

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Разложим число 3375 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 3 \\ 1125 & 3 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Их всего 6, но ~~из~~ цифр 8, значит сест. числа это единицы и их две. Найдём количество восьмизначных чисел сест. из цифр 3, 3, 3, 5, 5, 5, 1, 1. Т.к. все эти цифры могут стоять ~~и~~ на 1 месте в числе, то это количество есть число перестановок с повторениями, ведь числа могут повторяться, а нам это считать не нужно!

$$P_1 = \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 56 \cdot 10 = 560$$

Но вместо двух троек может быть написана 9.

Тогда цифры: 3 3 5 5 5 1 1 1, в таком случае:

$$P_2 = \frac{8!}{3!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4^2}{3 \cdot 2} = 56 \cdot 20 = 56 \cdot 10 \cdot 2 = 560 \cdot 2 = 1120$$

Иных вариантов быть не может ибо $3 \cdot 5 > 9$ и $5 \cdot 5 > 9$.

$$P = P_1 + P_2 = 1680$$

Ответ: 1680

№5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ ((|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

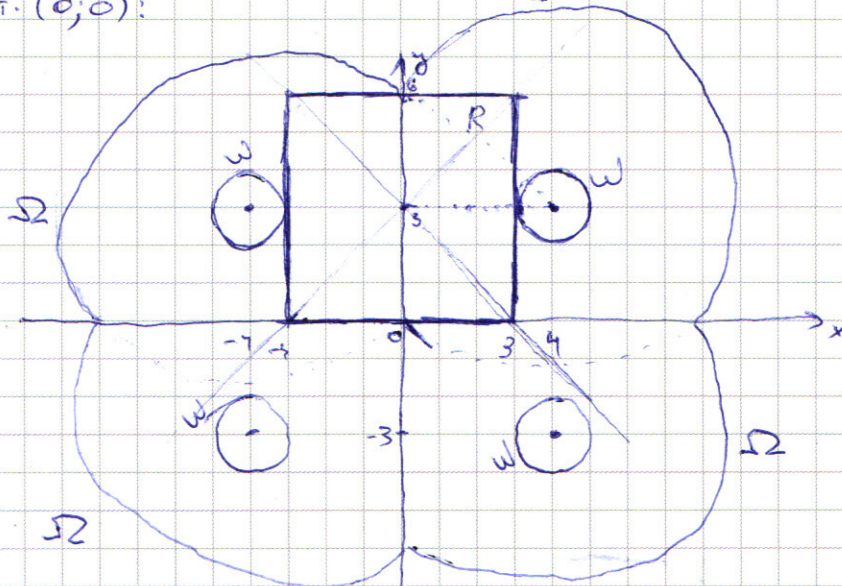
Заметим, что первое ур-ние ~~на~~ на координатной плоскости выглядит, как квадрат со стороной 6, причем его центр расположен в т. (3; 3). ~~А второе~~ (это можно понять, раскрывая модуль на промежутках, например при $y-3-x \geq 0$ и $y-3+x \geq 0$ при $y \geq x+3$ и $y \geq 3-x$ $y-3-x+y-3+x = 2y-6=6$ $y=6$)

Аналогично, для случаев

$$\begin{array}{ll} y-3-x \geq 0 & y-3+x < 0 \\ y-3-x < 0 & y-3+x \geq 0 \\ y-3-x < 0 & y-3+x < 0 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{ll} y-3-x \geq 0 & y-3+x < 0 \\ y-3-x < 0 & y-3+x \geq 0 \\ y-3-x < 0 & y-3+x < 0 \end{array}} \right\}$$

Продолжение на стр. 2

Второе ур. на коор. плоскости — окружность радиуса $\sqrt{a}$ и с центром в т. $(4; 3)$ отраженная Ω симметрично относительно осей Ox и Oy и т. $(0; 0)$:



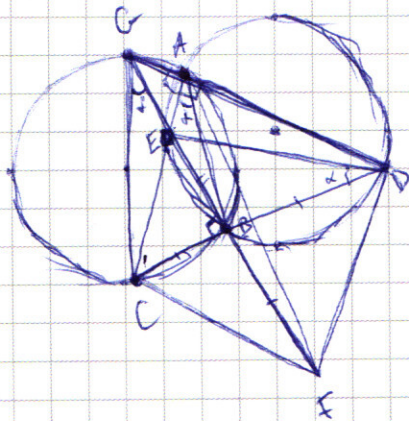
На рисунке показаны два случая расположения окружностей, при котором они имеют ровно 2 т. пересечения с квадратом

В 1 случае ω окружности имеют радиус $1 \Rightarrow a = 1$

В 2 случае Ω окружности имеют радиус $R = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a = 25$

Ответ: 1, 25.

№6.



а) Отметим т. E, т. G — пересечения ~~прямых~~ так, что GC и DE — диаметры, тогда $\angle EAD = \angle EAG = 90^\circ$ ($\angle EAD = 90^\circ$, т.к. вписанный и опирается на диаметр, $\angle EAG = \angle CAG = 90^\circ$ ($\angle CAG$ — вписанный и опирается на диаметр)) тогда E лежит на AC (ведь $\angle CAD = \angle EAD = 90^\circ$)

Если $\angle CGB = x$, то $\angle CAB = x$ (вписанные опираются на одну дугу BC)

Также $\angle EAB = \angle EDB = x$, т.к. они вписанные и опираются на одну дугу EB.

Тогда $\triangle CGB = \triangle EBD$, т.к. $CB = ED = 2R = 10$, $\angle CGB = \angle BDE = x$, тогда $BE = BC$ и $BG = BD$.

$\triangle EBD = \triangle CBF$ ($BC = BE$, $BD = BF$), тогда $CF = ED = 10$

б) $BC = 6 = BE$, $BF = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 = BD \Rightarrow EG = BG = BE = 8 - 6 = 2$

$\angle CEB = \angle BCE = \frac{180 - 90}{2} = 45^\circ$, $\angle GEA = \angle CEB$ (вертик.) $= 45^\circ$, $\angle AGE = 180 - 90 - 45 = 45^\circ$
 продолж. на стр. 3.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $\triangle AEG$ - равноб., причем $AG = AE = x$, тогда $x^2 + x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{2}$
 $AG = AE = \sqrt{2}$

$$\sin \angle BCF = \frac{4}{5} \quad (\text{из прямоугол. } \triangle BCF)$$

$$\cos \angle BCF = \frac{3}{5}$$

Тогда $\sin \angle ACF = \sin(45^\circ + \angle BCF) = \sin 45^\circ \cdot \cos \angle BCF + \sin \angle BCF \cdot \cos 45^\circ =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} (CF + EA) \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} (\sqrt{36+36} + \sqrt{2}) \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} =$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{72} + \sqrt{2}) \cdot 7\sqrt{2} = \frac{7 \cdot 2}{2} + \frac{7\sqrt{144}}{2} = 7 + \frac{7 \cdot 12}{2} = 42 + 7 = 49$$

Ответ: 10; 49.

✓ 3.

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2x(y+2) + (-3y^2 + 12y) = 0$$

$$D = 4(y+2)^2 - 4(-3y^2 + 12y) = 4(y^2 + 4y + 4) + 12y^2 - 48y =$$

$$= 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = (4y - 4)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{2(y+2) \pm (4y-4)}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = -y+4 \Rightarrow y = 4-x \\ x_2 = 3y \Rightarrow y = \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x x y}$$

$$y^{5 \lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2 \lg x x y}$$

$$y^{5 \lg x} \cdot x^{-\lg x} = (y^2)^{\lg x}$$

$$\left(\frac{y^5 \cdot x^{-1}}{y^2}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x}$$

$$(y^3 x^{-1})^{\lg x} = y^{2 \lg x}$$

$$\lg x = \log_{(x^{-1} y^3)} (y^2 \lg x)$$

$$\lg x = 2 \lg y \cdot \log_{(x^{-1} y^3)} y$$

$$\lg y \cdot X = \log_{(x^{-1} y^3)} y$$

$$\log_y x = \frac{2}{\log_{(x^{-1} y^3)} y}$$

$$\log_y x = \frac{2}{3 - \log_y x}$$

$$3 \log_y x - \log_y^2 x = 2$$

если $\log_y x = t$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_y x = 1 \\ \log_y x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = y^2 \end{cases}$$

продолж
на стр. 4.

$$\begin{cases} y = x \\ y^2 = x \\ y = \frac{x}{3} \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$x = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 0$ - не подходит по условиям ОДЗ.

$$x = 4 - x \Rightarrow x = 2, y = 2$$

$$\frac{x^2}{9} = x \Rightarrow x(x-9) = 0$$

$x = 0$ - не подходит по ОДЗ.

$$x = 9, y = 3$$

$$(4-x)^2 = x$$

$$x^2 - 8x + 16 = x$$

$$x^2 - 9x + 16 = 0$$

$$D = 81 - 64 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = 4 - \frac{9 + \sqrt{17}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0, x > 0 \text{ - не подходит по ОДЗ}$$

$$y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \quad x > 0, y > 0 \text{ - подходит.}$$

Ответ: $(2; 2); (9; 3); \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2}\right)$.

12.

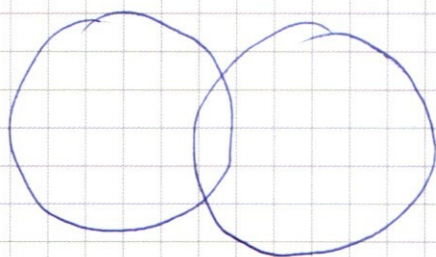
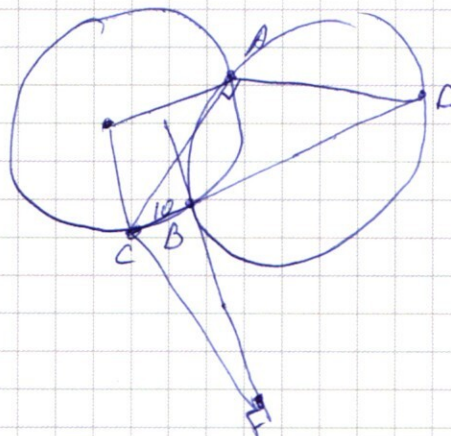
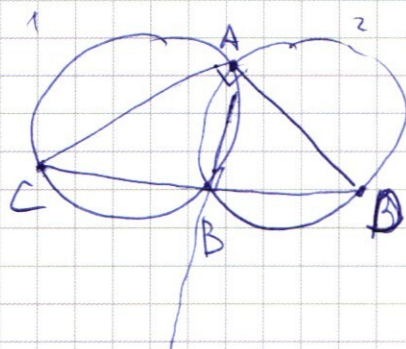
$$\cos 4x - \cos 3x = \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x = (2 \sin 4x \cdot \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x = 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x = 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ED = 10
CG = 10

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$
 $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$

$\frac{h}{\cos \alpha} = \frac{ED}{\sin \alpha}$
 $h^2 = CD \cdot AD$

$S = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{72} + \sqrt{2}) \cdot 10 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$
 $= \frac{7\sqrt{2}}{2} (\sqrt{72} + \sqrt{2})$
 $= \frac{7\sqrt{144}}{2} + 7$
 $= \frac{7 \cdot 12}{2} + 7$
 $= 42 + 7 = 49$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$
 $\frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} =$
 $= \frac{2\sqrt{2}}{5} + \frac{3\sqrt{2}}{10} =$
 $= \frac{7\sqrt{2}}{10}$

$180 - 90 + \alpha - 90 + \alpha = 2\alpha$
 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$
 $\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{CE}{AE} = \frac{AE}{EB}$
 $10 = \frac{EB}{\sin \alpha} \Rightarrow EB = 10 \sin \alpha$

$180 - \alpha - \alpha - 90 + \alpha =$
 $50 - 50 \cos 2\alpha = 100 \sin^2 \alpha$
 $100 \sin^2 \alpha + 50 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 50 = 0$
 $100 \sin^2 \alpha + 50 (1 - 2 \sin^2 \alpha) - 50 = 0$
 $100 \sin^2 \alpha + 50 - 100 \sin^2 \alpha - 50 = 0$

$AF = \sqrt{28 + 78} = \sqrt{206}$

$125 + 25 - 50 \cos 2\alpha = \sqrt{10}$

7
5 5 5
1 1 6 5 4 3 2 1

$$\frac{8!}{3!3!2!} =$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 2 \cdot 2} = 560$$

3 3 7 5 | 3
1 1 2 5 | 3
3 7 5 | 3
1 2 5 | 5
2 5 | 5
5 | 5
* | 1
7

3 3 7 5 | 3
1 1 2 5 | 3
3 7 5 | 3
1 2 5 | 5
2 5 | 5
5 | 5
* | 1
7

3
1 2 5
2 7
8 7 5
2 5 0
3 3 7 5

8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2

$$\frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 2} = 56 \cdot 20 = 560 \cdot 2 = 1120$$

$$\frac{1680}{3} = 560$$

$$10^n = x$$

$$x^n = 10$$

$$\frac{y^{\lg x}}{x^{\lg y}} = y^{2 \lg xy}$$

$$\frac{y^{\lg x}}{x^{\lg y}} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg xy}$$

$$\frac{y^{\lg x}}{y^{2 \lg xy}} = x^{\lg x}$$

$$y^{2,5 \lg xy} x = x^{\lg x}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

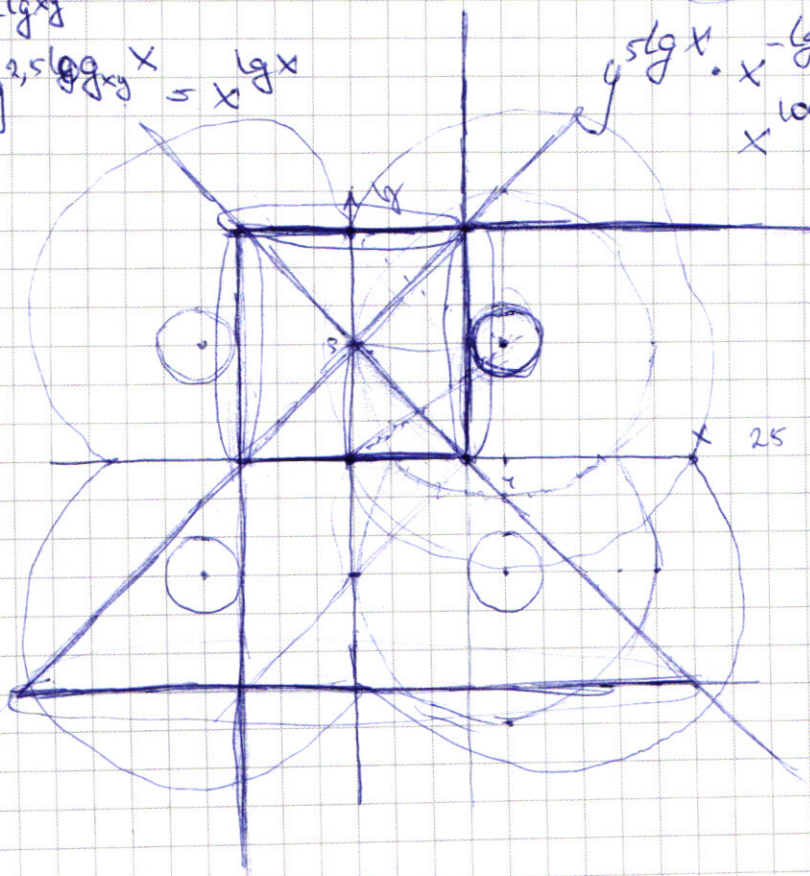
$$2 \cdot 2 = 2^4$$

$$(x-y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y)^2$$

$$y^{\lg x} \cdot x^{-\lg x}$$

$$x^{\log_{10} x}$$



$$y - x - 3 \geq 0 \quad y - 3 + x \geq 0$$

$$y \geq 3 + x \quad y \geq 3 - x$$

$$x \leq y - 3 \quad y - 3 + x \leq 0$$

$$y - x - 3 \leq 0 \quad y \leq 3 - x$$

$$y \leq x + 3 \quad x \leq 3 - y$$

$$y - 3 - x + y - 3 + x = 6$$

$$2y - 6 = 6$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

$$|x| - 2$$

$$-y - 3 + x - y - 3 - x = 6$$

$$-2y = 12$$

$$y = -6$$

$$y - 3 - x - y - 3 + x =$$

$$y - 3 + x + y - 3 - x$$

$$y - 3 - x - y + 3 - x = 6$$

$$-2x = 6$$

$$x = -3$$

$$-y + 3 + x + y - 3 + x = 6$$

$$x = 3$$

$$a \geq 1 \quad a \leq 3$$

$$a = 1$$

$$-1 + 3 + x - y + 3 - x = 6$$

$$-2y = 0$$

$$y = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

~~$$x^2 - 2y(x - 6)$$~~

$$x^2 - 2x(y + 2) + (-3y^2 + 12y) = 0$$

$$D = 4(y + 2)^2 - 4(-3y^2 + 12y) =$$

$$4(y^2 + 4y + 4) + 12y^2 - 48y =$$

$$4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y =$$

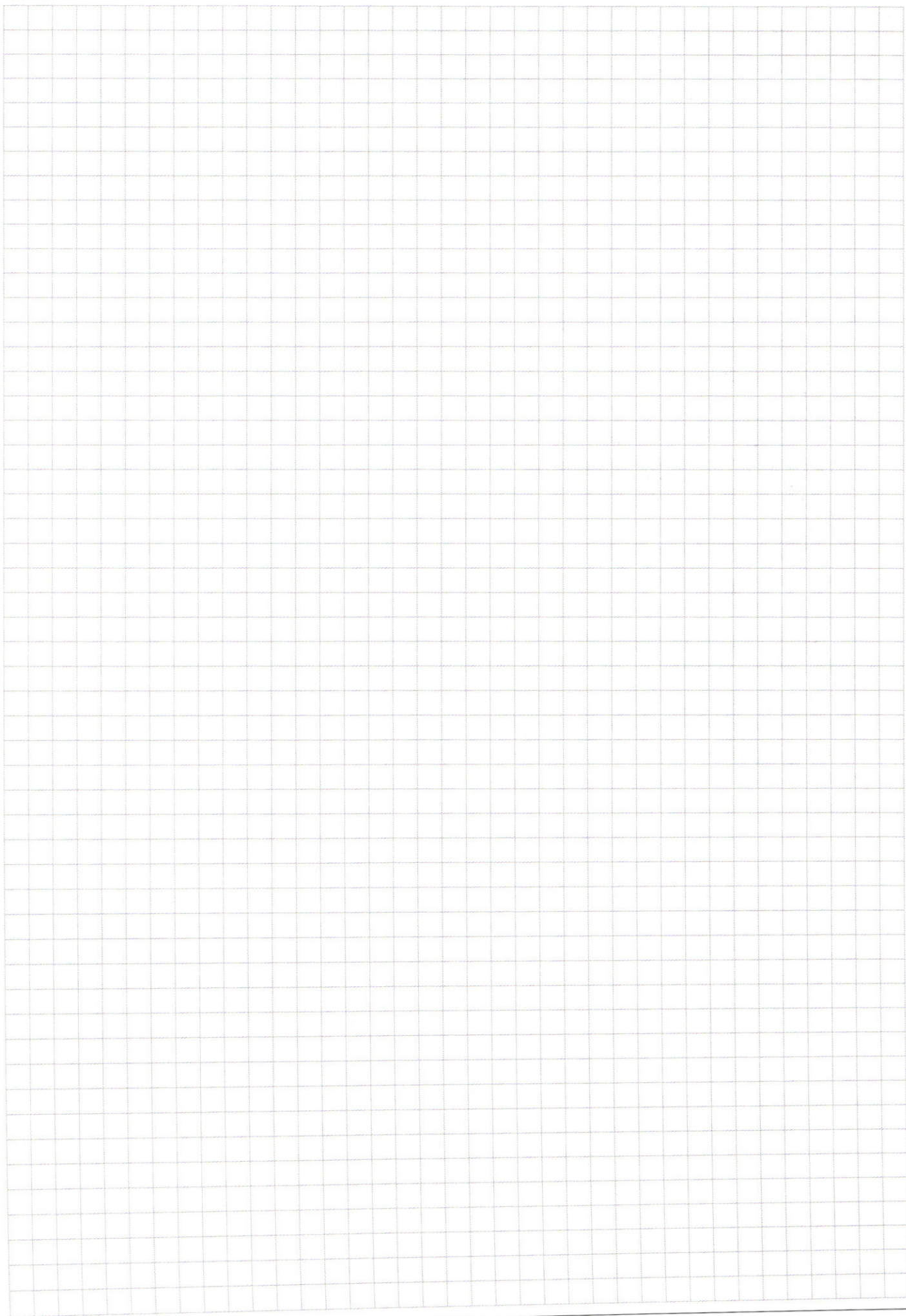
$$16y^2 - 32y + 16 =$$

$$= (4y - 4)^2$$

$$x = \frac{2(y + 2) \pm (4y - 4)}{2}$$

$$x = \frac{2y + 4 - 4y + 4}{2} = \frac{-2y + 8}{2} = -y + 4$$

$$x = \frac{2y + 4 + 4y - 4}{2} = 3y$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)