

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

то есть цифры в возмозможном числе
это либо

$$3, 3, 3, 5, 5, 5, 1, 1$$

либо

$$3, 5, 5, 5, 9, 1, 1, 1$$

Возмозможных чисел ~~к~~ n составлено из цифр 3, 3, 3, 5, 5, 5, 1, 1

n штук $n = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$

Возмозможных чисел составлено из цифр 3, 5, 5, 5, 9, 1, 1, 1

k штук $k = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = 1120$

Всего таких чисел $n + k = 1680$ Ответ: 1680

№3

$$\frac{y^5}{x} \lg x = y^2 \lg xy$$

$$0 \leq x > 0 \quad y > 0$$

$$y^5 \lg x \cdot x^{-\lg x} = y^2 \lg x \cdot y^2 \lg y$$

$$\cancel{y^2 \lg x} \cdot y^2 \lg y \neq 0 \quad \text{т.к. } y > 0$$

$$y^2 \lg x (y^3 \lg x \cdot x^{-\lg x} - y^2 \lg y) = 0$$

$$\cancel{y^2 \lg x = 0} \quad y = 0 \quad x > 0$$

$$y^3 \lg x \cdot x^{-\lg x} - y^2 \lg y = 0$$

$$y = 10^{\lg y} \quad x = 10^{\lg x}$$

$$10^{\lg y \cdot 3 \lg x} \cdot 10^{\lg x \cdot (-\lg x)} = 10^{\lg y \cdot 2 \lg y}$$

$$\lg y \cdot 3 \lg x + \lg x \cdot (-\lg x) = \lg y \cdot 2 \lg y$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg x \cdot \lg y + \lg^2 x = 0$$

$$(2 \lg y - \lg x)(\lg y - \lg x) = 0$$

$$2 \lg y = \lg x \quad \lg y = \lg x$$

$$y^2 = x \quad x = y$$

корни уравнения

$$x^2 - x(2y + 4) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16(y^2 + 2y + 1) = 4^2(y+1)^2 = (4y+4)^2$$

$$x_1 = \frac{2y+4 + 4y+4}{2} = 3y$$

$$x_2 = \frac{2y+4 - 4y-4}{2} = 4-y$$

корни
уравнения

$$\begin{cases} y^2 = x \\ x = 3y \end{cases}$$

$$y^2 = 3y$$

$$y(y-3) = 0$$

$$y_1 = 0 \quad \text{не подходит по ОДЗ}$$

$$y_2 = 3 \quad x_2 = 9$$

$$\begin{cases} y^2 = x \\ x = 4-y \end{cases}$$

$$y^2 = 4-y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = (\sqrt{17})^2$$

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{не подходит по ОДЗ}$$

$$y_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x = 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{не подходит по ОДЗ}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x = 4-y \end{cases}$$

$$y = 4-y$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

$$x = 2$$

Ответ: $x_1 = 9 \quad y_1 = 3$; $x_2 = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \quad y_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$; $x_3 = 2 \quad y_3 = 2$

пусть $2^{6^4} = t$, тогда

$$\begin{cases} y > 2^x + 6^t \\ y \leq 70 - x + tx \end{cases}$$

Найдём наименьший x , при котором будут выполняться оба неравенства

Из неравенства $y > 2^x + 6^t \Rightarrow$ что $y_{\min} = 6^t + 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$6^t + 1 \leq 70 - x + 6t \Rightarrow x = 6$, тогда проверим будет ли выполняться это неравенство при $x = 6$

$$y > 2^6 + 6t \quad y_{\min} = 64 + 6t + 1$$

$$65 + 6t \leq 70 - 6 + 6t$$

$$65 \leq 64 \quad \text{не выполняется при } x \leq 6 \text{ не}$$

Рассмотрим $x = 7$

$$y > 128 + 6t \quad y_{\min} = 129 + 6t$$

$$129 + 6t \leq 70 - 7 + 7t$$

$$129 \leq 63 + t \quad \text{т.к. } t \text{ - очень маленькое число, то это выполняется.}$$

Заметим, что при $x = 64$ 2^x можно записать как t

$$\text{при } x = 64 \quad 2^x = 2^{64} = 2^{6 \cdot 10 + 4} = 2^4 \cdot 2^{60} = 16 \cdot 2^{60}$$

$$y > \text{при } x = 70 \quad 2^x = 2^6 \cdot t = 64t$$

$$y > 64t + 6t \quad y_{\min} > 70t + 1$$

$$70t + 1 \leq 70 - 70 + 70t$$

$$70t + 1 \leq 70t$$

для $x = 70$ не выполняется
и при $x > 70$ тоже

при $x = 69$

$$y > 32t + 6t \quad y_{\min} = 38t + 1$$

$$38t + 1 \leq 1 + 69t \quad - \text{выполняется}$$

$$\Downarrow \\ x \leq 69$$

$x \in [7; 69]$ кол-во целых значений в отрезке $[7; 69]$

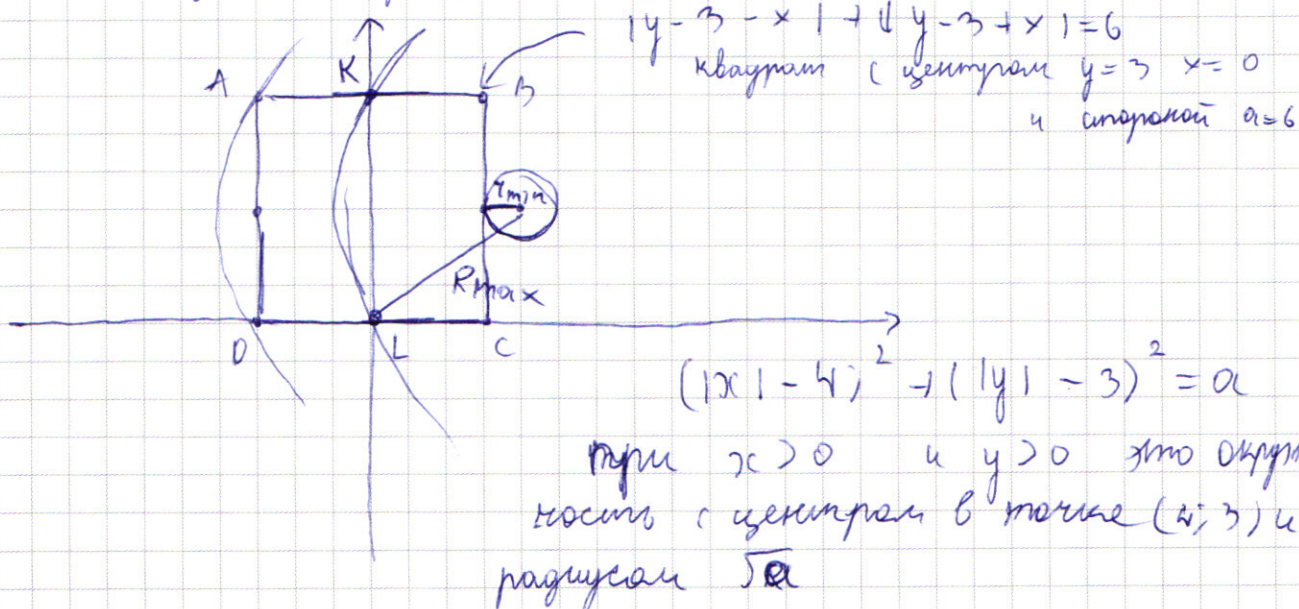
63

~~уменьшается~~

Ответ: 63 ~~разных~~ пар целых чисел

N5

Нарисуем градиент



$$r_{\min} = 1$$

$$R_{\max} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$\rightarrow a \in [1; 25]$ и тогда система имеет ~~одно~~ 2 решения

~~После того как удовлетворяется $a < 0$, то a начинает уменьшаться~~ Но при $x < 0$, левая часть графика левее оси OY при 2-х точках решения также дает $a \in$ пределов также, что $a \in [1; 25]$. Например если точки A и D являются решением, то

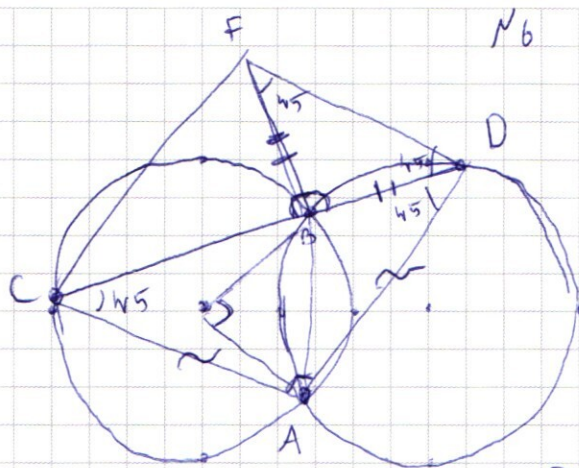
$$(|x_{A,D}| - 4)^2 + (|y_{A,D}| - 3)^2 = (|x_{B,C}| - 4)^2 + (|y_{B,C}| - 3)^2$$

(всею n)

то есть добавляются еще 2 пары ^(всею n) решения, и тогда единственное a , при котором есть только 2 пары решения это a , получаемое из точек K и L

$$a = 25$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



т.к. $BF = BD$ и $\angle B = 90^\circ$

то $\angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$

$\angle DCA = \angle CDA$ т.к. они
открываются на хорду,
которая делится в 2

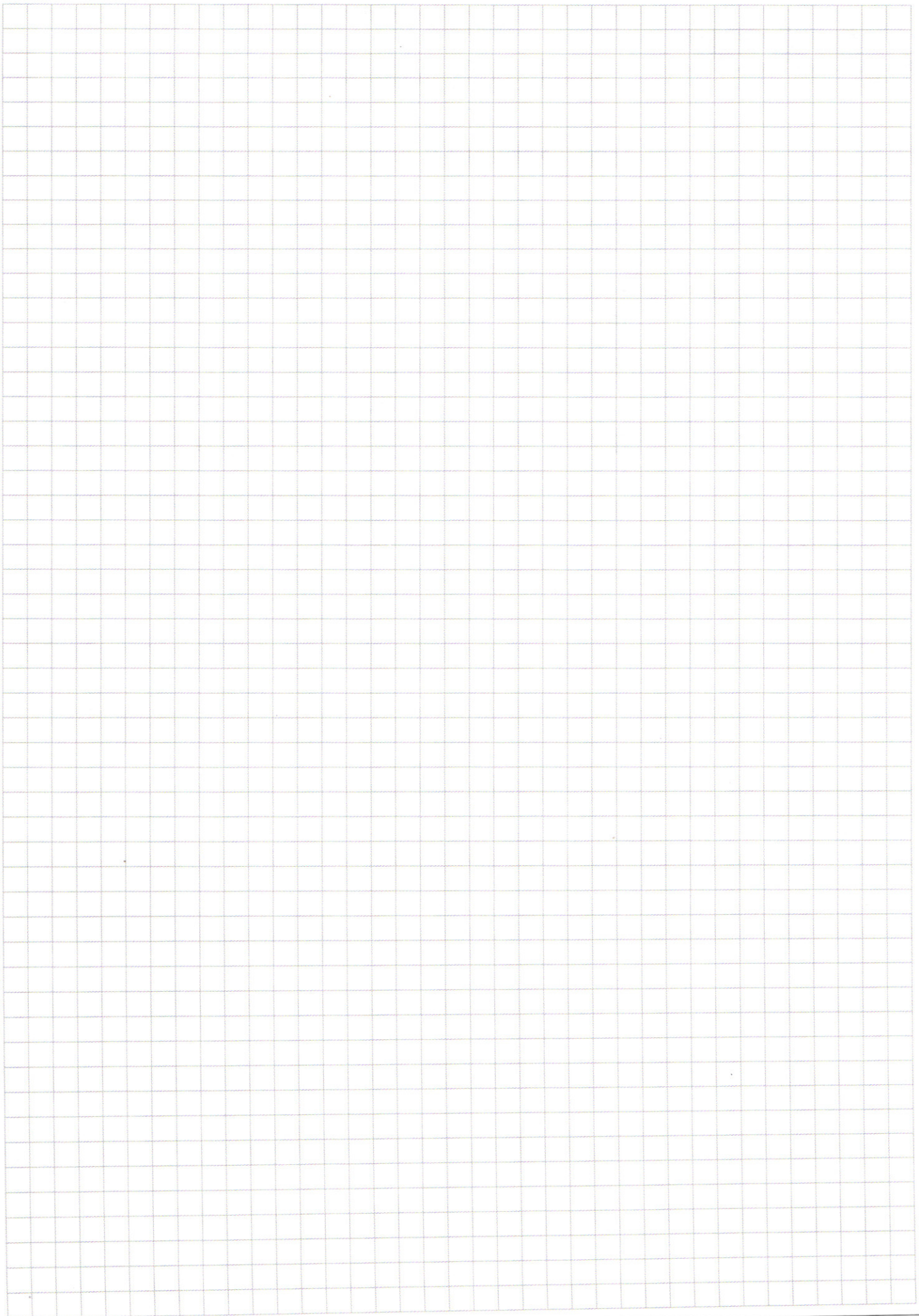
окружностями одинакового

радиуса $\Rightarrow \angle DCA = \angle CDA = 45^\circ$



$\angle FDA = 90^\circ \Rightarrow CA = AD$

$$AB = \sqrt{2} R = \sqrt{2} \cdot 5$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3375 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3$$

1 2 4 3 5 6

1 2 2

1 2 1

2 4 1

1 2 1 4

1 1 2 4

1 1 4 2

1 2 1 4

1 2 4 1

1 4 1 2

1 4 2 1

2 1 1 4

2 1 4 1

2 4 1 1

4 1 1 2

4 1 2 1

4 2 1 1

3 3 3 1 4 5 6

1 3 3 3

3 3 3 1

3 3 1 3

3 1 3 3

2 4

1 2 0

либо в числе есть цифры

$$3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$$

$$3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1120}{\sqrt{680}}$$

3 3 5 5

3 3 5 5

3 5 3 5

3 5 5 3

5 3 3 5

5 3 5 3

5 5 3 3

1 2 0

3 3 3 3 1

5 4 3 2 1

1 2 0

4 \cdot 3 \cdot 2

1 2 0

3 \cdot 2 \cdot 2 = 12

6 4 2 4

8!

3! \cdot 3! \cdot 2!

8 \cdot 2

8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1

3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2

35 \cdot 16 = 560

8!

3! \cdot 3!

8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4

35 \cdot 32

35

32

70

10 5

17 20

$$y^5 \lg x \cdot x^{-\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$y^{2 \lg xy} = y^{2 \lg x} + 2 \lg y =$$

$$y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{2\lg x} \cdot y^{3\lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y} \quad y^{2\lg x} \neq 0$$

$$y^{3\lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2\lg y}$$

$$(10^{\lg y})^{3\lg x} \cdot (10^{\lg x})^{-\lg x} = (10^{\lg y})^{2\lg y}$$

$$3\lg y \cdot \lg x - \lg^2 x = 2\lg^2 y \quad \lg y = a \quad \lg x = b$$

$$2\lg^2 y - 3\lg y \cdot \lg x + \lg^2 x = 0$$

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$(2a - b)(a - b) = 0$$

$$(2\lg y - \lg x) = 0$$

$$(\lg y - \lg x) = 0$$

$$2\lg y = \lg x$$

$$\lg y = \lg x$$

$$\lg y^2 = \lg x$$

$$x = y$$

$$y^2 = x$$

$$x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = 4(y+2)^2 - 4(-3y^2 + 12y) = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = 16(y^2 - 2y + 1) = 4^2 \cdot (y-1)^2 = (4y-4)^2$$

$$x_1 = \frac{2y+4 + 4y-4}{2} = 3y$$

$$x_2 = \frac{2y+4 - 4y+4}{2} = 4-y$$

$$\begin{cases} y^2 = x \\ x = 3y \\ y^2 = 3y \end{cases}$$

$$y(y-3) = 0$$

$$1) y = 0 \quad x = 0$$

$$2) y = 3 \quad x = 9$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = 4-y \end{cases}$$

$$y^2 = 4-y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$(y-2)(y+4) = 0$$

$$\begin{cases} x = y \\ x = 3y \\ x = 0 \end{cases}$$

$$y = 0$$

$$\begin{cases} x = y \\ x = 4-y \\ 3y = 2x = 2 \end{cases}$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

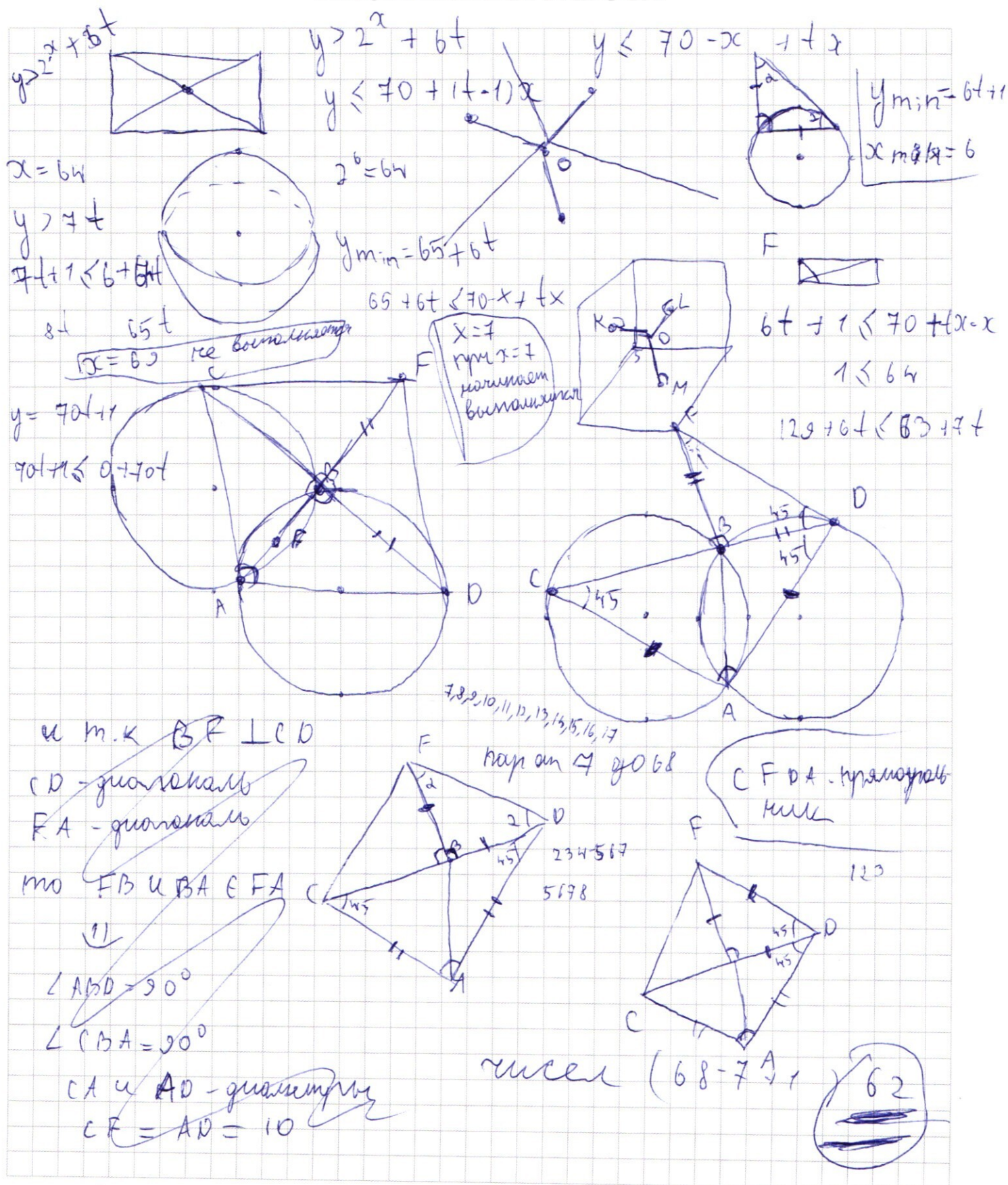
$$4) y_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$5) y_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{18 + 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

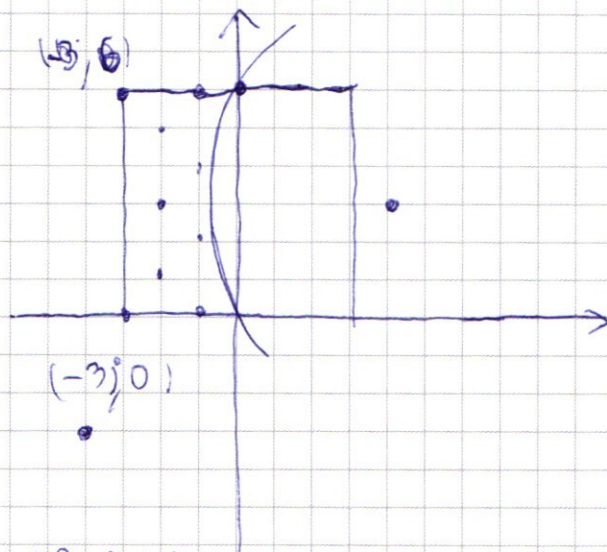
$$x = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

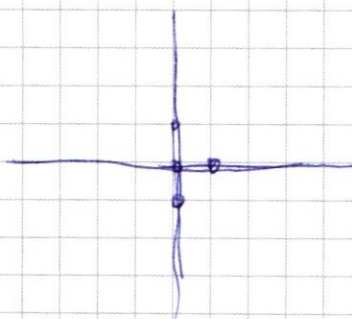




ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\sin 90 - \sin 60$$



$$(-3; 0) \quad 10$$

$$(-3; 6)$$

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 90 - \cos 30 = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1 + 9 = 10$$

$$1 + 9 = 10$$

$$(-2; 1) = 4 + 4 = 8$$

$$(-2; 5) =$$

$$(-1; 0) = 9 + 9 = 18$$

$$(-1; 6) = 18$$

$$(-3; 2) \quad 1 + 1 = 2$$

$$(-3; 4) \quad 1 + 1 = 2$$

$$\cos 60 - \cos 30 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \sin 30$$

$$\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 45 - \cos 45 = 2 \sin 0$$

$$\cos 90 - \cos 30 = \cos 60$$

$$2 \sin 30$$

$$\frac{-\sqrt{3}}{2} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 60$$

$$\cos x - \cos y = 2 \frac{\sin x - y}{2} \cdot \sin \frac{x + y}{2}$$

sin

$$\sin 120^\circ - \sin 60^\circ = + \frac{\sqrt{3}}{2} = -2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ$$

125

$$-2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 7x \cdot \sin 4x$$

$$(\sin 17x - \sin 3x) = -2 \sin 7x$$

52.5

