

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$3375 = 15^3 = 3^3 \cdot 5^3 \quad (0.1 \text{ выходов})$$

Это значит, что в данных числах могут быть только цифры "3": 3, "5": 5, "9": 3^2 и "1": 1 (других множителей быть не может).

Значит итоговое множество чисел состоит из объединения множеств чисел, содержащих:

I $3 \times "3"$
 $3 \times "5"$
 $2 \times "1"$

и

II $1 \times "9"$
 $1 \times "3"$
 $3 \times "5"$
 $3 \times "1"$

(сумма кол-во каждой цифры везде равна 8, значит "ост." цифры - возн. "1")

$$I = C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = ~~56 \cdot 10 \cdot 1~~ 56 \cdot 10 \cdot 1 = 560 \text{ (чисел I-ой группы)}$$

$$II = C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = 56 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 1 = 1120 \text{ (чисел во 2-ой)}$$

("5", "1", "9", "3")

$$I + II = 1680$$

Ответ: 1680

N2

$$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x + \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x \quad \cos$$

$$\left(-2 \sin \frac{11-3}{2} x \sin \frac{11+3}{2} x\right) - \left(2 \sin \frac{11-3}{2} x \cos \frac{11+3}{2} x\right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$\cos$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos(2 \cdot 7x) \quad / : \sqrt{2}$$

$$0 = \cos(2 \cdot 7x) + \sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x)$$

$$0 = (\cos^2 7x - \sin^2 7x) + (\cos 7x + \sin 7x) \cdot \sqrt{2} \sin 4x$$

$$(\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 7x + \sin 7x = 0 & \cos 7x \neq 0 \\ \cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x = 0 \end{cases} \begin{cases} \operatorname{tg} 7x = -1 \\ \dots \end{cases} \begin{cases} 7x = \frac{3\pi}{4} + \pi k \\ \downarrow \\ x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} \end{cases}$$

$$\rightarrow (\cos 3x \cos 4x - \sin 3x \sin 4x) - \sin 3x \cos 4x - \sin 4x \cos 3x + \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

$$\sin 4x (\sqrt{2} - \sin 3x - \cos 3x) + \cos 4x (\cos 3x - \sin 3x) = 0$$

$$\sin 4x (\sqrt{2} - \sin x (3 - 4\sin^2 x) - \cos x (4\cos^2 x - 3)) + (\cos x (4\cos^2 x - 3) - \sin x (3 - 4\sin^2 x)) = 0$$

$$\boxed{\text{Ответ (частичный): } x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$I \int \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^2 \lg xy,$$

$$II \quad x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$I \quad y^{5 \lg x} = y^{2(\lg x + \lg y)} \cdot x^{\lg x}$$

$$(x > 0) \quad xy > 0 \Rightarrow (y > 0)$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{y^{2 \lg x}} = y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$y^{3 \lg x} = y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x} \quad (y = 10^{\lg y}; \quad x = 10^{\lg x})$$

$$(10^{\lg y})^{3 \lg x} = (10^{\lg y})^{2 \lg y} \cdot (10^{\lg x})^{\lg x} \quad 10^{3 \lg x \lg y} = 10^{2 \lg y^2} \cdot 10^{\lg^2 x}$$

Пусть $a = \lg x$; $b = \lg y$, тогда

$$10^{3ab} = 10^{(2b^2 + a^2)}$$

$$a^2 + 2b^2 = 3ab \quad | : b^2 \quad \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 3 \frac{a}{b} + 2 = 0$$

(квадратное уравн. отн. $\frac{a}{b}$, ~~и~~ по теореме Виета $\left(\frac{a}{b} \right)_{1,2} = 1; 2$)

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = 1 \\ \frac{a}{b} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg x = \lg y \\ \lg x = 2 \lg y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x = y^2 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$I \quad \begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \\ y = x \\ y^2 = x \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x^2 + 8x = 0 \quad | : -4x \neq 0 \\ y = x \\ x = y^2 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad | : y \neq 0$$

$$II \quad \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$I \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-3)(y^2+y-4) = 0 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 3^2 \quad y_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = -2; \frac{1}{2}$$

Ответ: $(2, 2), (9, 3), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

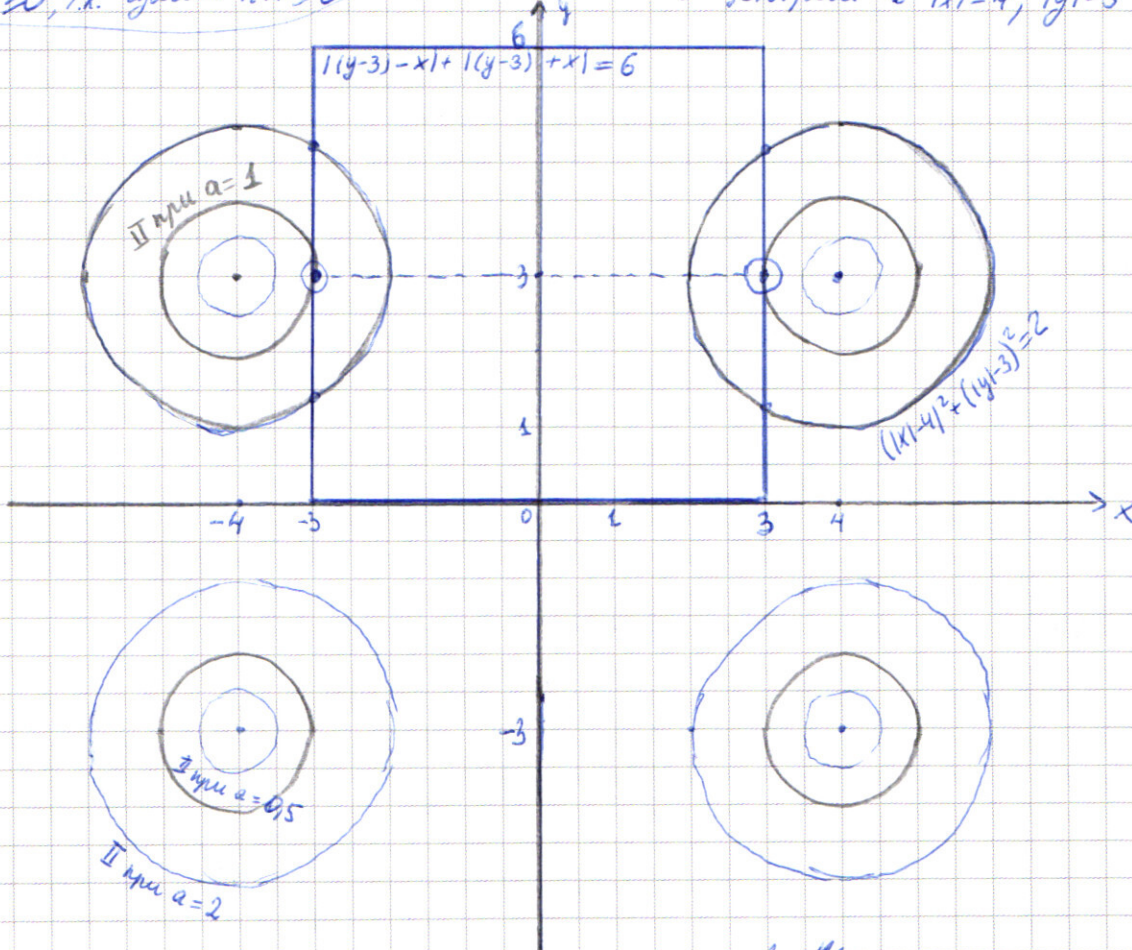
№5

Решим задачу графически:

I $|y-3-x| + |y-3+x| = 6$, — квадрат со шлещ. центром в $(0; 3)$ и стороной = 6

II $(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$ — окружность с центром в $(4; 3)$ и радиусом $\sqrt{a}$

$a \geq 0$, т.к. сумма кв. ≥ 0



* графики построены по точкам ~~на основе~~ ~~исхода~~

Анализируя график, можем понять, что параметр "а" ответственен за радиус окружностей, то бишь при изменении а, окружности либо не пересекаются с прямоугольником, либо пересекают его в 4х (и более) точках (при $a > 1$), либо касаются ровно в двух точках: $(3; 3)$ и $(-3; 3)$. В такой ситуации $a = \frac{(3-3)^2 + (3-4)^2}{2} = 0.5$ (расстояние от точки пересечения до ближайшей окружности). В

Других а, у нас нет, т.к. при увеличении есть уже 4 пересечения, а у нас — ни одного

Ответ: 1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

Дано: две окр. ω_1, ω_2 с радиусом $r=5$

$$\omega_1 \cap \omega_2 = \{A; B\}$$

$$(\cdot)C \in \omega_1, (\cdot)D \in \omega_2$$

$$(\cdot)B \in [CD], \angle CAD = 90^\circ$$

$$[BF] \perp [CD], |BF| = |BD|$$

$$(\cdot)A \text{ и } F \text{ в разных пол-ях от } (CD)$$

$$a) |CF| = ?$$

$$b) S_{\triangle ACF} = ?, \text{ если } |BC| = 6$$

$$N7 \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \quad \text{Сколько таких пар } (x, y)?$$

Заметим, что первый x , при котором изис. хотя бы $1 \leq y = 61$

$$x=6: \text{ I) } 2^x + 3 \cdot 2^{65} = 2^6 + 6 \cdot 2^{64}$$

$$\text{II) } 70 + (2^{64} - 1)x = 2^6 + (2^3 - 6) + 6 \cdot 2^{64}$$

Далее буду использовать обозначения I и II, чтобы говорить о ~~ка-~~ ка-бе y , подходящих к ответу, то есть $y \in \mathbb{Z}$, $y > \text{I}$ и $y \leq \text{II} \Rightarrow$

кол-во y для конкретного $x_0 = \text{разность } \text{II}(x_0) - \text{I}(x_0)$

$$\text{II}(6) - \text{I}(6) = \cancel{2^6 + 2} + \cancel{6 \cdot 2^{64}} - (\cancel{2^6 + 6 \cdot 2^{64}}) = 2 \quad (\text{при левом } x \text{ разность отриц.})$$

Далее поймем, что на шаг $x = x+1$ к I части добавляется 2^x ,

$$\text{а ко II} = (2^{64} - 1).$$

Это значит, что разность II-I увеличится на $(2^{64} - 1 - 2^x)$, то есть

$$\text{II}(x+1) - \text{I}(x+1) = \text{II}(x) - \text{I}(x) + 2^{64} - 1 - 2^x,$$

а наш ответ = сумма всех неотрицательных $\text{II}(x) - \text{I}(x)$:

$$\sum \text{II} - \text{I} = \underset{(x=6)}{2} + \underset{(x=7)}{(2^{64} - 1 - 2^6)} + \underset{(x=8)}{(2^{64} - 1 - 2^7)} + \underset{(x=9)}{(2^{64} - 1 - 2^8)} + \dots + \underset{(x=64)}{(2^{64} - 1 - 2^{63})}$$

Заметим,

следующее слагаемое $= 2^{64} - 1 - 2^{64} = -1$ — нас не интересует, т.к. тогда больше не найдется целого "y" на отрезке от I до II

Весь ответ уже получен, осталось упростить запись

$$\sum \text{II} - \text{I} = 2 + (64-6)(2^{64} - 1) - (2^6 + 2^7 + 2^8 + \dots + 2^{63}) =$$

~~то~~

$$= 2 + 58 \cdot 2^{64} - 58 - 2^6 (1 + 2^1 + 2^1 + \dots + 2^{63-6}) = 58 \cdot 2^{64} - 56 - 2^6 (2^{58} - 1) =$$

$$= 58 \cdot 2^{64} - 2^{64} + 2^6 - 56 = 57 \cdot 2^{64} + 8$$

$$\boxed{\text{Ответ: } 57 \cdot 2^{64} + 8}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Дано: сфера с центром O

вписана в трихгр. $\angle S$ и кас.

ей в $(\cdot) K, L, M$

Сечения k_1 и k_2 перпенд. SO

$S(k_1) = 1, S(k_2) = 4$

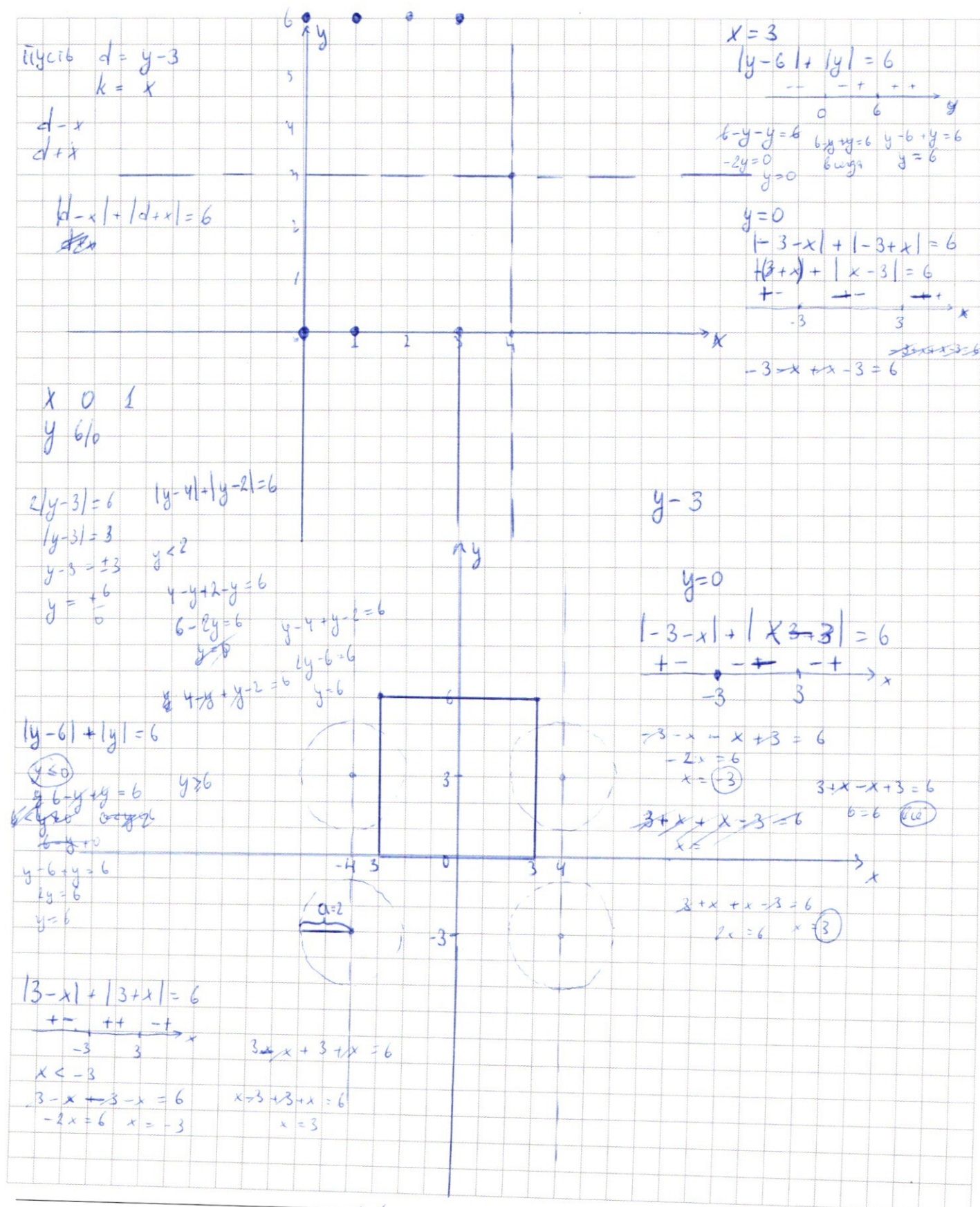
Найти: $\angle KSO = ?$

$S(\text{сеч. } (KLM)) = ?$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 4x \sin 7x$$

$$-(\sin 11x - \sin 3x) = -(2 \sin 4x \cos 7x)$$

~~$2 \sin 4x$~~

$$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \sin 7x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos(2 \cdot 7x)$$

$$-2\sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \sqrt{2} \cos(11x)$$

$$\underline{\text{Ex}} \quad -4 \cos 2x \sin 2x (\sin 7x - \cos 7x) = \sqrt{2} 2 \cos^2 7x - \sqrt{2}$$

~~$\cos 11x + \sin 3x = (\sin 11x + \cos 3x)$~~

~~$$\rightarrow \frac{1}{2} \sin 4x / \sin(3x+4x) = \cos(3x+4x)$$~~

$$-2\sqrt{2} \cos 2x \sin 2x (-1) = 2 \cos^2 7x - 1$$

$$\sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \cos^2 7x - \sin^2 7x$$

$$\sqrt{2} \sin 4x (\cos 7x - \sin 7x) = \cos^2 7x -$$

$$(\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x) = 0$$

$$\cos 2x + \sin 7x = 0$$

$$\sin 7x = -\cos 7x$$

$$\lg 7x = -1$$

$$|\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2}\sin 4x| = 0$$

$$\cos(7x) = (\text{formula 3 and 4}) \quad \cos 3x \cos 4x - \sin 3x \sin 4x$$

$$\sin(7x) = \sin 3x \cos 4x + \sin 4x \cos 3x$$

$$\begin{array}{r} y^3 - 2y^2 - 7y + 12 \\ -(y^3 - 3y^2 + y - 4) \\ \hline y^2 - 7y + 12 \\ -(y^2 + y - 4) \\ \hline -8y + 16 \\ +8y - 16 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 4 \ 2 \ 3 \end{array} \begin{array}{r} -2 \ 1 \ 0 \ 1 \\ -7 \ 1 \ -4 \end{array} \begin{array}{r} 12 \\ 12 \end{array}$$

$$-4x^2 + 8x = 0$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

~~$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg xy} \cdot y^{\lg xy} \cdot x^{\lg x}$$~~

~~$$y^{5 \cdot \lg_{10} x} = y^{2 \lg_{10} x}$$~~

$$y^{5 \cdot \lg x} = y^{2(\lg x + \lg y)} \cdot x^{\lg x}$$

$$x = x^{\lg 10} = 10^{\lg x}$$

$$y = 10^{\lg_{10} 10} = 10^{\lg y}$$

~~$$y^{5 \lg x} =$$~~

$$(10^{\lg y})^{5 \lg x} = (10^{\lg y})^{2 \lg xy}$$

$$10^{5 \lg x \lg y} = 10^{2 \lg xy} \cdot 10^{\lg x^2}$$

$$10^{5 \lg x \lg y} - 10^{(2 \lg xy - \lg x^2)} = 0$$

$$(5 \lg x \lg y - (2 \lg xy - \lg x^2)) = 0$$

$$\text{Пусть } \lg x = a \quad \lg y = b$$

$$5ab - 2(a+b) + a^2 = 0$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{y^{2 \lg xy}} = x^{\lg x}$$

$$\frac{(5 \lg x - 2 \lg xy)}{y} = x^{\lg x}$$

$$y^{5 \lg x - 2 \lg x - 2 \lg y} = x^{\lg x}$$

$$y^{3 \lg x - 2 \lg y^2} = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg x}$$

$$(10^{\lg y})^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = 10^{\lg^2 x}$$

$$\lg y \lg \frac{x^3}{y^2} = \lg^2 x$$

$$\frac{a}{b} = 1$$

$$\frac{a}{b} = 2$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{y^{2 \lg x}} = y^{2 \lg x} y^{2 \lg y} x^{\lg x}$$

$$y^{3 \lg x} = y^{2 \lg y} x^{\lg x}$$

$$10^{3 \lg x \lg y} = 10^{2 \lg y^2} \cdot 10^{\lg x^2}$$

$$3 \lg x \lg y = 2 \lg^2 y + \lg^2 x$$

$$3ab = 2b^2 + a^2$$

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{3a}{b} + 2 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Кол-во цифр, произв. цифр каждого = 3375 (3)

№2. $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$ (5)

№3

$$\int \left(\frac{y^5}{x} \right)^{1/9} dx = y^{2/9} \ln xy,$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

1	2	3	4	5	6	7
V	V	V	V	V	V	V

(5)

$$x^2 - y^2 = R$$

№5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

при каких "a" ровно 4 решения!

(5)

~~при~~ $y = -3$ $|-6-x| + |-6+x| = 6$

№7

Найти кол-во пар целых $(x; y)$, удовлетв. системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

(6)

* ответ может быть суммой не более 2х слагаемых

$$\begin{array}{r} 3375 | 5 \\ 675 | 5 \\ 135 | 5 \\ 27 | 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 225 | \\ 15 | \\ 1125 | \\ 2250 | \\ 2375 | \end{array}$$

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

$$3:3, 5:5, 9:3^2, 1:1$$

3 тройки, 5 пятёрок, 2 единицы
+ 1 девятка, 1 тройка, 3 пятёрки, 3 ед.

$$\frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ X & - & X & - & X & - & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \end{array}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 5$$

№4

$$y > 2^{66} + 2^{65} + 2^x$$

$$y \leq 2^{66} + 2^{63} + 2$$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x(1 + 3 \cdot 2^{65-x}) < y \leq 70 + x$$

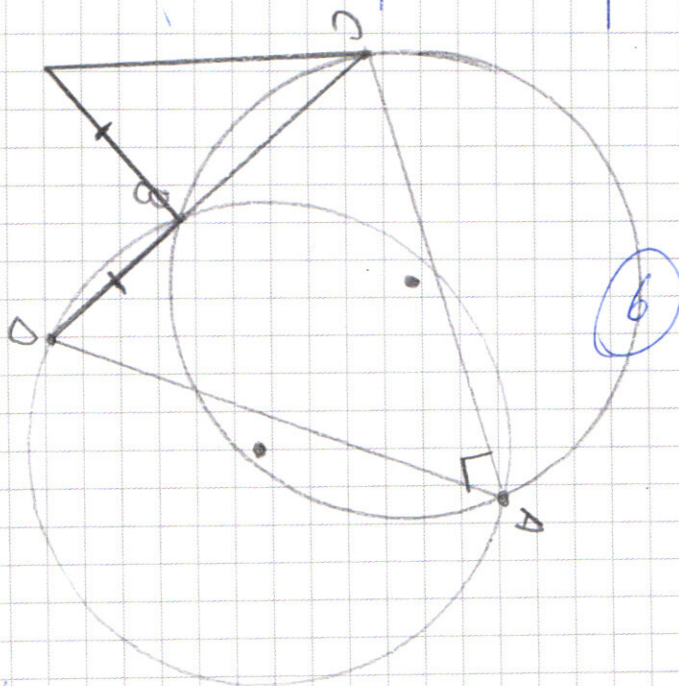
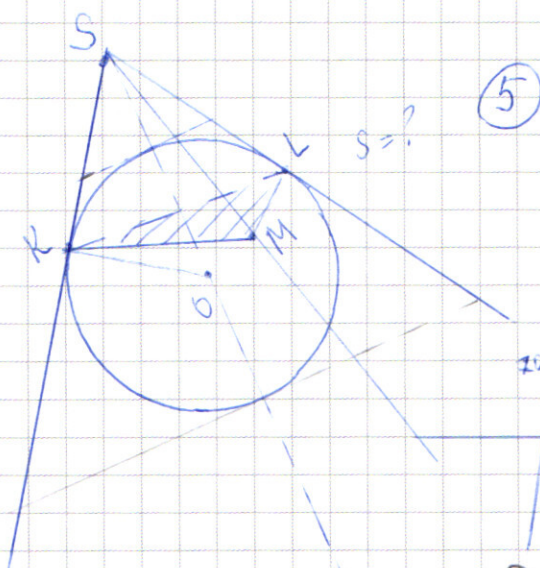
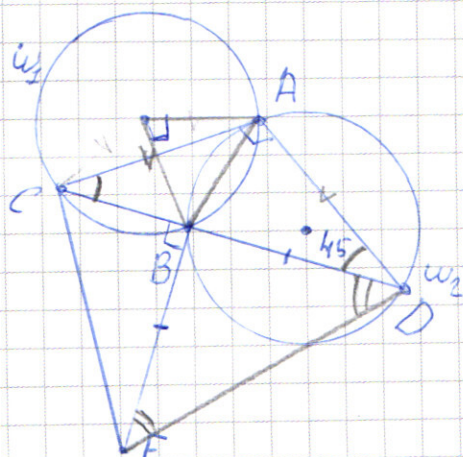
$$x=0$$

$$2 + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + 2^{64} - 1$$

№6

$$4 + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + 2^{65} - 2$$

$$16 + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + 2^{66} - 4$$



$$(\cos 3x \cos 4x - \sin 3x \sin 4x) - \frac{1}{2} \sin 3x \cos 4x + \sin 4x \cos 3x \frac{3}{2} + \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

$$\sin 4x (\sqrt{2} - \sin 3x - \cos 3x) + \cos 4x (\cos 3x - \sin 3x) = 0$$

$$2 \sin 2x \cos 2x (\sqrt{2} - \sin x (3 - 4 \sin^2 x) - \cos x (4 \cos^2 x - 3)) +$$



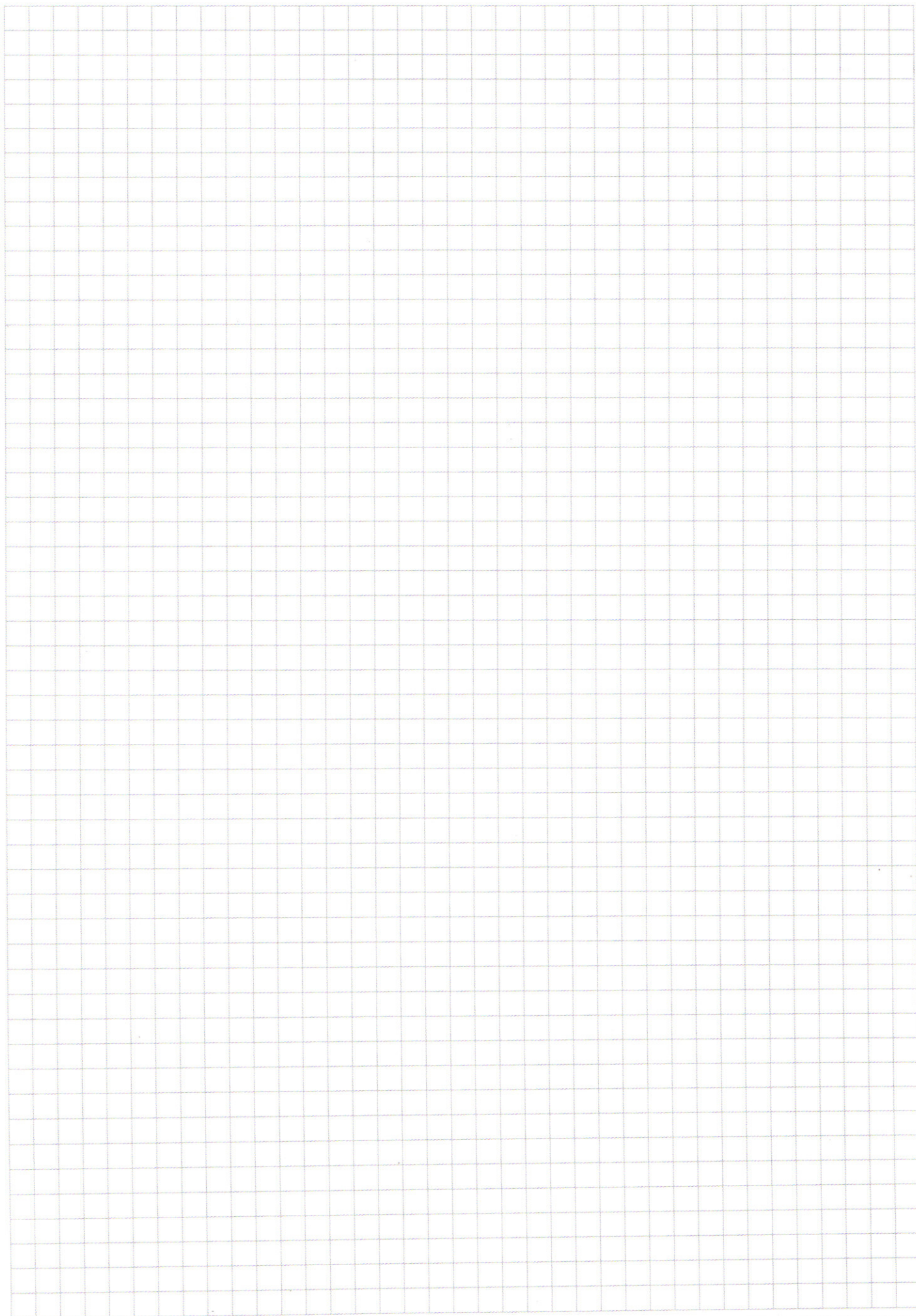
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)