

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$3375 = 27 \cdot 125 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Так как произведение цифр можно разложить на три 3 и три 5, то восьмизначное число может состоять из: 1) трех 5, трех 3 и двух 1; 2) трех 5, одной 3, одной ~~два~~ 9 и трех ~~два~~ 1. Чтобы вычислить количество возможных чисел, состоящих из разных цифр, в первом случае нужно использовать формулу

$$\frac{8!}{3!3!2!}, \text{ а во втором} - \frac{8!}{3!3!}. \text{ Тогда}$$

$$\frac{8!}{3!3!2!} + \frac{8!}{3!3!} = \frac{8!}{(3!)^2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} \cdot \frac{3}{2} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$$

Ответ: 1680.

№ 3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\frac{1}{2}x} = y^{2\frac{1}{2}x} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 9y^2 - 2xy + 6y^2 - 4x + 12y = 0 \\ \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\frac{1}{2}x} = y^{2\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}y} \end{cases}$$

$$x > 0; y > 0$$

$$\begin{cases} (x-3y)(x+3y) - 2y(x-3y) - 4(x-3y) = 0 \\ \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\frac{1}{2}x} = y^{2\frac{1}{2}x} \cdot y^{2\frac{1}{2}y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3y)(x+y-4) = 0 \\ \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\frac{1}{2}x} = y^{2\frac{1}{2}x} \cdot y^{2\frac{1}{2}y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3y)(x+y-4) = 0 \\ \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\frac{1}{2}x} = y^{2\frac{1}{2}x} \cdot y^{2\frac{1}{2}y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3y)(x+y-4) = 0 \\ \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\frac{1}{2}x} = y^{2\frac{1}{2}x} \cdot y^{2\frac{1}{2}y} \end{cases}$$

$$1) x = 3y$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3x} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg 3x}$$

$$y^{4\lg 3x} = y^{2\lg x} \cdot 3^{\lg 3x} \cdot y^{2\lg 3x}$$

$$y^{2\lg 3x} = y^{2\lg x} \cdot 3^{\lg 3x}$$

$$y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg 3} = y^{2\lg x} \cdot 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg x}$$

$$y^{\lg 3} = 3^{\lg 3}$$

$$y = 3 \quad x = 9$$

$$y^{\lg 3x} > 0$$

$$2) x = 4 - y \Rightarrow y < 4$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg y} \cdot y^{2\lg(4-y)}$$

$$y^{5\lg(4-y)} = y^{2\lg y} \cdot y^{2\lg(4-y)} \cdot (4y)^{\lg(4-y)}$$

$$3\lg(4-y) \lg y = 2\lg y \cdot \lg y + 2\lg(4-y) \cdot \lg y + \lg(4-y) \cdot \lg(4-y)$$

$$\begin{cases} \lg y = a \\ \lg(4-y) = b \end{cases}$$

$$2a^2 + b^2 = 3ab$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$$

$$b(b-2a) - a(b-2a) = 0$$

$$(b-a)(b-2a) = 0$$

$$2.1) b = a$$

$$\lg(4-y) = \lg y$$

$$4-y = y$$

$$y = 2 \quad x = 2$$

$$2.2) b = 2a$$

$$\lg(4-y) = \lg y^2$$

$$4-y = y^2$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ 0 < y < 4 \end{cases}$$

$$\frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \Rightarrow \text{Не подходит}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} < 4$$

$$\sqrt{17} < 9$$

$$17 < 81$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} < 4$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Ответ: } (9; 3); (2; 2); \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)$$

N 2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x = \cos 14x$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos 11x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 11x - (\cos \frac{\pi}{4} \cos 3x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 3x) = \cos 14x$$

$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) - \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin(7x + \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

$$-\sin 4x \cdot \sin(7x + \frac{\pi}{4}) = \frac{2}{4} \cos^2 7x - \frac{2}{4} \sin^2 7x$$

$$-\sin 4x \cdot \sin(7x + \frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x) (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x)$$

$$-\sin 4x \cdot \sin(7x + \frac{\pi}{4}) = \cos(7x + \frac{\pi}{4}) \cdot \sin 7x$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) (\cos(7x + \frac{\pi}{4}) + \sin 4x) = 0$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) (\sin(\frac{\pi}{2} - 7x) + \sin 4x) = 0$$

$$\frac{1}{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4}) \sin(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x) \cdot \cos(\frac{\pi}{8} - \frac{11}{2}x) = 0$$

$$1) \sin(7x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sqrt{x} + \frac{\pi}{4} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{x} = \frac{\pi k}{4} - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$3) \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi m}{11}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

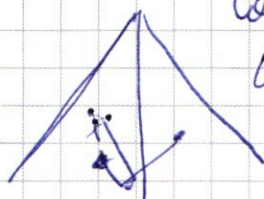
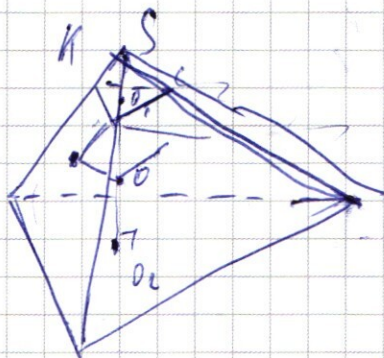
$$x = \frac{\pi k}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi m}{11}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{4}, \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi n}{3}; -\frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi m}{11}, \quad k, n, m \in \mathbb{Z}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4} - 11x)$$

$$\cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 3x$$

$$k=2$$

$$n=2$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}(\cos 14x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x - (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x) = \cos 14x$$

$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) - \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

$$-2 \sin(7x + \frac{\pi}{4}) \cdot \sin 4x = \cos 14x = 1 - 2 \sin^2 7x$$

$$\sin^2 7x - \cos(11x + \frac{\pi}{4}) = 2 \sin^2 7x - \cos(11x + \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\sin^2 7x$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{5/2} = y^{2/5} x^{3/2}$$

$$\frac{y^{5/2} x}{x^{5/2}} = y^{2/5} x^{3/2} \cdot \frac{y^{5/2}}{y^{5/2}} = y^{2/5} x^{3/2}$$

$$x^2 - 2xy - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 9y^2 - 2xy + 6y^2 - 4x + 12y = 0$$

$$(x-3)(x+6y-4) = 0$$

$$x=3$$

$$y^{3/2} = y^{2/5} \cdot 3^{3/2}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^{3 \lg x} = y^{2 \lg x} \cdot x^{\lg x}$$

$$x^2 - 9y^2 - 2xy + 6y^2 - 4x + 12y = 0$$

$$(x-3y)(x+3y) - 2y(x-3y) - 4(x-3y) = 0$$

$$(x-3y)(x+y-4) = 0$$

$$x = 3y$$

$$y = \frac{y^3 \lg 3y}{y^2 \lg y \cdot y \lg 3y} = \frac{y^2 \lg 3y}{y \lg y \cdot y \lg 3y} = \frac{y \lg 3y}{y \lg y} = \frac{\lg 3y}{\lg y}$$

$$\left(\frac{y}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$x = 4 - y$$

$$y^{\lg(4-y)^3} = y^{\lg y^2}$$

$$y^{4 \lg 3y} - 3y^{4 \lg 3y} \cdot 3^{\lg 3y} = 0$$

$$y^{4 \lg 3y} (1 - 3^{\lg 3y}) = 0$$

$$1 - 3^{\lg 3y} = 0$$

$$3^{\lg 3y} = 3^0$$

$$\lg 3y = 0$$

$$y = 1$$

$$\left(\frac{y}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3} \cdot y^{\lg y}$$

$$\left(\frac{y}{3}\right)^{\lg 3y} \cdot \left(\frac{y}{3}\right)^{\lg y} = y^{2 \lg 3} \cdot y^{\lg y}$$

$$y^{4 \lg 3} \cdot y^{4 \lg y} = y^{2 \lg 3} \cdot y^{4 \lg y} \cdot 3^{\lg 3} \cdot y^{\lg y} > 0$$

$$y^{\lg 3} = 3^{\lg 3}$$

$$y = 3 \quad x = 4 \quad 2 \lg 9 = 9^{\lg 2x}$$

$$x = 4 - y \quad x > 0 \quad y > 0$$

$$\left(\frac{y^3}{4-y}\right)^{\lg 4-y} = y^{2 \lg(4-y)y}$$

$$y^{3 \lg(4-y)} = y^{2 \lg(4-y)} \cdot y^{2 \lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$3 \lg(4-y) \cdot \lg y = 2 \lg y \cdot \lg y + \lg(4-y) \cdot \lg(4-y) \quad D = 1 + 16 = 17$$

$$\lg(4-y) = +2 \lg y$$

$$4-y = y^2 \quad y^2 + y - 4 = 0$$

$$\lg(4-y) = \lg y$$

$$4-y = y \quad y = 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3375 = 5 \cdot 675 = 5 \cdot 5 \cdot 135 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 27 =$$

$$= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 9} = 560$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\log x} = y^2 \log x$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\frac{y^5 \log y}{x^{\log x}} = y^2 \log x + y^2 \log y$$

$$\frac{y^3 \log x}{x^2 - 2xy + y^2} = y^2 \log x \cdot x^{\log x}$$

$$\cos 11x - \cos 3x + \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 7x - 2 \cos 4x \cdot \sin 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin 4x \cdot \sin 7x + \cos 4x \cdot \sin 7x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x$$

$$(\sin 4x + \cos 4x) \sin 7x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x$$

$$(\sin 4x + \cos 4x) \sin 7x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x$$

$$\sin(4x + \frac{\pi}{4}) - \sin 7x \sin 7x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \cos\left(\frac{4x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi - 3x}{2}\right) \cdot \sin 7x = -\frac{1}{2}$$

$$\mu_1 - 11.20$$

$$\mu_2 -$$

$$\mu_3 - (9,3)(2,2) \left(\frac{9-1}{4}, \frac{9-1}{4} \right)$$

$$\mu_4 -$$

$$\mu_5 -$$

$$\mu_6 -$$

$$\mu_7 -$$

$$\frac{11!}{8!9!}$$

$$\frac{9! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10!}{10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10!}$$

$$\frac{9! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10!}{10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10!}$$

$$\frac{4!}{2!3!2!} = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\frac{4!}{2!3!2!} = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\frac{4!}{2!3!2!} = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\frac{4!}{2!3!2!} = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\frac{4!}{2!3!2!} = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\frac{4!}{2!3!2!} = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\frac{4!}{2!3!2!} = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\frac{4!}{2!3!2!} = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\frac{4!}{2!3!2!} = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\frac{4!}{2!3!2!} = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\frac{4!}{2!3!2!} = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\frac{4!}{2!3!2!} = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

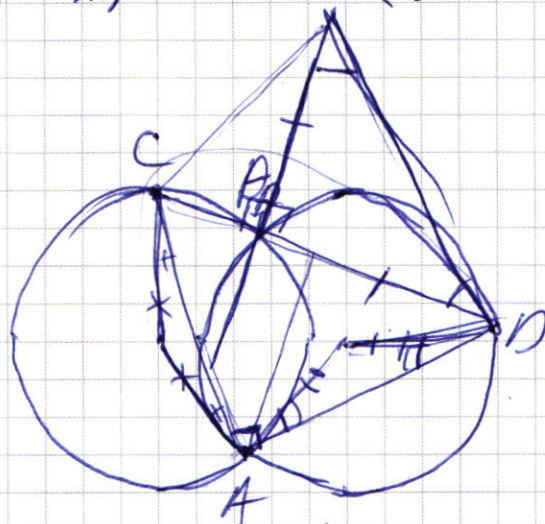
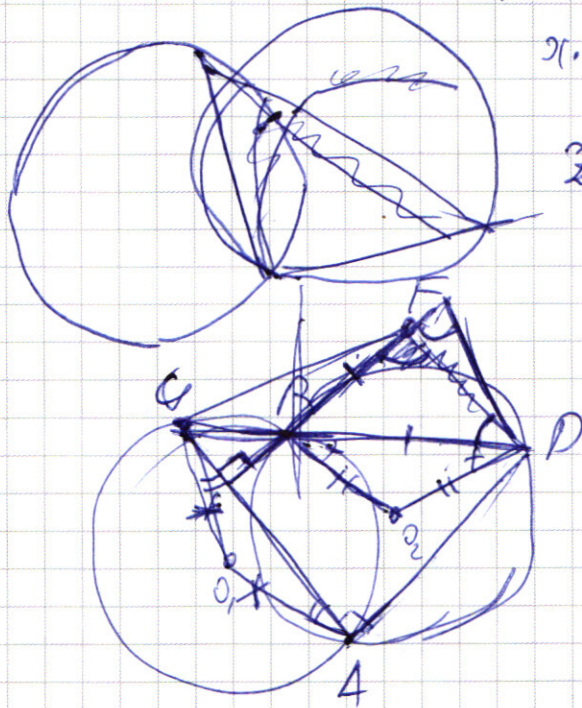
$$\frac{4!}{2!3!2!} = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\frac{4!}{2!3!2!} = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$x(2^{64} - 1) + 40 > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$x \cdot 2^{64} - x + 40 > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^{64}(6-x) + 2^x - 20 + x^F < 0$$



$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 3x - \sin 3x) = \cos 14x \quad 2^{64}(6-x) - (6-x) + 2^x - 2^{65}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \cos 14x \quad 64 + \log_2(6-x) - \log_2(6-x) + x - 65$$

$$2 \cos 7x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = \cos 14x \quad \log_2(6-x)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 3x - \cos 3x - (\sin 11x - \cos 11x)) = \cos 14x$$

$$\sin(3x - \frac{\pi}{4})$$

$$+ \cos(11x + \frac{\pi}{4}) - \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = 2 \sin 4x \cdot \sin(4x + \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

$$2 \sin 4x = 1$$

$$x = \frac{3\pi}{16}$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 7x = 2 \cos 4x \cdot \sin 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2(\sin 7x (\sin 4x + \cos 4x)) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin(4x + \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

$$\sin 7x \cdot \sin(4x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2} + \sin^2 7x$$

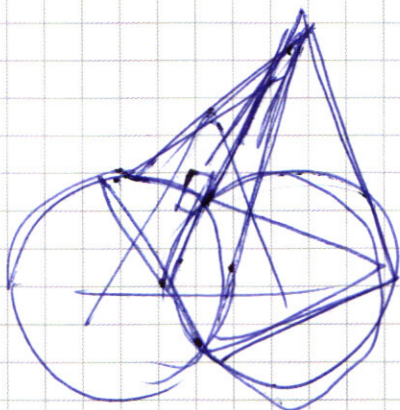
$$\log_2 2^{64}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle CAB = 2\angle CO_1B$
 $\angle BAD = 2\angle BO_2D$
 $\angle CO_1B \neq \angle BO_2D = 45^\circ$
 $\angle CO_1B = \arcsin \frac{CB}{2R}$
 $\angle BO_2D = \arcsin \frac{BD}{2R}$

$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$
 $y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$

$2 \cdot 2^{64} - x + 70 > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$
 $2^{64}(6 - x) - (6 - x) \neq (2^6 - 2^x) < 0$
 $64 \log 2 + \log(6 - x) - \log(6 - x)$
 $\log(2^{64} - 1)(6 - x) < \log(2^6 - 2^x)$
 $(9 \cdot 1)(2^{64} \cdot 6 - 6 - x \cdot 2^{64} + x - 2^6 - 2^x) < 0$
 $2^{64} \cdot 6 - 6 - x \cdot 2^{64}$
 $6 \cdot 2^{64} - 6 - x \cdot 2^{64} + x - 2^6 - 2^x < 0$
 $(2^{64} - 1)(6 - x) - 2^6 + 2^x < 0$
 $x = 6$
 $6 \cdot 2^{64} - 6 - x \cdot 2^{64} + 2^x - 2^6 < 0$
 $0 \leq x < 6$
 $2^x + 3 \cdot 2^{65}$
 $64 \cdot 2^{64} + 2^{65}$





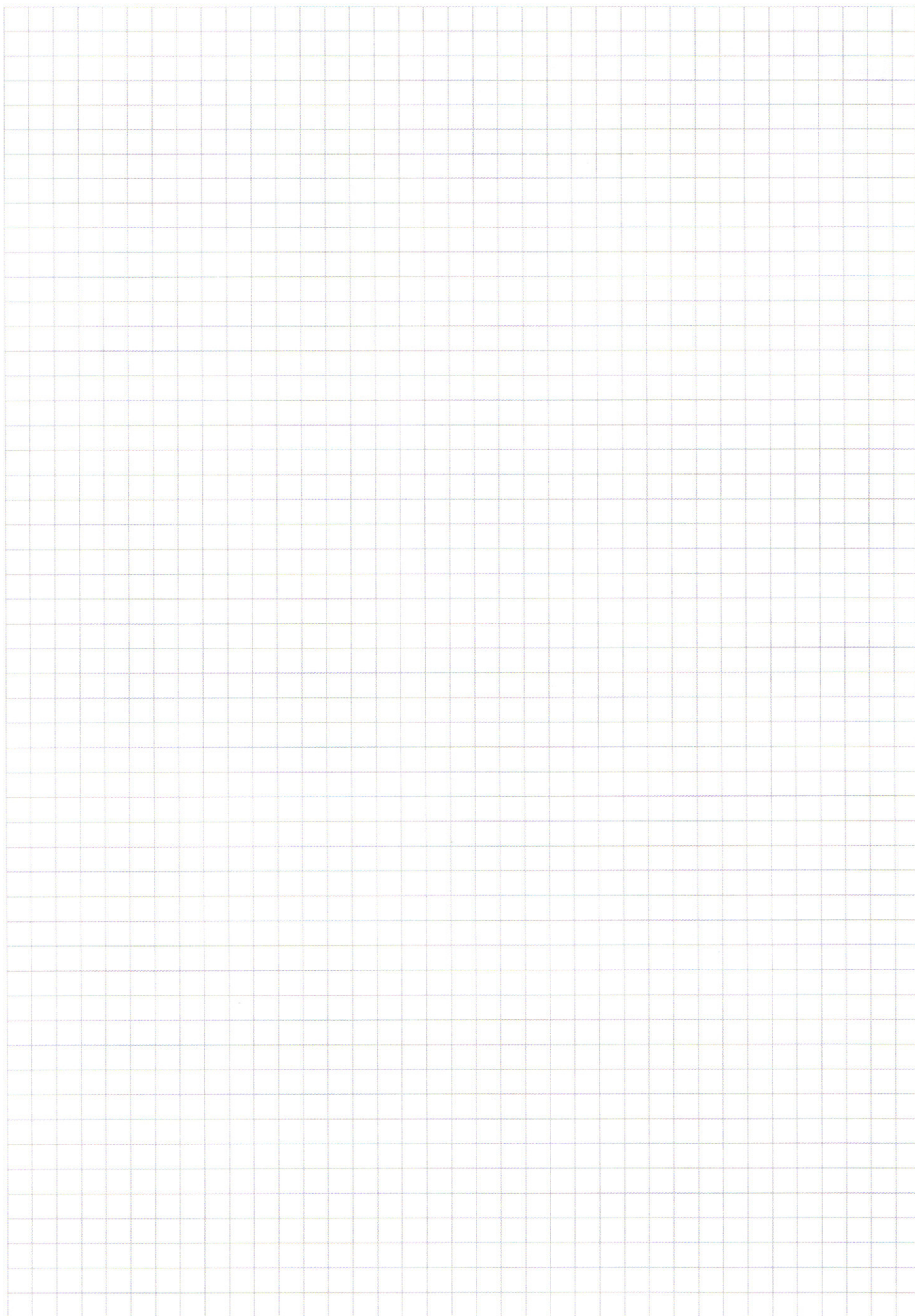
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)