

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .

б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 6$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Разложим 3375 на множители  
 $3375 = 5 \cdot 3^3$

получается, что у нас возможны 2 набора цифр

1) 555 333 77 (7 не входит на произведение)

2) 555 · 9 · 3 · 7 · 7 (9 = 3 · 3) (другие цифры не входят)  
 м.л. 3; 5; 5; 5 > 70

Рассмотрим кол-во вариантов для 1)

I расставим 3 пятёрки на 8 мест (5 цифр!)

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56 \text{ вариантов}$$

II расставим 3 тройки на оставшиеся 5 мест

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10 \text{ вариантов}$$

III остальные заполняем единицами. м.л. I и II случаи не зависят друг от друга, перемножаем их и получаем 560 вариантов

Рассмотрим кол-во вариантов для 2)

I расставим 3 пятёрки (опять 56 вариантов)

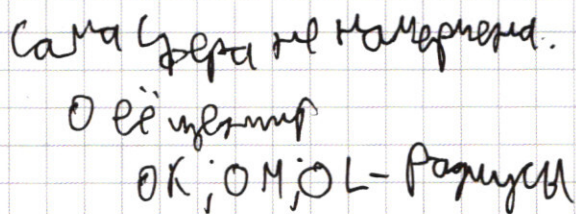
II расставим 3 единицы (опять 10 вариантов)  
 по м.л. 3; 9 отличаются, поэтому 2 варианта.

$$\text{перемножаем } 56 \cdot 10 \cdot 2 = 2 \cdot 560$$

$$\text{складываем I и II } 2 \cdot 560 + 560 = 3 \cdot 560 = 1680 \text{ вар.}$$

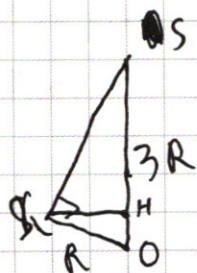
$$\begin{array}{r} + 560 \\ 3 \\ \hline 1680 \end{array}$$

Ответ: 1680 вар.



обозначим расстояние от S до верхней точки как  
за m, тогда расстояние от S до нижней =  $m + 2R$   
получаем пару подобных треугольников как в задаче  
определяем линейные размеры

molara SO = m + R = 3R per compunere  $\Delta$  KSO



$$\sin \angle RSO = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{7}{8}\right)$$

Werkstoff KLM  $\perp$  50 m.k.

$\Delta KSO = \Delta SLG = \Delta SMO$  "o" np. gary  
u2 important.

Назовём т. касательной KLM и SO за H

bei m. Kesselchen KLM u. SO zu H  
wegen  $HO = KO \cdot \cos \angle KOS$ , u.  $\cos \angle KOS = \sin \angle KSO \Rightarrow HO = KO \cdot \frac{1}{3}$

moaga  $SH = \frac{9}{3}R - \frac{7}{3}R = \frac{2}{3}R$

мы знаем, что на расстоянии 2R от S находится человек = 7

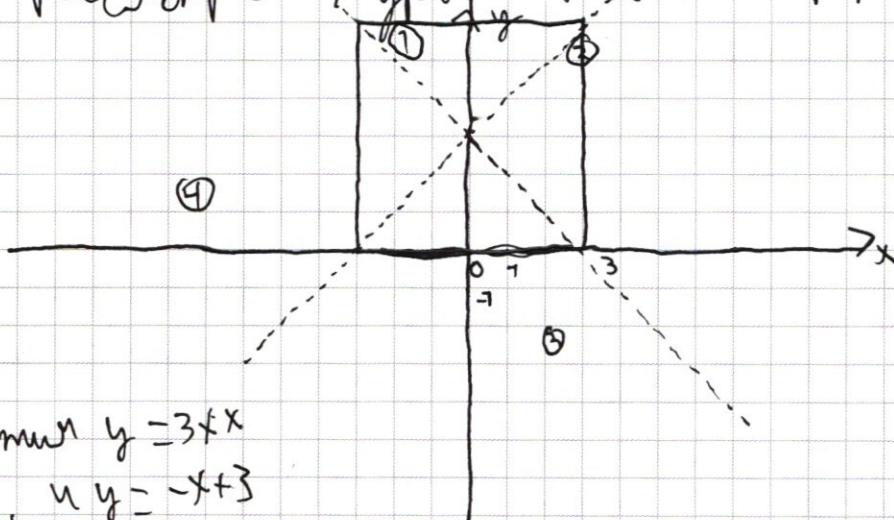
$$\frac{S(KLM)}{7} = \left( \frac{\frac{8}{3}R}{2R} \right)^2 = \frac{76}{9} \Rightarrow S(KLM) = \frac{76}{9}$$
 Außen:  $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right); S(KLM) = \frac{76}{9}$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) |y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$2) (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$$

рассмотрим 1 уравнение на графике  $x, y$



нарисуем  $y = 3+x$   
и  $y = 3-x$

чтобы понять как и где раскрывается модуль

в 7 частях графика

1й и 2й рассмотрим впр. 20

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ & y-3-x+y-3+x=6 \\ & 2y=12 \quad y=6 \end{aligned}$$

$$\text{в } 2': -y+3+x+y-3+x=6$$

$$\begin{aligned} 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\text{в } 3': -y+3+x-y+3-x=6$$

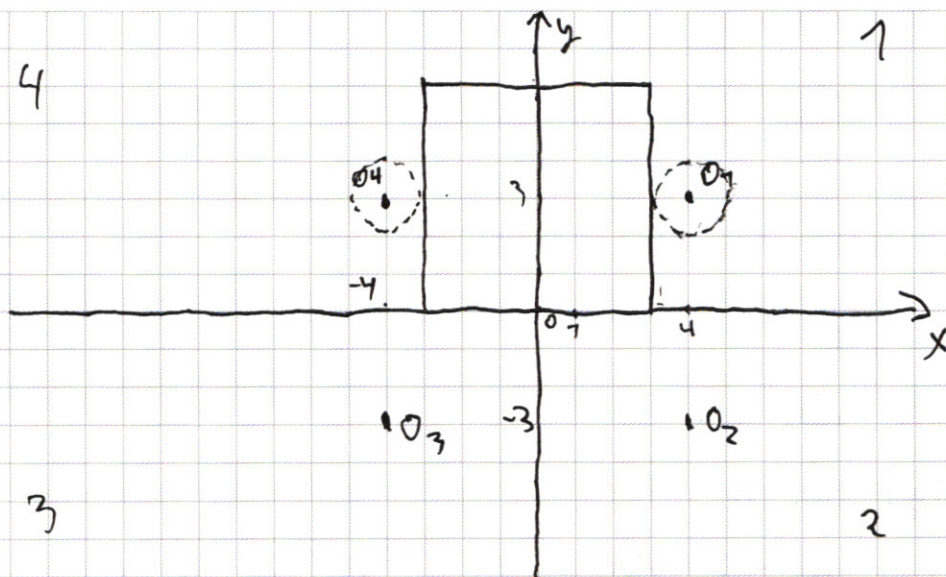
$$\begin{aligned} -2y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{в } 4': y-3-x-y+3-x=6$$

$$\begin{aligned} -2x &= 6 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

получился квадрат

перенесу его на след. стр. без  
объяснений



Рассмотрим 2 уравнения в 4 частях уравнения

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$$

1:  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$  это окр радиусом  $\sqrt{a}$  с ц. в  $x=4$   $y=3$

2:  $(x-4)^2 + (-y-3)^2 = a$  это окр радиусом  $\sqrt{a}$  и с ц. в  $x=4$   $y=-3$  м.г.   
 вогнутым вверх —

3:  $(-x-4)^2 + (-y-3)^2 = a$   $R=\sqrt{a}$  ц. в  $x=-4$   $y=-3$

4:  $(-x-4)^2 + (y-3)^2 = a$   $R=\sqrt{a}$  ц. в  $x=-4$   $y=3$

$a > 0$  м.г. это радиус окружности

при  $a < 1$  окружности не пересекаются, с квадратом   
 видно, что при  $a=1$   $O_1, O_4$  касаются квадрата

при  $a > 1$ ;  $a < 10$  окр.  $O_1$  и  $O_4$  имеют по 2 точки пересек.

при  $a=10$  окр 4 касаются квадрата   
  $(-3; 6) \cup (-3; 0)$

аналогично окр 1.

4 точки пересечения

при  $a > 10$ ;  $a < 25$  каждая окружность пересекает квадрат.

в 2 точке. ( точки пересек.  $O_4, O_3$  вогнутым   
  $O_1, O_2$  вогнутым )

при  $a=25$  2 точки пересечения в  $(0; 0)$  и все 4 окр.

и в  $(0; 6)$  или 4 и 1 окружности.

при  $a > 25$  окружности касаются окр 1 не пересекают квадрат   
 ответ:  $a=1; 25$



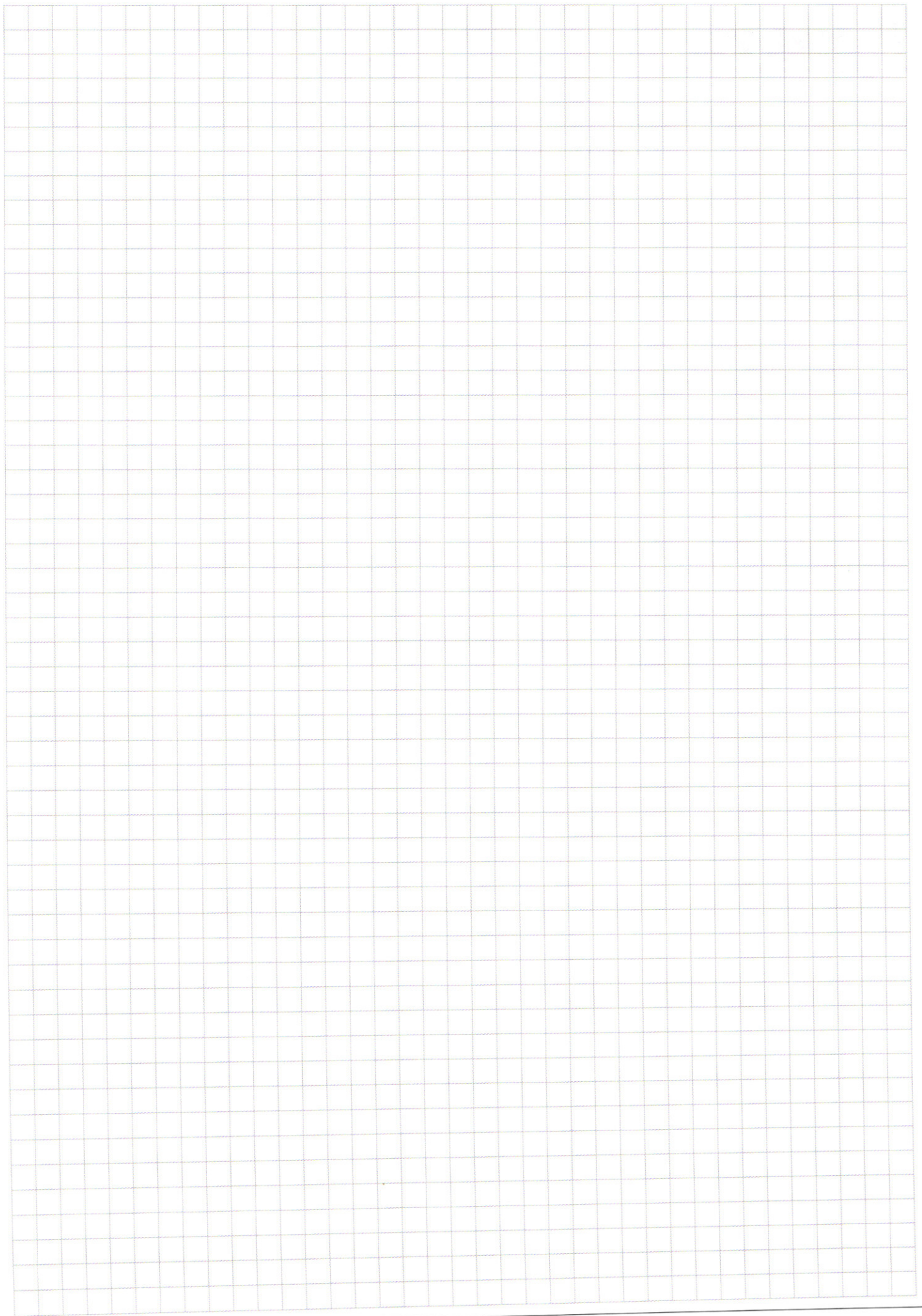
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Пусть  $xyz9$

$$125 \cdot 27 = 2500 + 700 + 140 + 31$$

$$\begin{array}{r} 4 \text{ по } 5 \\ 3 \text{ по } 3 \\ 1 \text{ по } 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 123 \\ 132 \\ 213 \\ 231 \\ 312 \\ 321 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 333 \\ 8 \cdot 7 \cdot 6 \\ 3! \end{array} = \boxed{56}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \mid 5 \\ \underline{30} \\ 27 \\ \underline{25} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \mid 5 \\ \underline{65} \\ 77 \\ \underline{75} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 3375 \mid 5 \\ \underline{33} \\ 75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \cdot 25 \\ 2 \end{array}$$

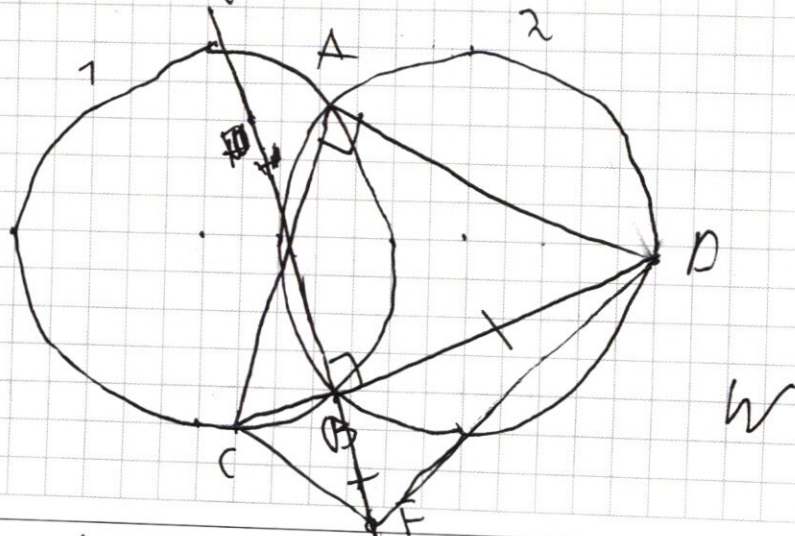
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \cos(3x + 11x)$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} (\cos 3x \cdot \cos 11x - \sin 3x \cdot \sin 11x)$$

$$\frac{y^{5/2} x}{x^{1/2}} = y^{2/2} x y$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 72y = 0$$



$$\sin(5x+2x) + \sin(5x-2x)$$

$$\cos(7x+4x) - \cos(7x-4x) - \sin(7x+4x) + \sin(7x-4x)$$

$$= \sqrt{2} \cdot \cos(2 \cdot 7x)$$

$$\cos 7x \cdot \cos 4x - \sin 7x \cdot \sin 4x - (\cos 7x \cdot \cos 4x - \sin 7x \cdot \sin 4x)$$

$$\cos 4x \quad \cos 7x$$

$$- \sin 7x \cdot \cos 4x - \sin 4x \cdot \cos 7x + \sin 7x \cdot \cos 4x - \sin$$

$$(\cos(7x+4x) - \cos(7x-4x)) = -2 \sin 7x \cdot \sin 4x$$

$$- \sin(7x+4x) + \sin(7x-4x) = -2 \sin 4x \cdot \cos 7x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cdot \cos(2 \cdot 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$= \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 72y = 0$$

$$x^2 - x(4+2y) - 3y^2 + 72y = 0$$

$$D = 16 + 16y + 4y^2 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16$$

$$x_{1,2} = \frac{4+y \pm \sqrt{(y-1)^2}}{2} = \frac{4+y \pm (y-1)}{2} = 2+y \pm (y-1)$$

$$x_1 = 3y$$

$$x_2 = 4-y$$

$$x_1 = 3y$$

$$\left( \frac{y^5}{3y} \right)$$

$$1y^3 = y^3$$

$$21y^3 = 21y^3$$

$$4(1y^3 + 1y^3) = 8y^3$$

$$2(1y^3 + 1y^3) = 4y^3$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

13

1)  $\left(\frac{y^5}{x}\right)' = y^{2/3} x y$

2)  $x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$

2'  $x^2 - x(2y + 4) - 3y^2 + 12y = 0$

$$D = b^2 - 4ac = 16 + 16y + 4y^2 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = (4(y-1))^2$$
$$x_{1,2} = \frac{2(y+2) \pm 4(y-1)}{2} \begin{cases} x_1 = 3y \\ x_2 = 4-y \end{cases}$$

12

$$\cos 7x - \cos 3x - \sin 7x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos(7x+4x) - \cos(7x-4x) - \sin(7x+4x) + \sin(7x-4x) = \sqrt{2} \cos(2 \cdot 7x)$$

перенесем левую часть:

$$(\cos 7x \cos 4x - \sin 7x \sin 4x) - (\cos 7x \cos 4x - \sin 7x \sin 4x) - (\sin 7x \cos 4x + \cos 7x \sin 4x) + (\sin 7x \cos 4x + \cos 7x \sin 4x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

перенесем правую часть:

$$\sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

получим:

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = (\sin 7x + \cos 7x) \cdot (-\sqrt{2} \cos 7x + \sqrt{2} \sin 7x)$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) \cdot (\sqrt{2} \cos 7x - \sqrt{2} \sin 7x + 2 \sin 4x) = 0$$

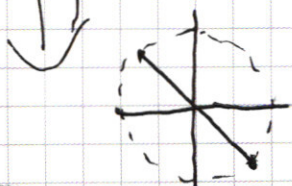
$$\sin 7x = -\cos 7x$$

или

= 0

~~$$\cos 7x = \sin(7x - \frac{\pi}{2})$$~~

~~$$\sin 7x = \sin(\frac{\pi}{2} - 7x)$$~~



$$\begin{cases} 7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \\ 7x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

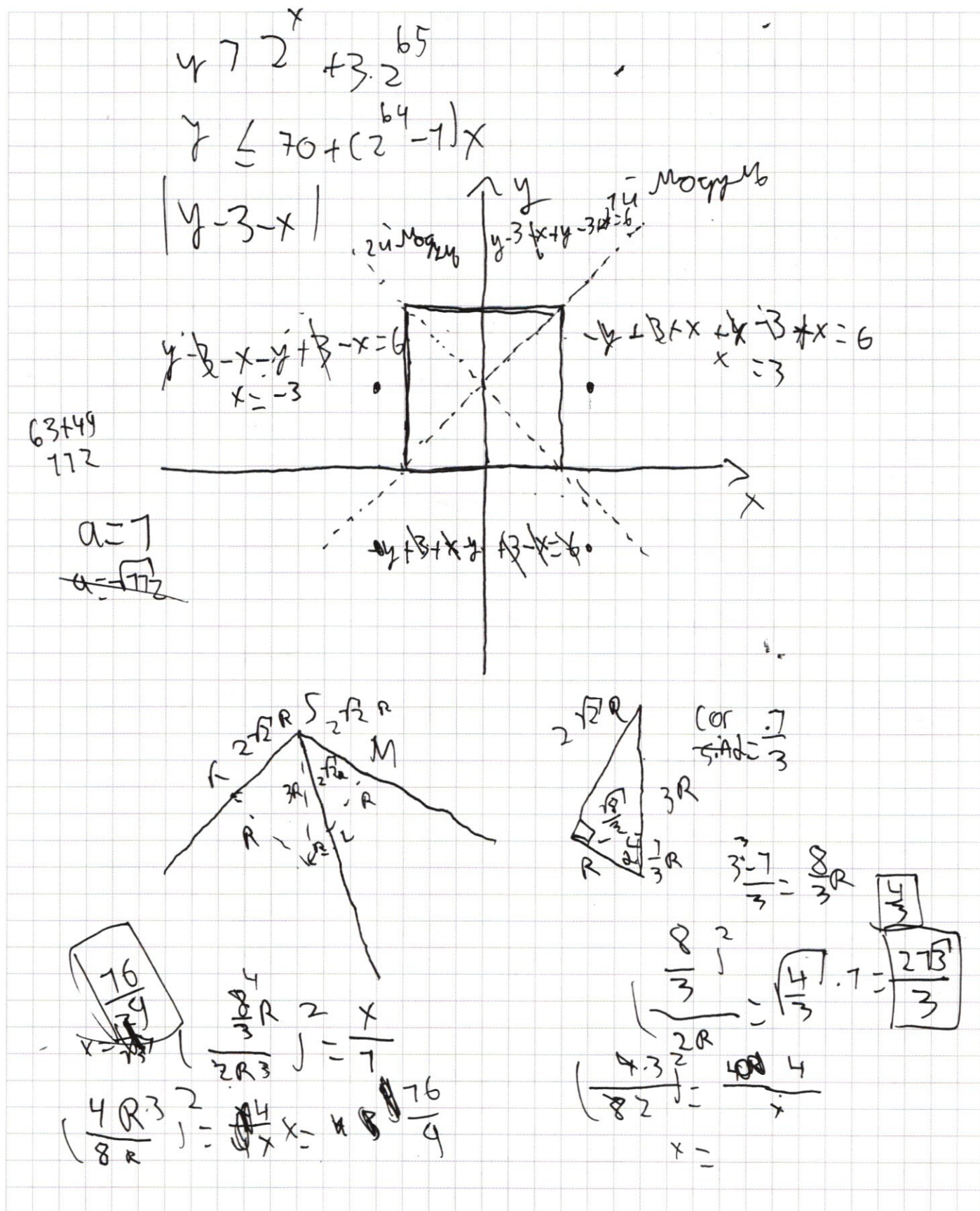
$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}k; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}n; n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}k, k \in \mathbb{Z} \\ x &= -\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$(\cos 7x - \cos 3x - \sin 7x + \sin 3x) = \sqrt{2} (\cos 4x - \sin 4x)$$

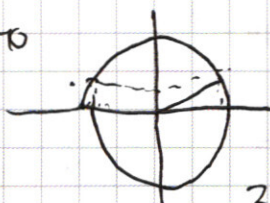
$$(\cos(7x+4x) - \cos(7x-4x) - \sin(4x+7x) + \sin(7x-4x)) = \sqrt{2} (\cos(2 \cdot 7x) - \sin(2 \cdot 7x))$$

$$\begin{aligned} & (\cos 7x \cos 4x - \sin 7x \sin 4x - \cos 7x \cos 4x - \sin 7x \sin 4x - \sin 4x \cos 7x - \cos 4x \sin 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) \\ & -2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) \end{aligned}$$

$$(\cos 7x + \sin 7x) (-2 \sin 4x - \sqrt{2} \cos 7x + \sqrt{2} \sin 7x)$$

55533  
55333  
53553  
35553  
35535  
35355  
33555  
53355  
53535  
55335

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$$



$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 75} \\ 30 \phantom{00} \\ \hline 375 \\ 30 \phantom{00} \\ \hline 75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33 \overline{) 5} \\ 30 \phantom{00} \\ \hline 25 \phantom{00} \\ 22 \phantom{00} \\ \hline 25 \phantom{00} \\ 22 \phantom{00} \\ \hline 25 \phantom{00} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2184 \overline{) 2184} \\ 2184 \phantom{00} \\ \hline 0 \phantom{00} \end{array}$$

555 333 777  
555 39 111

1) Перемножить 5

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$$

560 Rep.

2) Перемножить 3

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$$

Реш 5

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$$

Реш 7

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$$

Реш 3; 92B.

$$\cos 7x = \cos \frac{7}{2} \cdot 2x$$

$$\sin x = \cos \frac{\pi}{2} - x$$

$$\cos 7x = -\sin 7x$$

$$1 - \sin^2 7x = \sin^2 7x$$

$$2 \sin^2 7x = 1$$

$$\sin^2 7x = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 7x = \frac{1}{2}$$

Сумма

3.560 Rep.

$$7 \leq 70 + 6 \cdot 2$$

$$7 \leq 70 + 6 \cdot 2$$

$$4 \leq 70 + 6 \cdot 2$$

$$4 \leq 70 + 6 \cdot 2$$