежат на одной прямой, то $\angle CBD = 90^\circ$, $\Rightarrow AC$ — диам. (по т. ω о впис. угле 90°), $\Rightarrow \triangle CAD$ — равноб.

По т. Гипр. $\omega \Rightarrow CAD: CD = AC\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$, $CF = 10$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 = 5^3 \cdot 3^3$$

1) Число содержит $\{1; 1; 3; 3; 3; 5; 5; 5\}$

2) Число содержит $\{1; 1; 1; 3; 5; 5; 5; 9\}$

1) Кол-во способов поставить две 1 равно $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$,
три 1 равно $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$, четыре 1 равно $\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} = 1$

$$28 \cdot 20 = 560 \text{ способов}$$

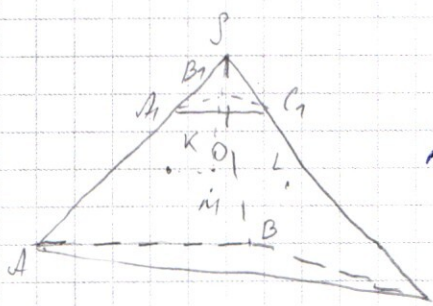
2) 3 монеты поставить на одно из 8 мест, 9 на одно
из 7; 5 монеты поставить $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$ способами,
1 монета поставить 1 способом.

$$8 \cdot 7 \cdot 20 = 1120$$

$$\text{Всего способов: } 560 + 1120 = 1680$$

Ответ: 1680

№ 4.



O - точка пересечения биссектрисных
плоскостей для (ASB) и (SBC) ,
 (SBC) и (ASC) , (ASC) и (ASB) .

$$S_{OABC} = 4, S_{OA_1B_1C_1} = 1; (ABC) \parallel (A_1B_1C_1),$$

т.к. они перпенд. одной прямой.

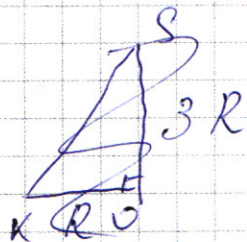
$\angle SKO = 90^\circ$, т.к. SK - касат. к сфере. Пирамиды $SA_1B_1C_1$ и
 $SABC$ подобны, т.к. $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$ и $k = 2$ (т.к. $k^2 = 4$).

N7 (продолж.)

$y > 2^n$ S_{H_1} - высота $S_{A_1B_1C_1}$, S_H - высота S_{ABC} , $\frac{S_{H_1}}{S_H} = 2$. $S_H = S_{H_1} + 2R$ (R - радиус сф.), $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 2S_{H_1} = S_{H_1} + 2R, \Rightarrow S_{H_1} = 2R \text{ и } S_H = 4R$$

т.к. $SO = S_{H_1} + R$, то $SO = 3R$.



~~tg KSO~~

$$\sin \widehat{KSO} = \frac{R}{3R}, \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$$



Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$

N7

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} > 3 \cdot 2^{65}, \text{ т.к. } 2^x > 0$$

$$y > 3 \cdot 2^{65}$$

$$3 \cdot 2^{65} \leq 70 + (2^{65} - 1)x$$

$$x > \frac{3 \cdot 2^{65} - 70}{2^{65} - 1}$$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + (2^{65} - 1)x$$

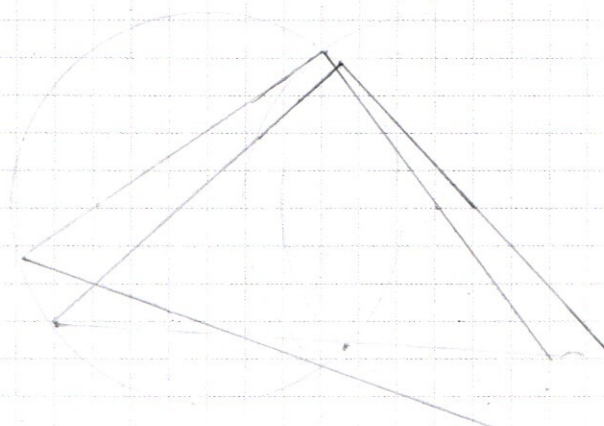
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &> 3 \cdot 2^{65} \\ 3 \cdot 2^{65} &< 70 + (2^{64} - 1)x \end{aligned}$$

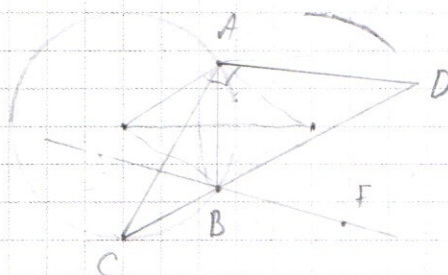
$$x > \frac{3 \cdot 2^{65} - 70}{2^{64} - 1}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

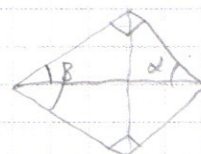


$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

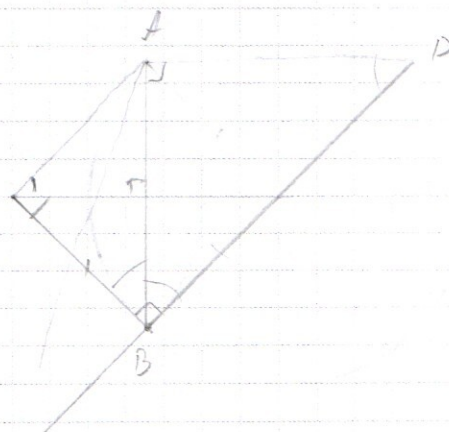
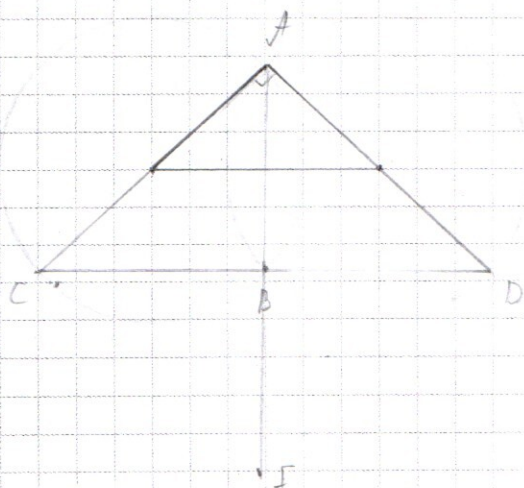


$$R = 5$$



Касательная:

Секунда



$$\sin 4x + \cos(7x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = 0$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2}) + \cos \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2}) = 0$$

$$(\cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2}) (\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}) =$$

$$\cos(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi n, \Rightarrow x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8} \quad \frac{\pi}{8} - \frac{2\pi}{8} = -\frac{\pi}{8}$$

$$\frac{4\pi}{8} - \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi n, \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$$

$$\frac{11x}{2} = \frac{5\pi}{8} + \pi n$$

$$11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 + x(-2y - 4) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = (2y + 4)^2 - 4(-3y^2 + 12y) = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = (4y - 4)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{2y + 4 \pm (4y - 4)}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2y + 4 + 4y - 4}{2} \\ x = \frac{2y + 4 - 4y + 4}{2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x = -y + 4 \end{cases}$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right) \lg 3y = y^2 \lg 3y^2$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right) \lg 3y = y^2 \lg 3y^2$$

$$\lg 3y = \lg 3 + \lg y$$

$$\lg(3y) \lg \frac{y^4}{3} = 2 \lg(3y^2) \lg y$$

$$(\lg 3 + \lg y)(\lg y^4 - \lg 3) = 2(\lg 3 + \lg y^2) \lg y$$

$$4 \lg 3 \lg y - \lg^2 3 + 4 \lg^2 y - \lg 3 \lg y = 2 \lg y \lg 3 + 4 \lg^2 y$$

$$\lg 3 \lg y - \lg^2 3 = 0$$

$$\lg y - \lg 3 = 0, \Rightarrow y = 3, x = 9$$

$$\left(\frac{243}{9}\right) \lg 9 = 9 \lg 27$$

$$27 \lg 9 = 9 \lg 27$$

$$\left(\frac{y^5}{-y+4}\right) \lg(-y+4) = y^2 \lg(-y+4) y$$

$$\lg(4-y)(\lg y^5 - \lg(-y+4)) = (\lg y + \lg(-y+4)) \lg y^2$$

$$\lg p(5 \lg q - \lg p) = (\lg q + \lg p) \cdot 2 \lg q$$

$$5 \lg p \lg q - \lg^2 p = 2 \lg^2 q + 2 \lg p \lg q$$

$$2 \lg^2 q - 3 \lg p \lg q + \lg^2 p = 0$$

$$(\lg q - \lg p)(\lg q - 0.5 \lg p) = 0$$

$$2u^2 - 3u + 1 = 0$$

$$D = 1, u_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$(u-1)(u-0.5)$$

$$u = 0.5$$

$$\begin{cases} q = p \\ q = p^{0.5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -y+4 \\ y = \sqrt{-y+4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ py^2 = -y+4 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ py^2 + y - 4 = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + y - 4 = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \xrightarrow{y \geq 0} y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y = -\frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x = 4 - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = \frac{8 + 1 - \sqrt{17}}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$(2; 2)$$

$$\left(\frac{2.5}{2}\right) \lg 2 = 2^2 \lg 4$$

$$16 \lg 2 = 16 \lg 2$$

$$-y + 3 + x + y - 3 + x = 6$$

$$\pm 4; \pm 3$$

$$\left(\frac{(-1 + \sqrt{17})^5}{2}\right) \lg \frac{9 - \sqrt{17}}{2} = \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)^2 \lg \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2} \cdot \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)$$

$$a^{2 \lg} \left(\frac{k}{l}\right) \lg l = (k)^2 \lg k l$$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{9 - \sqrt{17}}\right) \lg \frac{9 - \sqrt{17}}{2} = 4 - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = \frac{8 + 1 - \sqrt{17}}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$y = 3 + x$$

$$y = 3 - x$$

$$y - 3 - x - y + 3 - x = 6$$

$$-y + 3 + x - y + 3 - x = 6$$

$$y - 3 - x + y - 3 + x = y - 6$$

$$2y - 6 = 6$$

$$y = 12$$

$$-2y = 0$$

$$y - 3 - x - y + 3 - x = 6$$

$$-2x = 6$$

$$x = -3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Факторизация

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3^3 = 5^3 \cdot 3^3$$

$$3375 = 15^3$$

.....

$$0 < a_i \leq 9$$

$$9 = 3^2$$

$$1) 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$$

5 - кав-во

$$2) 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\cos \alpha - \cos \beta - \sin \alpha + \sin \beta = \sqrt{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$I \quad II \quad IV \quad IV \quad V \quad VI \quad VII \quad VII \quad \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) - \cos(\beta + \frac{\pi}{4}) = \cos(\alpha + \beta)$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad \cos u + \cos v = \cos(u + v - \frac{\pi}{2}) = \sin(u + v)$$

$$1) 3 \quad 3 \quad 3 \quad \cos \alpha - \cos \beta = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$I \quad II \quad III \quad \cos \alpha (1 - \sin \beta) = \cos \beta (1 + \sin \alpha)$$

$$\textcircled{1} \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x \quad \text{OD3: } x \in \mathbb{R}$$

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}; y = \frac{\alpha - \beta}{2}; \Rightarrow \alpha = x + y, \beta = x - y$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \cos \beta &= \cos(x+y) - \cos(x-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y - \\ &- (\cos x \cos y + \sin x \sin y) = -2 \sin x \sin y = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \cos 7x \cos 4x - 2 \sin 7x \sin 4x$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \sin \beta &= \sin \alpha - \sin \beta = \sin(x+y) - \sin(x-y) = \\ &= \sin x \cos y + \sin y \cos x - \sin x \cos y + \sin y \cos x = 2 \sin y \cos x = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \end{aligned}$$

$$\sin t \sin 4x + \sin t \cos t = 0$$

$$\sin 3x - \sin 11x = -2 \sin 4x \cos 7x$$

$$\sin t \sin 4x + \sin 2t = 0$$

$$\begin{aligned} C_8^3 \cdot C_8^3 \\ \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20 \end{aligned}$$

$$\frac{8 \cdot 7}{2}$$

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2$$

$$(5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2 = 100$$

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}; y = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\alpha = x + y; \beta = x - y$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = \cos(x+y) - \cos(x-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y - (\cos x \cos y + \sin x \sin y) = -2 \sin x \sin y = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 7x \sin 4x$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = \sin(x+y) - \sin(x-y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x - (\sin x \cos y - \sin y \cos x) = 2 \sin y \cos x = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin 3x - \sin 11x = 2 \sin \frac{3x - 11x}{2} \cos \frac{3x + 11x}{2} = -2 \sin 4x \cos 7x$$

$$\sqrt{2} * \sqrt{2} \cos(11x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos(3x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2} \left(\cos 11x \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 11x \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \sqrt{2} \left(\cos 3x \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin 3x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\cos 11x - \sin 11x - \cos 3x + \sin 3x$$

$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) - \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = -2 \sin \frac{11x + \frac{\pi}{4} + 3x + \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{11x + \frac{\pi}{4} - 3x - \frac{\pi}{4}}{2} =$$

$$= -2 \sin(7x + \frac{\pi}{4}) \sin 4x$$

$$\cos u - \cos v = \sin u + \sin v = \sqrt{2} \cos(u+v)$$

$$\cos(t + \frac{\pi}{4}) - \cos(p + \frac{\pi}{4}) = \cos(t + p)$$

$$\cos m - \cos n = \cos(m+n - \frac{\pi}{2})$$

$$\cos m - \cos n = -\sin(m+n)$$

$$-2 \sin \frac{m+n}{2} \sin \frac{m-n}{2} = -\sin(m+n)$$

-

$$\cos \alpha - \cos \beta = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin \frac{14x + \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$\cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin x + \cos u = 0$$

$$\sin 4x$$

$$\sin$$

$$x$$

$$\sin x + \cos y =$$

$$(-4; -3)$$

$$(3; 6)$$

$$\sqrt{49 + 81} = \sqrt{130}$$