

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

и 3 $\begin{cases} (\frac{y^5}{x})^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$ ОДЗ: $y, x > 0$

1) Преобразуем первое уравнение

$$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = (xy)^{2\lg y}, \quad \frac{x^{5\lg y}}{x^{\lg x}} = x^{2\lg y} \cdot y^{2\lg y} \quad | : x^{2\lg y} \neq 0$$

$$\frac{x^{3\lg y}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg y}, \quad x^{3\lg y - \lg x} = y^{2\lg y};$$

Логарифмируем уравнение.

$$\lg x^{3\lg y - \lg x} = \lg y^{2\lg y}; \quad (3\lg y - \lg x) \cdot \lg x = 2\lg^2 y$$

$$-\lg^2 x + 3\lg x \cdot \lg y - 2\lg^2 y = 0$$

Введем замену $a = \lg x$, $b = \lg y$

$$-a^2 + 3ab - 2b^2 = 0; \quad a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

Отсюда

$$\begin{cases} a = 2b \\ a = b \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \lg x = \lg y \\ \lg x = 2\lg y \end{cases} \text{ по ОДЗ } \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = y^2 \end{cases}$$

2) Преобразуем второе уравнение

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - x(2y + 4) - 3y^2 + 12y = 0$$

отсюда

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = -y + 4 \end{cases}$$

Циркулярная система координат x

$$\begin{cases} x = y \\ x = y^2 \\ x = 3y \\ x = -y + 4 \end{cases}$$

1 случай: $x = y$

$$\begin{cases} x = y \\ x = 3x \\ x = -x + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

2 случай: $x = y^2$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = 3y \\ x = -y + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y^2 = 3y \\ y^2 + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ y = 3 \\ x = 9 \\ y = -1 + \sqrt{5} \\ x = (-1 + \sqrt{5})^2 \\ y = -1 - \sqrt{5} \\ x = (-1 - \sqrt{5})^2 \end{cases}$$

У всех решений:

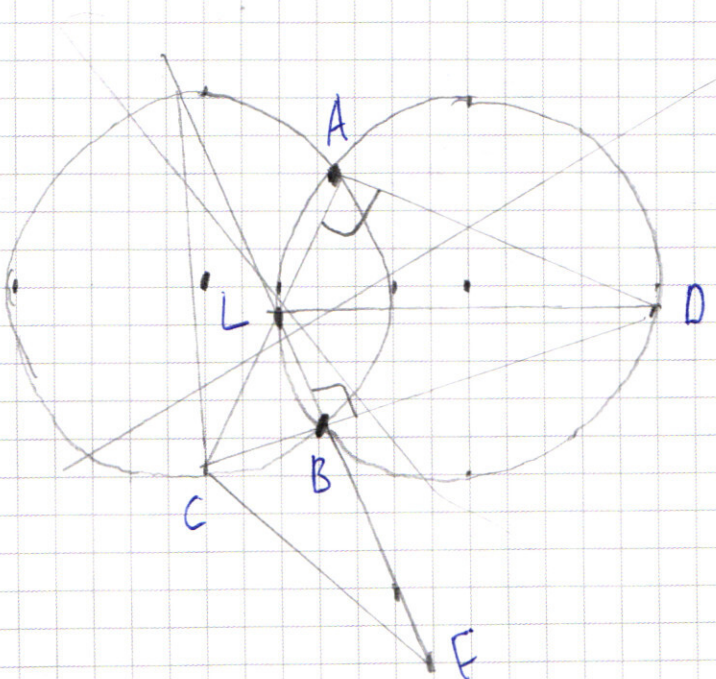
$$(0; 0) \quad (2; 2) \quad (9; 3) \quad ((-1 + \sqrt{5})^2; -1 + \sqrt{5})$$

$$((-1 - \sqrt{5})^2; -1 - \sqrt{5}) \quad \text{и } (0; 0) \text{ исключаем:}$$

$$(2; 2), (9; 3), ((-1 + \sqrt{5})^2; -1 + \sqrt{5})$$

Ответ: $(2; 2), (9; 3), (6 - 2\sqrt{5}; -1 + \sqrt{5})$

нб



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

н.5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 5 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение
можно обнаружить две прямые

$$y = 3 + x$$

$$y = 3 - x$$

Рассмотрим теперь на каждой
части плоскости:

$$y \geq 3 + x, y \geq 3 - x$$

$$y - 3 - x + y - 3 + x = 5$$

$$y = 6$$

$$y \leq 3 + x, y \geq 3 - x$$

$$-y + 3 + x + y - 3 + x = 5$$

$$x = 3$$

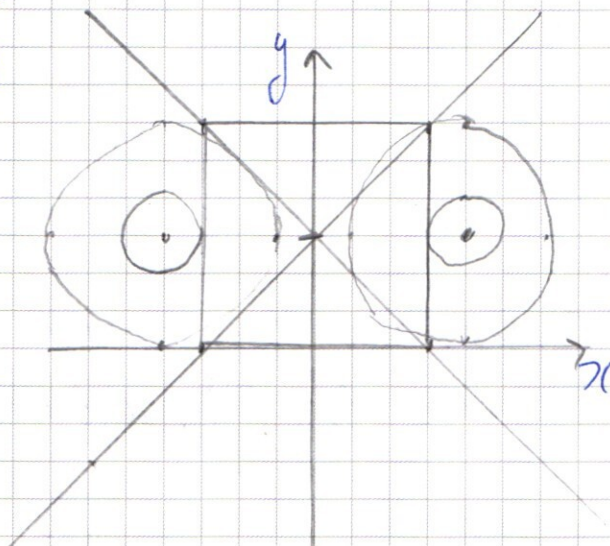
Итак образ, графика первого уравнения - квадрат.

Рассмотрим второе уравнение при $y \geq 0$ (или $y \leq 0$
в таком случае)
первое уравнение не имеет корней, так как $5 < 0$ не имеет
решений)

$$x \geq 0:$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$$

Итак образ на рисунке рассматриваем две окружности
с радиусом 3, первая окружность при $x \geq 0, y \geq 0$ и имеет
центр в точке $(+4, 3)$.



$$y \geq 3 + x, y \leq 3 - x$$

$$y - 3 - x - y + 3 - x = 5$$

$$x = -3$$

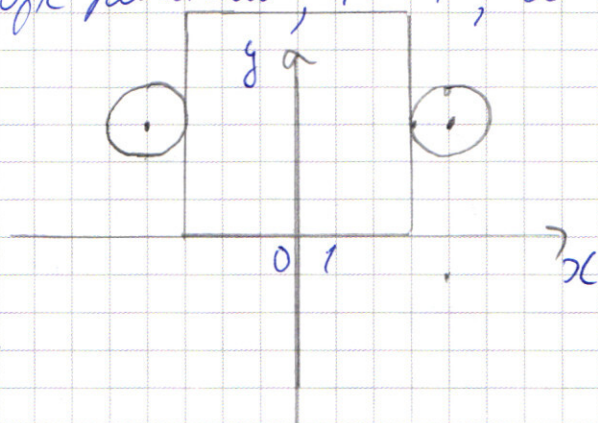
$$y \leq 3 + x, y \leq 3 - x$$

$$-y + 3 + x - y + 3 - x = 5$$

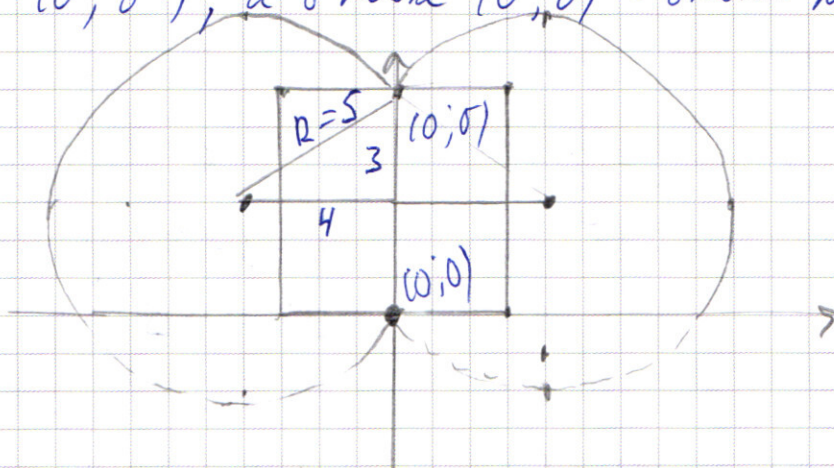
$$y = 0$$

Второе уравнение при $x=0$, $y \geq 0$ и имеет решение в точке ~~$(-4; 4)$~~ $(-4; 3)$

1 случай две точки решений, $r=1$, $a=1$



2 случай две точки решений: окружности пересекаются в точке $(0; 5)$, а в точке $(0; 0)$ - второе решение.



Радиус окружности находим по теореме Пифагора из координат. $R=5$ или еще $a=R^2=25$

Ответ: ~~$1, 25$~~ $\{1, 25\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 7x$$

$$-2 \sin 4x \sin x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin x + \cos 7x) - \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$(\sin x + \cos 7x) (-2 \sin 4x - \sqrt{2} \cos 7x + \sqrt{2} \sin 7x) = 0$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) \left(\sin 8x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x \right) = 0$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) \left(\sin 8x + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \right) = 0$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) \left(\sin \left(4x + \frac{\pi}{4} - 7x \right) \cos \left(4x - \frac{\pi}{4} + 7x \right) \right) = 0$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) \cdot \sin \left(-\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \cdot \cos \left(\frac{11x}{2} - \frac{2\pi}{8} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0 & \because \cos 7x \neq 0 \\ \sin \left(-\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0 \\ \cos \left(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \tan 7x = -1 \\ \sin \left(-\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0 \\ \cos \left(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \end{cases}$$

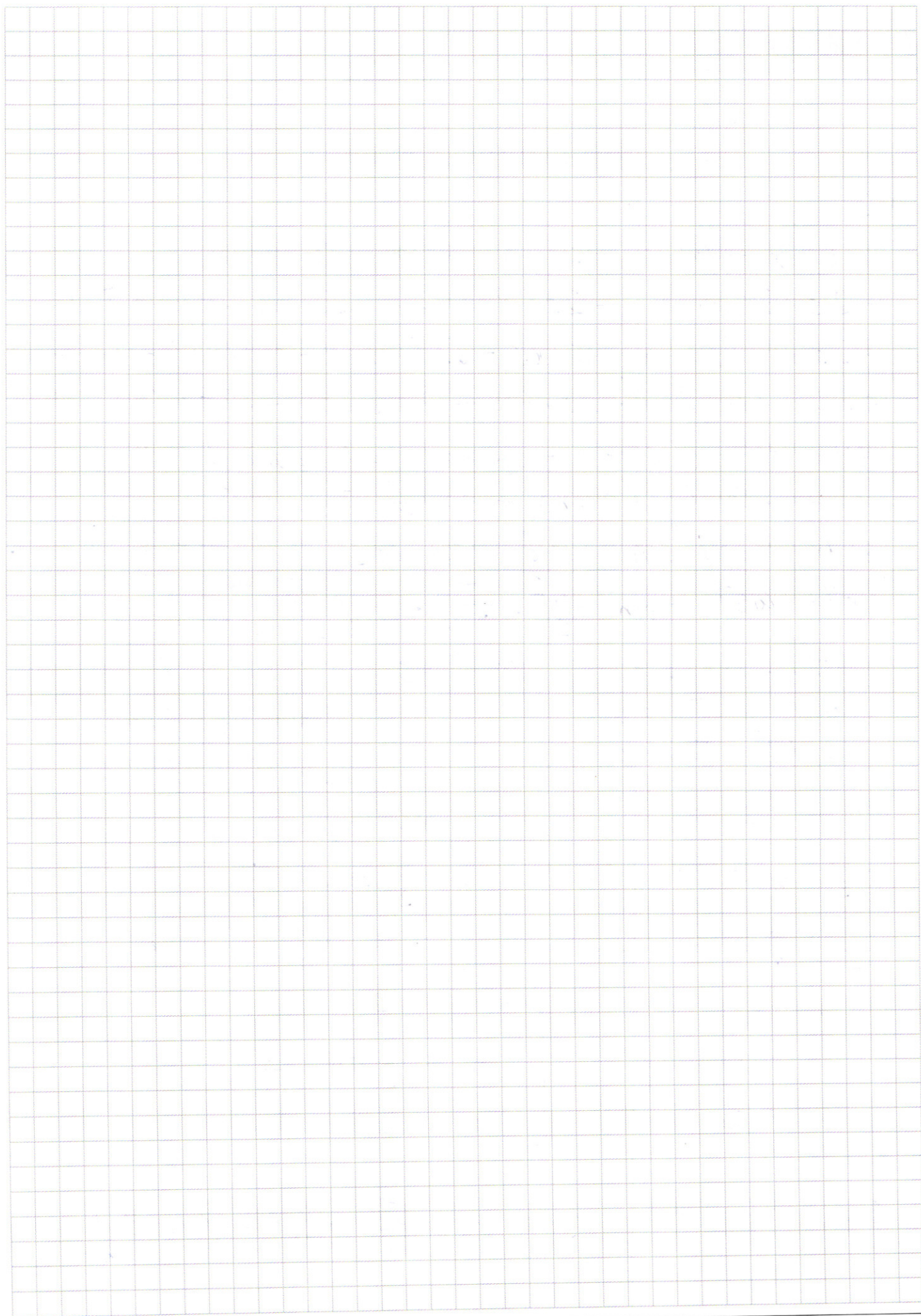
$$\begin{cases} 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \\ -\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} k \\ -\frac{3x}{2} = \pi k - \frac{\pi}{8} \\ \frac{11x}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} + \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} k \\ 3x = 2\pi k + \frac{\pi}{4} \\ 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} k \\ x = \frac{2}{3}\pi k + \frac{\pi}{72} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi k \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} k, \quad \frac{2}{3}\pi k + \frac{\pi}{72}, \quad \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x^2 - 2yx - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \\ \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = 2^{\lg xy} \end{cases}$$

$$x^2 - x(2y+4) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\begin{cases} x = -y + 4 \\ x = 3y \end{cases}$$

1) ~~$\begin{cases} y^5 \\ -y+4 \end{cases}$~~

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = (xy)^{2\lg x}$$

$$\frac{y^5}{x} = (xy)^2$$

$$y^5 = x^3 \cdot y^2$$

$$y^3 = x^3$$

$$\left(\frac{y^5}{-y+4}\right)^{\lg(-y+4)} = y^{2\lg(-y+4)} y$$

$$\ln\left(\frac{y^5}{-y+4}\right) = \ln y^{2\lg(-y+4)} y$$

$$(1+\sqrt{5})^2 = 1 - 2\sqrt{5} + 5 = 5 - 2\sqrt{5}$$

$$\lg(-y+4) \cdot \ln\left(\frac{y^5}{-y+4}\right) = \ln y^2 \cdot \lg(-y+4) y$$

$$\lg(-y+4) \cdot (5\ln y)$$

$$\frac{y^5 \cdot \lg x}{x^{\lg x}} = y^{2\lg xy}$$

$$\frac{x^5 \cdot \lg y}{x^{\lg y}} = (xy)^{2\lg xy}$$

$$\frac{x^5 \cdot \lg y}{x^{\lg y}} = x^{2\lg y} \cdot y^{2\lg y}$$

$$\lg x(3\lg y - \lg x) = \lg y \cdot 2\lg y$$

$$-\lg^2 x + 3\lg x \lg y - 2\lg^2 y = 0; \quad a = \lg x, \quad b = \lg y$$

$$-a^2 + 3ab - 2b^2 = 0$$

$$\lg x = 2\lg y$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$\lg x = \lg y$$

$$a = 2b, b$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x &= y^{2 \lg xy} \\ x^2 - 2xy - 8x - 3y^2 + 12y &= 0 \end{aligned} \right.$$

ОДЗ: $x > 0, y > 0$

Преобразуем первое уравнение

$$\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^{2 \lg xy}$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x \lg x} = (xy)^{2 \lg y}$$

$$\frac{x^{5 \lg y}}{x \lg x} = x^{2 \lg y} \cdot y^{2 \lg y} \quad ; \quad x^{2 \lg y} \neq 0$$

$$x^{3 \lg y} = x \lg x$$

$$3 \cdot \lg y = \lg x$$

$$\boxed{y^3 = x} \quad ; \quad \begin{aligned} x &= 3y \\ x &= -y + 8 \end{aligned}$$

$$y^3 = 3y$$

$$y(y^2 - 3) = 0$$

$$y = 0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$$

$$x = -y + 8$$

$$y^3 + y - 8 = 0$$

$$2 - 8 = -6 \quad \frac{1}{2}$$

$$27$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^{2 \lg xy} \cdot \frac{y^{5 \lg x}}{x \lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x \lg x} = (xy)^{2 \lg y}$$

$$\frac{x^{5 \lg y}}{x \lg x} = x^{2 \lg y} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$\frac{x^{3 \lg y}}{x \lg x} = x^{2 \lg y} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$x^{3 \lg y} - \lg x = y^{2 \lg y}$$

$$\lg x (3 \lg y - \lg x) = \lg y \cdot 2 \lg y$$

$$-\lg^2 x - 2 \lg^2 y + 3 \lg x \lg y = 0$$

$$-\lg^2(-y+8) - 2 \lg^2(y) + 3 \lg(-y+8) \cdot \lg y = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \sin y$$

$$a = x+y, \quad b = x-y$$

$$\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 7x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x + 2 \cdot \sin(-4x) \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 7x$$

$$2 \sin 7x \cdot \sin 4x + 2 \sin 4x \cdot \cos 7x + \sqrt{2} \cos 7x = 0$$

$$2 \sin 7x \cdot \sin 4x + 2 \sin 4x \cdot \cos 7x + \sqrt{2} \cos^2 7x - \sqrt{2} \sin^2 7x = 0$$

$$\cos 7x (2 \sin 4x + \sqrt{2} \cos 7x) + \sin 7x (2 \sin 4x - \sqrt{2} \sin 7x) = 0$$

$$2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) + \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$(\cos 7x + \sin 7x) (2 \sin 4x + \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)) = 0$$

$$2 \sin 4x - \sqrt{2} \sin 7x + \sqrt{2} \cos 7x = 0$$

$$2 \sin 4x = \sqrt{2} \sin 7x - \sqrt{2} \cos 7x \quad 4 \sin^2 4x = 2 (\sin^2 7x - 2 \sin 7x \cos 7x + \cos^2 7x)$$

$$\sin 4x = \sin(7x - \frac{\pi}{4})$$

$$4x = 7x - \frac{\pi}{4} +$$

$$\ln\left(\frac{y^5}{x}\right) \ln x = y^{2 \ln x} y$$

$$x^2 - 2xy - 6x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 + x(-2y - 4) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x_1 + x_2 = 2y + f$$

$$x_1 \cdot x_2 = -3j^2 + 12j$$

$$x = -y + 1$$

$$x = 3y$$

$n \uparrow$

$$\begin{array}{r} 3075 \\ 36 \\ \hline 37 \\ 39 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$3345 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

~~7. 123050~~

18

333 . . . 7

0	0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & \cdot & 3 & 3 & \cdot & \cdot & \\ \hline & \cdot & & & \cdot & & \end{array} \quad 7$$

7.6.5

202
~~20~~
 202
 022
 202

3

3
 (2-1)

3 n •

3 •

5	3345
5	075
5	135
5	24
3	0
3	3
3	1

333

3033

30033

300033

3000033

~~300~~

3	3	3	0	0	0	0
0	3	3	3	0	0	0
0	0	3	3	3	0	0
0	0	0	3	3	3	0
0	0	0	0	3	3	3
3	0	0	0	0	3	3
3	3	0	0	0	0	3

3033000
0303300
0030330
0003033
3000303
3300030
0330003

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin 2x = \sin 2C$$

$$2 \sin x \cos x - \sin 2C = 0$$

$$\sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ или } \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 7x - \cos 3x - \sin 7x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

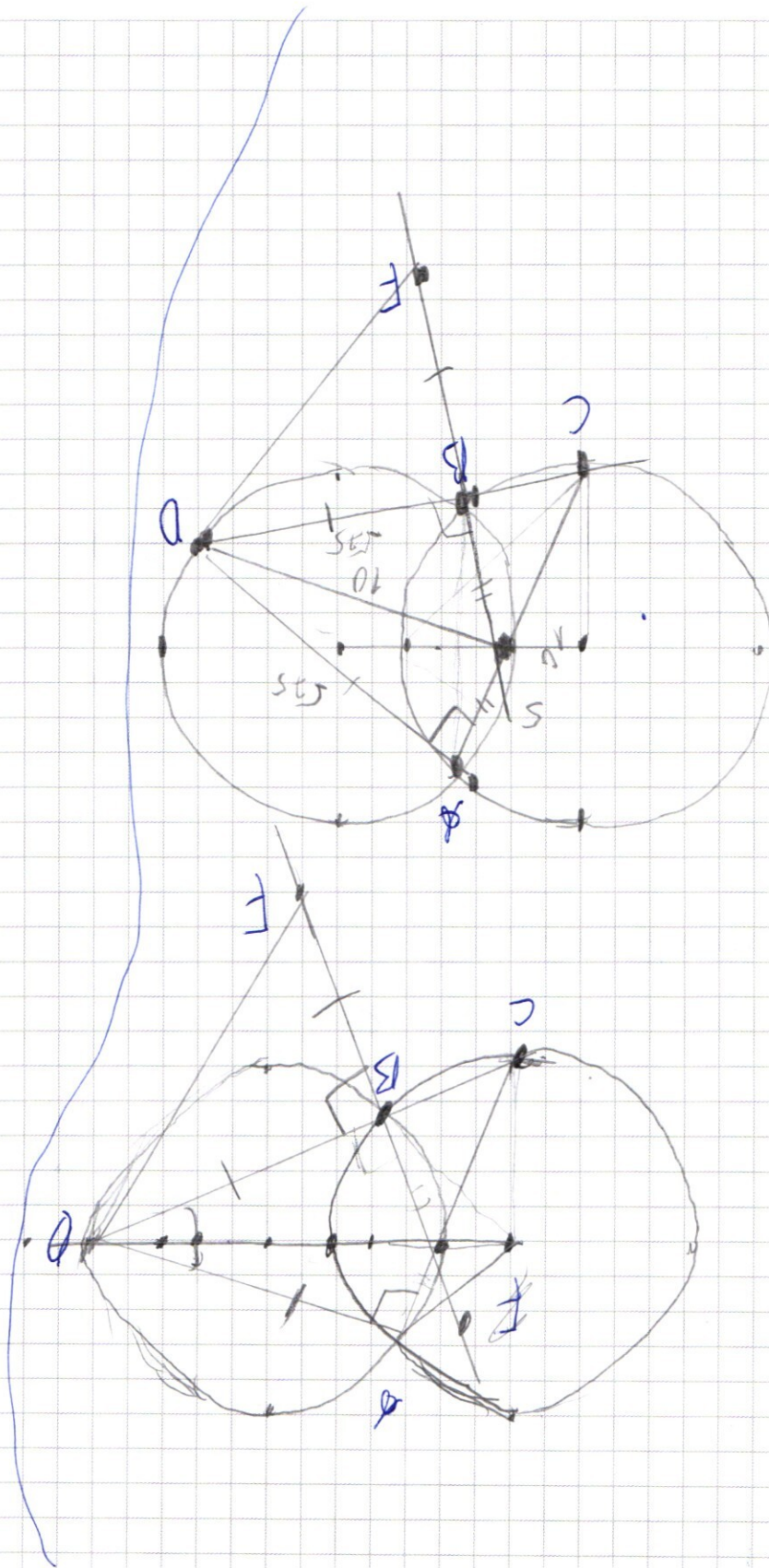
$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x$$

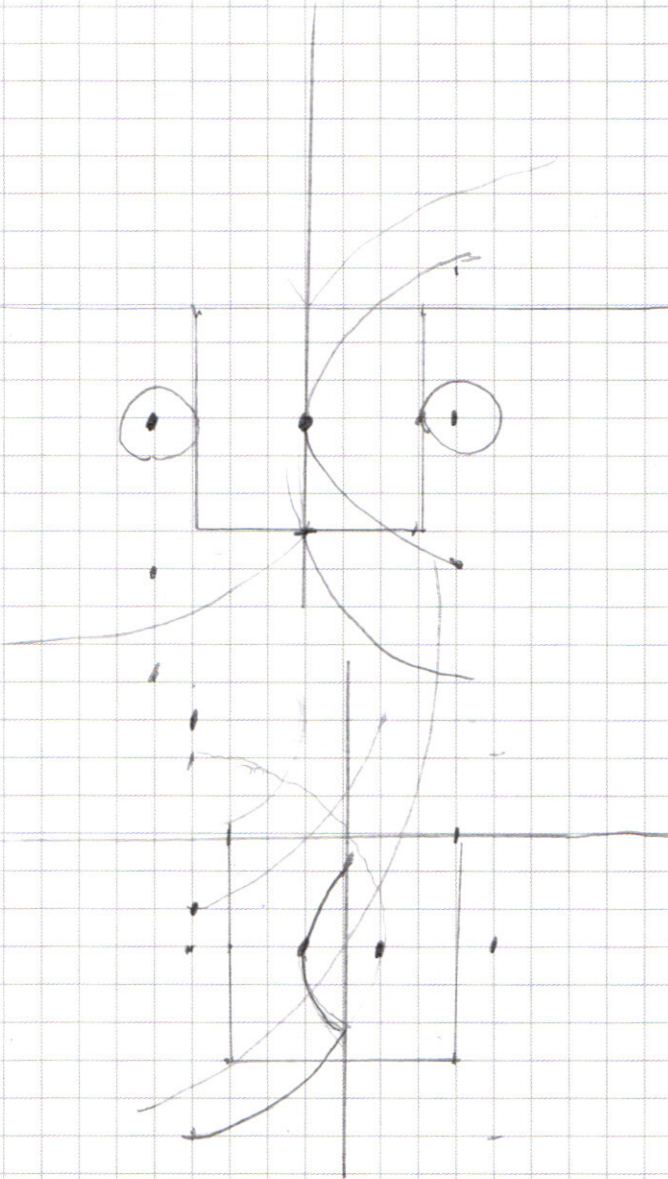
$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 4x - \sin^2 4x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 4x + \sin 4x) (\cos 4x - \sin 4x)$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (-2 \sin 4x - \sqrt{2} \cos 4x + \sqrt{2} \sin 4x) = 0$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (-2 \sin 4x + \sqrt{2} \sin 4x - \sqrt{2} \cos 4x) = 0$$





$$D = (1 - \beta) + \frac{1}{2} (1 + \alpha) \quad 0 \leq x$$

$$D = (1 - \beta) + \frac{1}{2} (1 - \alpha) \quad 0 < x$$

$$: 0 \leq \beta$$

$$D = x + \beta + \frac{1}{2} (1 + \alpha) - \frac{1}{2} (1 - \alpha) = x + \beta$$

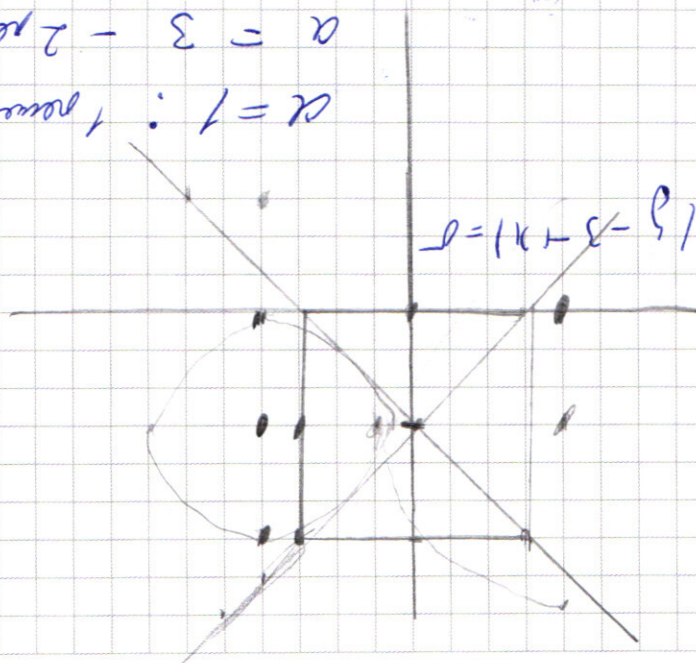
$$D = \beta$$

$$2\beta = 1$$

$$D = 1 : 1 \text{ point}$$

$$D = 3 - 2 \text{ points}$$

$$D \in (1, 3] - 2 \text{ points}$$



$$D = (1 - \beta) + \frac{1}{2} (1 - \alpha) = \beta$$

$$D = 1 - \alpha$$

$$D = 3 - \alpha$$

$$D = 3 + \alpha$$

$$D = 1 - \alpha$$

$$D = x$$

$$: 0 \leq x$$

$$+ \frac{1}{2} (1 - \alpha)$$