

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в рз
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Заметим, что наше восьмизначное число
должно состоять из цифр $3, 3, 3, 5, 5, 5$, ^{или $9, 3, 5, 5, 5$} но
т.к. их ^{5 или} 6, то остальные будут единицы.

1) Когда число состоит из цифр $3, 3, 3, 5, 5, 5, 1, 1$.

Кол-во таких чисел будет:

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{2! \cdot 0!} = 56 \cdot 10 \cdot 1 =$$

$$= 560 \text{ чисел.}$$

2) Когда число состоит из цифр $9, 3, 5, 5, 5, 1, 1, 1$.

Кол-во таких чисел будет:

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{1!}{1! \cdot 0!} =$$

$$= 56 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 1 = 1120 \text{ чисел.}$$

Тогда всего чисел мы можем составить:

$$1120 + 560 = 1680.$$

Ответ: 1680 чисел.

№2.

$$\begin{aligned} \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x &= \sqrt{2} \cos 14x \\ -2 \cdot \sin\left(\frac{11x+3x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{11x-3x}{2}\right) - 2 \cdot \sin\left(\frac{11x-3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{11x+3x}{2}\right) &= \sqrt{2} \cos 14x \\ \sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin 4x + \sqrt{2} \cdot \sin 4x \cdot \cos 7x + \cos 14x &= 0 \\ \sqrt{2} \cdot \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) + (\cos^2 7x - \sin^2 7x) &= 0 \\ \sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) + (\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x) &= 0. \end{aligned}$$

$$(\cos 7x + \sin 7x)(\sqrt{2} \cdot \sin 4x + \cos 7x - \sin 7x) = 0.$$

$$\textcircled{1} \cos 7x + \sin 7x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 7x + \sin 7x = \sqrt{2} \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{28} + \frac{1}{7}\pi n, n \in \mathbb{Z}.}$$

$$\textcircled{2} \sqrt{2} \cdot \sin 4x + \cos 7x - \sin 7x = 0.$$

$$\cos 7x - \sin 7x = \sqrt{2} \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin 4x.$$

$$\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 4x.$$

$$\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin 4x = 0.$$

$$2 \cdot \sin\left(\frac{7x - 4x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{7x + 4x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0.$$

$$1) \sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0.$$

$$\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}.}$$

$$2) \cos\left(\frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0.$$

$$\frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

$$11x - \frac{\pi}{4} = 2\pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

$$11x = \frac{9}{4}\pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\boxed{x = \frac{9}{44}\pi + \frac{2}{11}\pi m, m \in \mathbb{Z}.}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{28} + \frac{1}{7}\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{9}{44}\pi + \frac{2}{11}\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

✓3.

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = x^2 + xy - 4x - 3y^2 - 3xy + 12y =$$

$$= x(x + y - 4) - 3y(y + x - 4) = (x - 3y)(x + y - 4) = 0$$

① $x - 3y = 0$

$$x = 3y$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} = (xy)^{2 \lg y} = x^{2 \lg y} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{5 \lg x} = x^{\lg x} \cdot x^{2 \lg y} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$x^{5 \lg y} = x^{\lg x} \cdot x^{2 \lg y} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$x^{3 \lg y} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$x = 3y$$

$$(3y)^{3 \lg y} = (3y)^{\lg 3y} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$3^{3 \lg y} \cdot y^{3 \lg y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{\lg 3y} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$3^{3 \lg y} \cdot y^{\lg y} = (3y)^{\lg 3} \cdot (3y)^{\lg y} = 3^{\lg 3} \cdot y^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y} \cdot y^{\lg y}$$

$$3^{3 \lg y} = 3^{\lg 3} \cdot y^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y}$$

$$3^{2 \lg y} = 3^{\lg 3} \cdot y^{\lg 3}$$

$$3^{2 \lg y} = 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y}$$

$$3^{\lg y} = 3^{\lg 3}$$

$$\downarrow$$

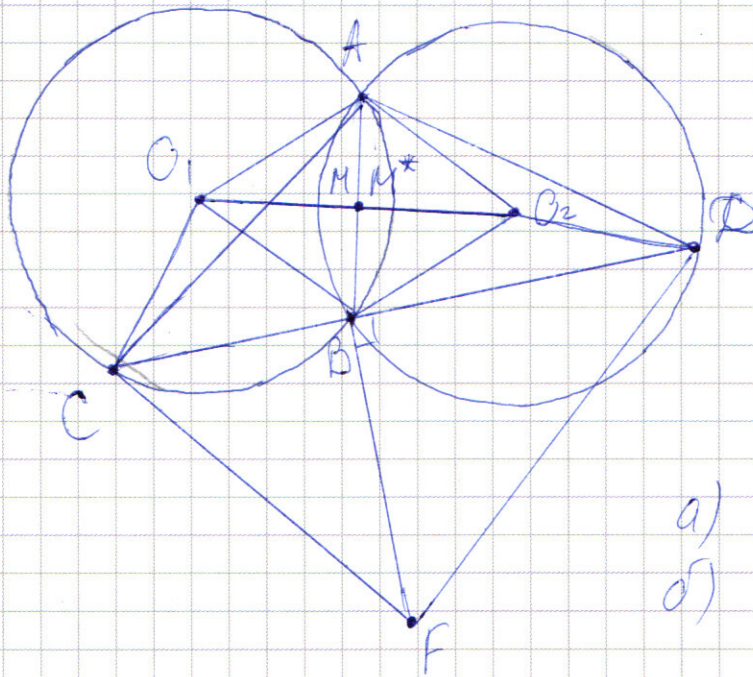
$$\lg y = \lg 3$$

$$y = 3 \Rightarrow x = 3y = 9.$$

Ответ: $y = 3$
 $x = 9$

② $x + y - 4 = 0$
 $x + y = 4.$

№ 6.



Дано:

$$O_1A = O_2A = 5 = R$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$FB \perp CD$$

$$BF = BC$$

$$a) CF = ?$$

$$b) BC = 6$$

$$S_{ACF} = ?$$

Решение:

а) Рассмотрим четырехугольник AO_1BO_2 .

Заметим, что $O_1A = O_1B = O_2A = O_2B = R \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle O_1AB$ и $\triangle O_2AB$ — равнобедренные.

Проведем медиану O_1M в $\triangle O_1AB$. O_1M — высота, бис-са и медиана $\Rightarrow AM = MB = \frac{1}{2}AB$.

Проведем медиану O_2M^* в $\triangle AO_2B$. O_2M^* — высота, бис-са и медиана $\Rightarrow AM^* = M^*B = \frac{1}{2}AB$.

Значит т. M и т. M^* совпадают $\Rightarrow$

O_1O_2 — ось симметрии в четырехугольнике AO_1BO_2 .

Пусть $\angle AO_1O_2 = \alpha$, тогда $\angle O_2O_1B = \alpha$,
 т.к. O_1O_2 — бис-са $\triangle AO_1B$. $\angle AO_2O_1 = \alpha$, т.к.
 $\triangle O_1O_2A$ — равнобедренный, $\angle O_1O_2B = \alpha$, т.к.

O_2O_1 — бис-са угла $AO_2B \Rightarrow \angle AO_2O_1 = \angle O_1O_2B = \angle BO_2O_1 =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$= \angle O_2 O_1 A = \alpha.$$

$$\text{Т.е. } \angle BO_1 A = 2\alpha = \angle AO_2 B.$$

$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle BO_1 A = \alpha$, т.к. $\angle BO_1 A$ — центральный
и опирается на ту же дугу.

$$\text{Аналогично } \angle BDA = \frac{1}{2} \angle BO_2 A = \alpha.$$

Сумма углов в $\triangle CAD$:

$$\angle CAD + \angle ADC + \angle DCA = 180^\circ.$$

$$90^\circ + \alpha + \alpha = 180^\circ$$

$$2\alpha = 90^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ.$$

Т.к. $\angle ACD = \angle ADC$, то $\triangle CAD$ — равнобедр. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow AC = AD$.

Пусть $\angle CO_1 B = 2\beta$, тогда $\angle CAB = \frac{1}{2} \angle CO_1 B =$
 $= \beta \Rightarrow \angle BAD = 90^\circ - \beta \Rightarrow \angle BO_2 D = 180^\circ - 2\beta.$

По т. косинусов для $\triangle CO_1 B$ и $\triangle BO_2 D$:

$$\begin{cases} CB^2 = OC^2 + O_1 B^2 - 2 \cdot OC \cdot O_1 B \cdot \cos 2\beta \\ BD^2 = BF^2 = O_2 B^2 + O_2 D^2 - 2 \cdot O_2 B \cdot O_2 D \cdot \cos(180 - 2\beta) \end{cases}$$

$$CB^2 = OC^2 + O_1 B^2 - 2$$

$$\begin{cases} CB^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R^2 \cdot \cos 2\beta \\ BD^2 = R^2 + R^2 + 2 R^2 \cdot \cos 2\beta \end{cases} \quad \leftarrow$$

$$\begin{cases} CB^2 = R^2 + R^2 - 2 R^2 \cdot \cos 2\beta \\ BD^2 = R^2 + R^2 + 2 R^2 \cdot \cos 2\beta \end{cases}$$

$$CB^2 + BD^2 = 4R^2 = CF^2$$

по т. Пифагора.

$$CF^2 = 4R^2$$

$$CF = 2R = \underline{10}.$$

а) $BC = 6$

$$BF = BD = \sqrt{CF^2 - BC^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

$$CD = BC + BD = 14.$$

т.к. $AC = AD$ и $\triangle ACD$ - равнобедренный, то

$$\angle CAD = \angle CDA = \angle ACD$$

$$AC = AD = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{14}{\sqrt{2}} = \frac{14\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$$

Аналогично $DF = \sqrt{2} \cdot BD = 8\sqrt{2}$.

Заметим, что $\angle FDA = \angle FDB + \angle CDA = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$.

По т. Пифагора:

$$AF = \sqrt{FD^2 + AD^2} = \sqrt{128 + 98} = \sqrt{226}$$

Теперь мы можем найти $S_{\triangle ACF}$ по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\left(\frac{10 + 7\sqrt{2} + \sqrt{226}}{2}\right) \left(\frac{7\sqrt{2} + \sqrt{226} - 10}{2}\right) \left(\frac{7\sqrt{2} + 10 - \sqrt{226}}{2}\right) \left(\frac{10 + \sqrt{226} - 7\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin(90^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 10 \cdot (\sin 45^\circ \cdot \cos \angle BCF + \sin \angle BCF \cdot \cos 45^\circ) =$$

$$= 35\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{6}{10} + \frac{8}{10}\right) = 35 \cdot \frac{14}{10} = 49.$$

Ответ: а) 10

б) $S = 49$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375 \\ \underline{3} \\ 3 \\ \underline{3} \\ 7 \\ \underline{6} \\ 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ \hline 1125 \\ \underline{9} \\ 22 \\ \underline{21} \\ 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1125 \\ - 9 \\ \hline 22 \\ - 21 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 375 \\ -3 \\ \hline 7 \\ -6 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 125 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$C_3' \cdot C_2' = \frac{3!}{2!} \cdot \frac{2!}{1!} = 3 \cdot 2$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 560 \\ + 2 \\ \hline 1120 \\ - \\ + 560 \\ \hline 1680 \\ 111935 \end{array}$$

$$C_8^2 = \frac{8!}{6! \cdot 2} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28.$$

$$4. \quad {}^6C_3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

$$C_3^3 = 1$$

$$C_3^8 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} =$$

560 33

$$\textcircled{C}_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 10$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x.$$

$$-2 \sin \frac{11x-3x}{2} \cdot \sin \frac{11x+3x}{2} - \left(2 \sin \frac{11x+3x}{2} \cdot \cos \frac{11-3x}{2} \right) =$$

$$2 \sin 4x \cdot \sin 7x + 2 \sin 7x \cdot \cos 4x = -\sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin 4x \cdot \sin 7x + \cos 4x \cdot \sin 7x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x.$$

$$\sin 7x (\sin 4x + \cos 4x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x.$$

$$\sin \alpha + \cos \beta = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin 4x + \cos 4x = \sqrt{2} \sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = \sin 4x.$$

$$\sin 4x + \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + \cos 4x =$$

$$= 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 8x}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right)$$

$$\sqrt{2} \sin 7x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x.$$

$$2 \sin 7x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) + \cos 14x = 0.$$

$$-2 \cdot \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \cdot \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin 7x \cdot \sin 4x + \sin 4x \cdot \cos 7x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x.$$

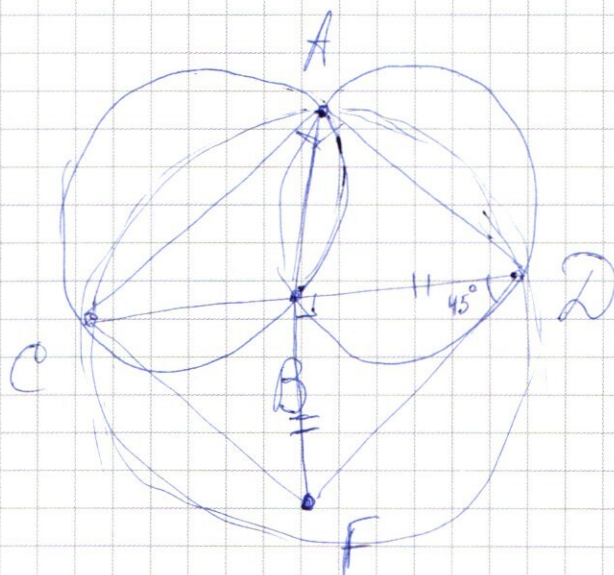
$$\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x.$$

$$\sin 4x \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) + \cos 7x \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x.$$

$$\sin 4x \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\frac{\pi}{2} - 14x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x$$

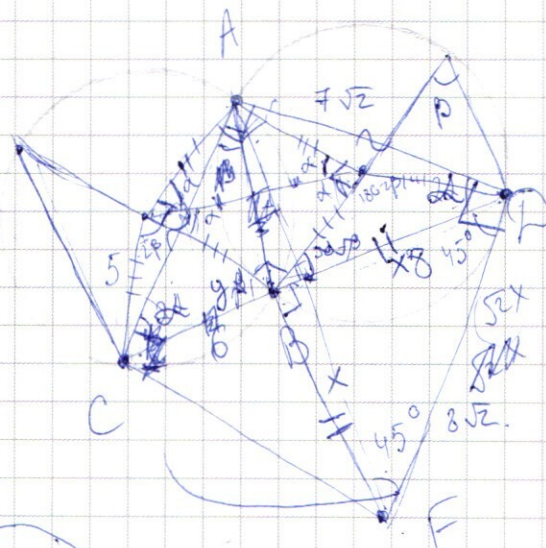
$$2 \cdot \sin 4x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = -\cos 14x.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x^2 + y^2 = ?$$

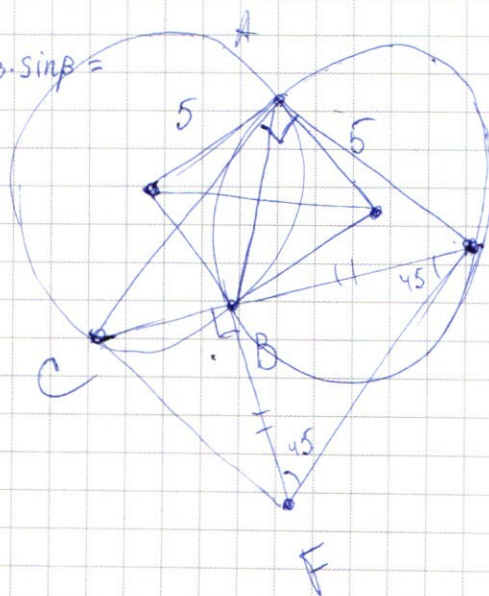
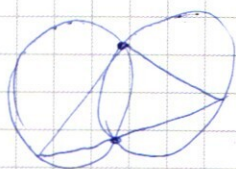
$$O_1 O_2 = \sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = AB.$$



$$\cos(90^\circ - \beta) =$$

$$= \cos 90^\circ \cos \beta + \sin 90^\circ \sin \beta =$$

$$= \sin \beta.$$



$$AC = AD.$$

$$\angle C = 45^\circ.$$

$$AB = \sqrt{50 - 50 \cos 2\alpha}$$

$$= \sqrt{50 - 50 \frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= 5\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

$$AB^2 = 50 - 50 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 50 - 25\sqrt{2}.$$

$$CB^2 = AC^2 + AB^2 -$$

$$- 2AC \cdot AB \cdot \cos \beta = y^2$$

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \sin \beta = x^2$$

$$\begin{aligned}
 CB^2 - BD^2 &= 2AD \cdot AB \cdot \sin \beta + 2AC \cdot AB \cdot \cos \beta = \\
 &= 2AD \cdot AB (\sin \beta + \cos \beta) \\
 &= 2AD \cdot AB (\sin \beta - \cos \beta).
 \end{aligned}$$

$$AC^2 + CB^2 - 2 \cdot AC \cdot CB \cdot \cos 45^\circ = AD^2 + DB^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos 45^\circ$$

$$CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = DB^2 - 2AD \cdot BD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$CB^2 - \sqrt{2}AC \cdot CB = DB^2 - \sqrt{2}AD \cdot BD$$

$$CB^2 - BD^2 = \sqrt{2}(AC \cdot CB - AD \cdot BD)$$

$$(CB - BD)(CB + BD) = \sqrt{2}AC(CB - BD)$$

$$(1) \quad BD + CB = \sqrt{2}AC$$

$$CD = \sqrt{2}AC = \sqrt{2}AD$$

(2)

$$BC^2 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot BC \cdot \cos \beta = BD^2 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot BD \cdot \sin \beta$$

$$BC^2 - BD^2 = 10BC \cdot \cos \beta - 10BD \cdot \sin \beta =$$

$$= 10(BC \cdot \cos \beta - BD \cdot \sin \beta)$$

$$BC \cos \beta = BC \cdot \frac{BC}{2R}$$

$$BD \sin \beta = BD \cdot \frac{BD}{2R}$$

$$(BC - BD)(BC + BD) = 10 \left(\frac{BC^2}{2R} - \frac{BD^2}{2R} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$[2^x + 3 \cdot 2^{65} - 2^{64}]$$

$$2^x + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} =$$

=

$$x = 3y$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\begin{array}{r} x^{64} \\ \times 12 \\ \hline 128 \\ + 98 \\ \hline 226 \end{array}$$

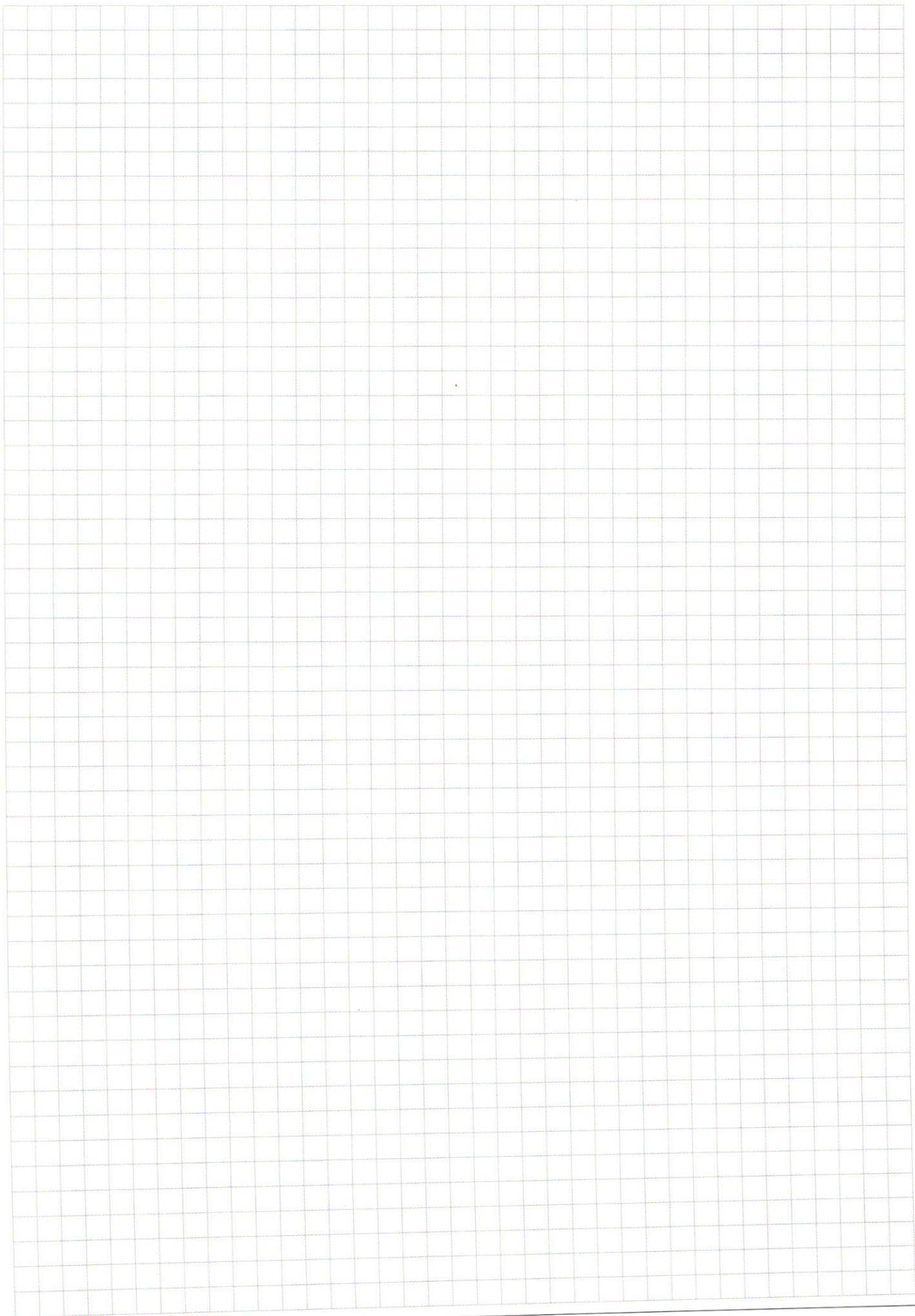
$$10 + 7\sqrt{2} +$$

$$y^{5 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg xy} = x^{\lg x} \cdot x^{2 \lg y} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$\cancel{y^{5 \lg x}} \quad \cancel{x^{3 \lg y}} = x^{\lg x} \cdot y^{\lg y} \cdot y^{\lg y} \cdot y^{\lg y} \cdot y^{\lg y}$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg 4-y} = \cancel{xy} (4-y)^{\lg y} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{5 \lg 4-y} = (4-y)^{\lg 4-y} \cdot (4-y)^{2 \lg y} \cdot y^{2 \lg y}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \beta$$

$$x^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \sin \beta$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2AC \cdot AB (\cos \beta + \sin \beta)$$

$$2xy = AC \cdot AB (\cos \beta + \sin \beta)$$

$$CF^2 = (x+y)^2 + 2x^2 - 2(x+y) \cdot \sqrt{2}x \cdot \cos 45^\circ =$$

$$= x^2 + y^2 + 2xy + 2x^2 - 2 \cdot (x^2 + yx) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= x^2 + y^2 + 2xy + 2x^2 - 2x^2 - 2xy = x^2 + y^2$$

$$y^2 = 50 - 50 \cdot \cos 2\beta$$

$$x^2 = 50 + 50 \cdot \cos 2\beta$$

$$x^2 + y^2 = 100 = CF^2$$

$$CF = 10$$

$$BC = y = 6 \Rightarrow x = 8$$

$$CD = 14$$

$$z^2 + z^2 = 196 = 2z^2$$

$$z^2 = 98$$

$$z = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$DF = 8\sqrt{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DF = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 8\sqrt{2} = 56\sqrt{2}$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg xy}$$

$$\log_{10} 3 = k.$$

$$10^k = 3$$

$$y^{5 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg xy}$$

$$x^{5 \lg y} = x^{\lg x} \cdot (xy)^{2 \lg y} = x^{\lg x} \cdot x^{2 \lg y} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$x^{3 \lg y} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$\lg x = k.$$

$$\frac{x}{x^{\lg x}} = \frac{10^k}{(10^k)^k} = 10^{k-k^2}$$

$$3^{3 \lg y} \cdot y^{3 \lg x} = 3^{\lg xy} \cdot y^{3 \lg xy}$$

$$3^{3 \lg y} \cdot y^{\lg y} = 3^{\lg xy} \cdot y^{\lg xy}$$

$$3^{3 \lg y} \cdot y^{\lg y} = 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y} \cdot y^{\lg 3} \cdot y^{\lg y}$$

$$y^{3 \lg 3} = 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y} \cdot y^{\lg 3} \cdot y^{\lg y}$$

$$y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y} \cdot y^{\lg 3}$$

$$= 3^{\lg 3} \cdot y^{\lg 3}$$

$$y^{\lg 3} = 3^{\lg 3}$$

$$y = 3$$

$$x = 9$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0.$$

$$x(x - 2y - 4) - 3y(y - 4) = 0$$

$$x^2 - xy - 4x$$

$$x^2 + xy - 4x - 3y^2 - 3xy + 12y = 0.$$

$$x(x + y - 4) - 3y(y + x - 4) = 0.$$

$$(x - 3y)(x + y - 4) = 0.$$

$$x = 3y$$

$$\text{или } x + y = 4.$$

$$\left(\frac{y}{3y}\right)^{5 \lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$\left(\frac{y}{3}\right)^{\lg 3y} = (3y^2)^{\lg y}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x - \sqrt{2} \cos 4x = 0.$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \cdot \sin 4x \cdot \cos 7x - \sqrt{2} \cos 4x = 0.$$

$$\sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin 4x + \sqrt{2} \sin 4x \cdot \cos 7x + \cos 4x = 0.$$

$$\sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) + (\cos^2 7x - \sin^2 7x) = 0.$$

$$\sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) + (\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x) = 0.$$

$$(\cos 7x + \sin 7x)(\sqrt{2} \sin 4x + \cos 7x - \sin 7x) = 0.$$

$$\cos 7x + \sin 7x = 0.$$

$$\cos 7x = -\sin 7x.$$

$$\sin 7x = -\cos 7x.$$

$$\tan 7x = -1.$$

$$\sqrt{2} \sin 4x + \cos 7x - \sin 7x = 0.$$

$$\sqrt{2} \sin 4x = \sin 7x - \cos 7x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$-3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$\sin 4x - \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin 4x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$= 2 \cdot \sin\left(\frac{7x - 4x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{11x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$