

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

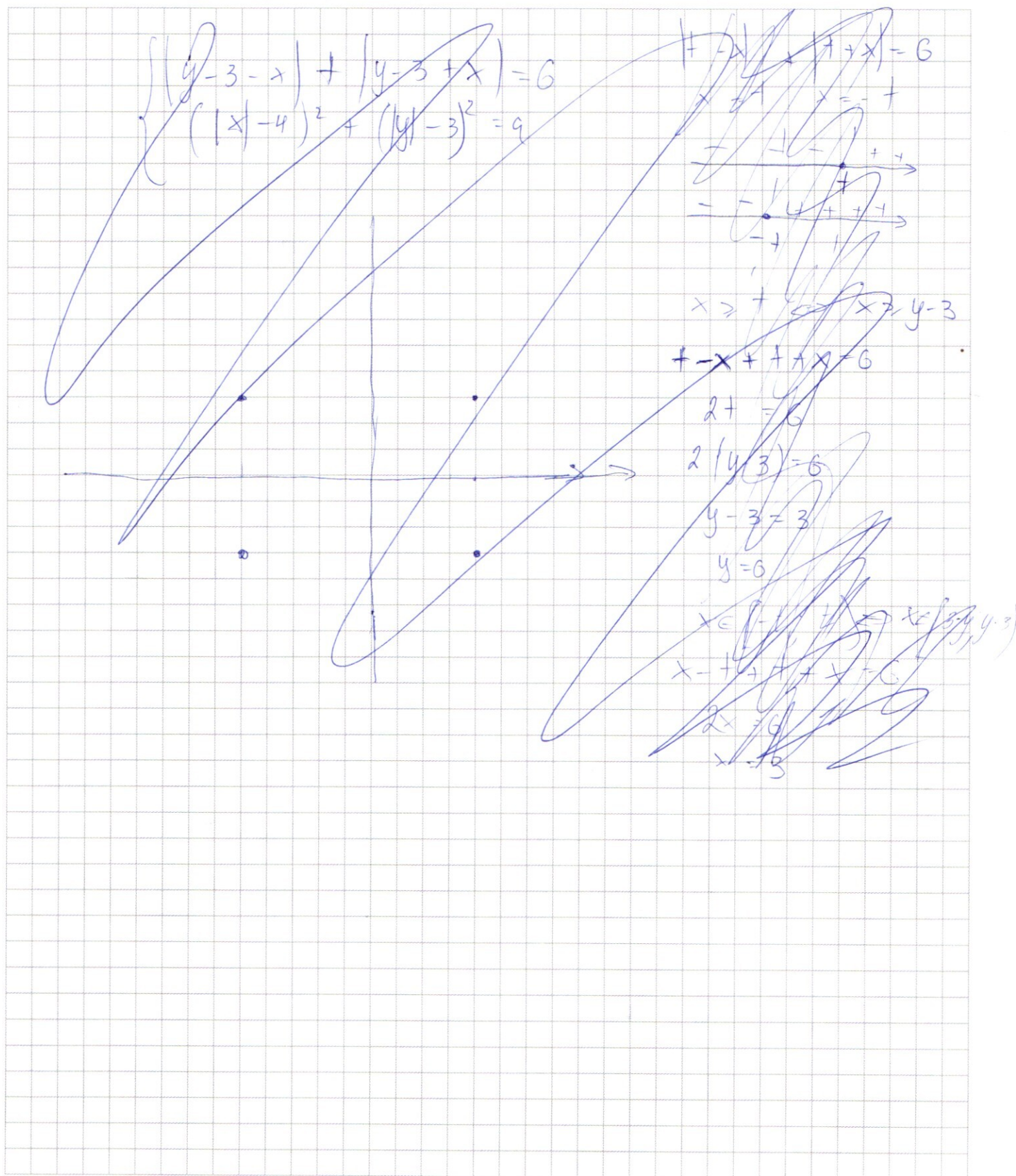
имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1. Разложим 3375 на множители:

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 3} \\ 1125 \overline{) 3} \\ 375 \overline{) 3} \\ 125 \overline{) 5} \\ 25 \overline{) 5} \\ 5 \overline{) 5} \\ 1 \overline{) 1} \end{array}$$

$$3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1$$

П.к. по условию 8-значное число $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ составим из цифр: 3, 3, 3, 5, 5, 5, 1, 1

Всего чисел: 8!
Повторяющиеся: $\frac{3! \cdot 3! \cdot 2!}{1 \cdot 3! \cdot 3!}$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 16 \\ \hline 210 \\ 350 \\ \hline 560 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 860 \cdot 560 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$C_1 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 = 35 \cdot 16 = 560$$

$$C_2 = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 560 \cdot 2 = 1120$$

$$C = C_1 + C_2 = 560 + 1120 = 1680$$

Ответ: 1680

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 &= \\ 2(6+1) &= 2 \cdot 7 \\ 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 &= \end{aligned}$$

2. $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 7x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \left(\sin \left(14x + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$-2\sqrt{2} \sin 4x \cdot \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) - 2\sqrt{2} \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot (\sin 4x + \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right)) = 0$$

$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot (\sin 4x + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right)) = 0$$

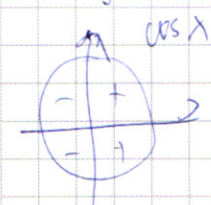
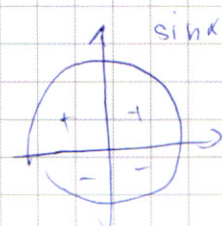
$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x \right) = \cos \left(\frac{11}{2}x - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\begin{cases} 7x + \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x = \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{8} - \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\frac{11}{2}x = \frac{5\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Разложить 3375 на множители

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 3375} \\ \underline{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

$$3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Так по условию число 8-значное $\Rightarrow$
состоит из 8 цифр 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5

Всего перестановок 8!

Тождественно $3! \cdot 3! \cdot 2!$

$$C = C_1 + C_2 = 560 + 1120 = 1680$$

$$C = 8!$$

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$56 \cdot 10 = 560$$

$$C_2 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 560 \cdot 2 = 1120$$

$$\text{Итого: } 1680$$

3. $\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy$ (1) О.Д.З. $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

(1) $\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy$
 $\frac{y^5}{x} \lg x - 2 \lg x = x \lg x$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (2)$$

$$\lg y (5 \lg x - 2 \lg x - 2 \lg y) - \lg x$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg x \cdot \lg y + \lg^2 x = 0$$

$$2 \lg^2 y - 2 \lg x \cdot \lg y - \lg x \cdot \lg y + \lg^2 x = 0$$

$$(2): x^2 - 3xy + xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x(x - 3y) + y(x - 3y) - 4(x - 3y) =$$

$$= (x - 3y)(x + y - 4)$$

$$(x - 3y)(x + y - 4) = 0$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4 - y \end{cases}$$

1) Если $x = 3y \Rightarrow \begin{cases} 3y = y^2 \\ 3y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y - 3) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = 9 \\ y = 3 \end{cases} \text{ - не подходит под О.Д.З.}$$

~~1) Найти x = 4 - y~~

2) Найти $x = 4 - y$

$$\begin{cases} 4 - y = y^2 \\ 4 - y = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + y - 4 = 0 \\ 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$D = 1 + 4 \cdot 1 = 5 \Rightarrow 3^2$$

$$y_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$y_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (y+2)(y-1) = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 6 \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \end{cases} \text{ — не подходит по 0.2.3.}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases}$

~~2) $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = 2 \cos 4x$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2^x + 3 \cdot 2^{65} &< 70 + (2^{64} - 1)x \\ 2^x + 3 \cdot 2^{65} - 70 - (2^{64} - 1)x &< 0 \end{aligned}$$

$$x \geq 6$$

$$2^6 + 3 \cdot 2^{65} - 70 - 6 \cdot 2^{64} + 6 = 64 + 6 - 70 = 0$$

$$x = 70$$

$$\begin{aligned} 2^{70} + 3 \cdot 2^{65} - 70 - (2^{64} - 1) \cdot 70 &= 2^{70} + 3 \cdot 2^{65} - \\ - 70 \cdot 2^{64} &= 2^{64} (2^6 + 6 - 70) = 0 \quad x \in (6; 70) \end{aligned}$$

~~Найти~~ Найдите сколько существует y при заданном x :

$$70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}$$

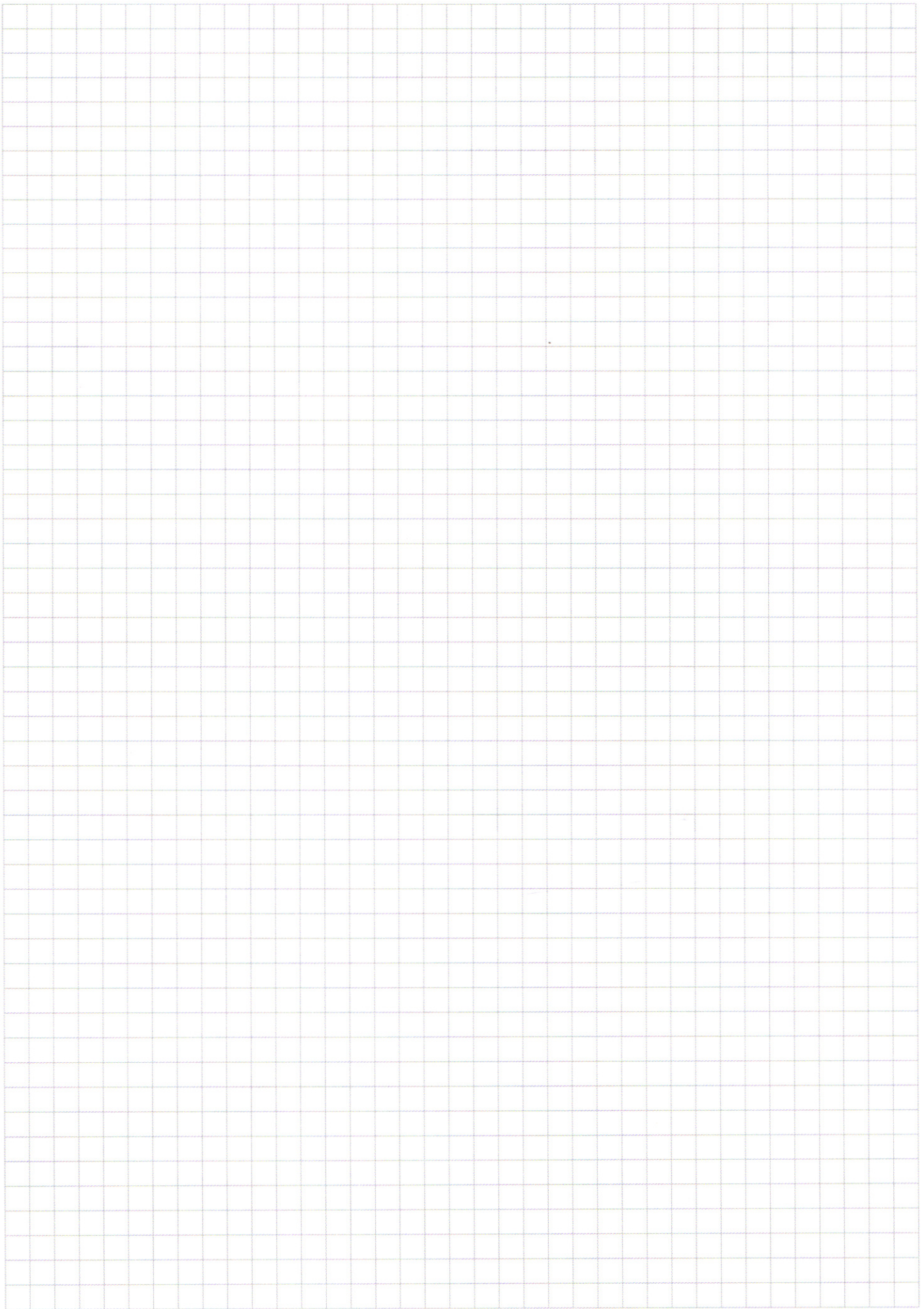
Всего пер. $(x; y)$

$$\begin{aligned} \sum_{x=6}^{70} (70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}) &= (70 + 3 \cdot 2^{65})(70 - 6) + \\ + \sum_{x=6}^{70} (2^{64} - 1)x - \sum_{x=6}^{70} 2^x &= (70 - 3 \cdot 2^{65}) \cdot 64 + (2^{64} - 1) \cdot \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{(70 - 6)(70 - 6 + 1)}{2} - 2^6 \cdot \frac{2^{65} - 1}{2 - 1} = 70 \cdot 64 - 3 \cdot 2^{65} \cdot 64 + (2^{64} - 1) \cdot 32 \cdot 65 -$$

$$\begin{aligned} - 2^6 \cdot 2^{65} + 2^6 &= 70 \cdot 64 - 32 \cdot 65 + 32 - 2^{65} (3 \cdot 64 + 32 - 16 \cdot 65) - \\ &= 38 \cdot 64 + 2^{65} \cdot 24 \cdot 51 = 2432 + 51 \cdot 2^{65} \end{aligned}$$

Ответ: $2432 + 51 \cdot 2^{65}$



☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lg \lg x \times \lg \frac{y^5}{x} &= (xy)^2 \lg y \\ x \lg x \cdot \lg y^5 &= (xy)^2 \lg y \\ x \cdot 5 \lg y \cdot \lg x &= (xy)^2 \lg y \\ x \cdot \lg(xy) &= x y^2 \end{aligned}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - y^2 + 4x + 12y = 0$$

$$y^5 \lg x - 2 \lg xy - x \lg x$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + 8 = 9 \\ y_1 &= \frac{-3+1}{2} = -1 \\ y_2 &= \frac{-3-1}{2} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg y / (5 \lg x - 2 \lg x - 2 \lg y) &= \lg x \\ 2 \lg^2 y - 3 \lg x \cdot \lg y + \lg^2 x &= 0 \\ (2 \lg y - \lg x) (\lg y - \lg x) &= 0 \\ 2 \lg y &= \lg x \quad y^2 = x \\ \lg y &= \lg x \quad x = y \end{aligned}$$

$$(x-3y)(x+y-4)=0$$

$$\begin{aligned} x^2 - 3xy + xy - y^2 + 12y - 3y^2 \\ x = y^2 - 2y - 3y^2 \\ (y^2 - 3y)(y^2 + y - 4) \\ y(y-3)(y+2)(y-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y=0 &\Rightarrow x=0 \\ y=3 &\Rightarrow x=9 \\ y=-2 &\Rightarrow x=4 \\ y=1 &\Rightarrow x=1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1) \cdot x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= y \\ -2y(2y-4) &= 0 \\ -4y(y-2) &= 0 \\ y=0 &\Rightarrow x=0 \\ y=2 &\Rightarrow x=2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(x-3y) - y(x-3y) &= y(x-3y) \\ y &> 2^x + (2^2 - 1) \cdot 2^{65} \\ y &\leq 70 + (2^{64} - 1) \cdot x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 &= 63 \\ 90 &| 2 \\ 45 &| 2 \\ 22 &| 2 \\ 11 &| 2 \\ 5 &| 2 \\ 2 &| 2 \\ 1 &| 2 \end{aligned}$$

$$(x-3y)(x+y)$$

$$\begin{aligned} x(x-3y) + y(x-3y) - 4(x-3y) \\ = (x+y-4)(x-3y) \end{aligned}$$

$$y^5 \lg x - 2 \lg xy$$

$$y^5 \lg x \cdot x - \lg x$$

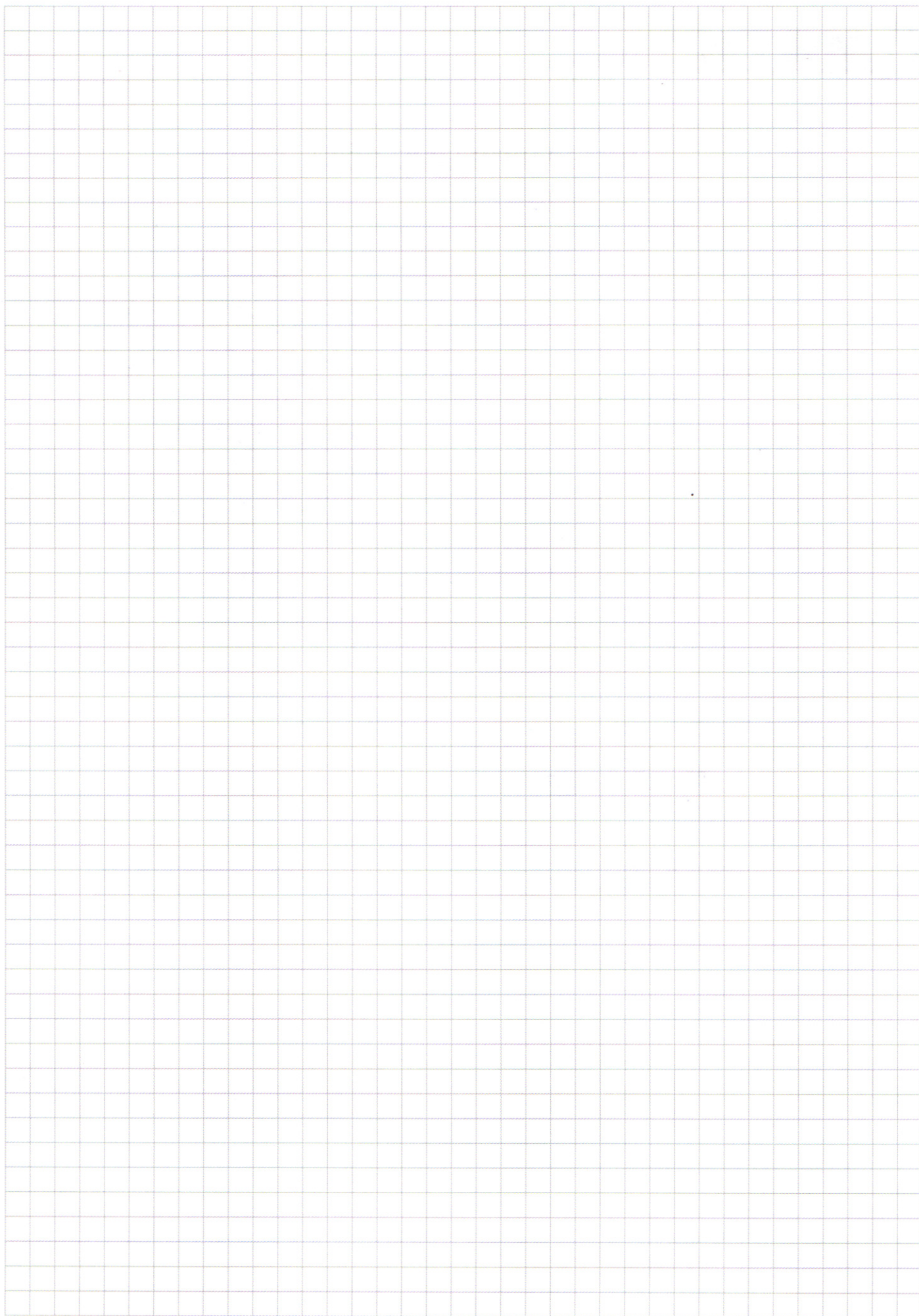
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} 2 \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x &= \sqrt{2} \cdot \cos 14x \\ -2 \sin 4x / \sin 7x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x &= \sqrt{2} \cdot \cos 14x \\ -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) &= \sqrt{2} \cdot \cos 14x \\ \sqrt{2} \cdot \cos 14x + 2 \sin 4x \cdot (\sin 7x + \cos 7x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{II}{8} - \frac{II^{14}}{2} = \frac{2A}{8}$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 8.2} \\ \underline{8} \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \\ 3 \overline{) 1125} \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 3 \end{array}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)