

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{2}$

$$\cos 11\pi - \cos 3\pi - \sin 11\pi + \sin 3\pi = \sqrt{2} \cos 4\pi$$

$$2 \sin\left(\frac{11\pi+3\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\pi-11\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{11\pi-3\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{11\pi+3\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot (\cos^2 7\pi - \sin^2 7\pi)$$

$$2 \sin\left(\frac{3\pi-11\pi}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{11\pi+3\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{11\pi+3\pi}{2}\right) \right) = \sqrt{2} \cos^2 7\pi - \sqrt{2} \sin^2 7\pi$$

$$-2 \sin 4\pi (\sin 7\pi + \cos 7\pi) = \sqrt{2} (\cos^2 7\pi - \sin^2 7\pi)$$

$$-2 \sin 4\pi (\sin 7\pi - \cos 7\pi) = \sqrt{2} (\cos 7\pi - \sin 7\pi) (\sin 7\pi + \cos 7\pi)$$

$$\begin{cases} \sin 7\pi + \cos 7\pi = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \sin 4\pi = \sqrt{2} (\cos 7\pi - \sin 7\pi) & (2) \end{cases}$$

$$1) \sin 7\pi + \cos 7\pi = 0$$

$$\sin 7\pi + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 7\pi\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(7\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\cos\left(7\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$7\pi - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$7\pi = \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\pi = \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$2) -2 \sin 4\pi = \sqrt{2} (\sin\left(\frac{\pi}{2} - 7\pi\right) - \sin 7\pi)$$

$$-\sqrt{2} \sin 4\pi = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7\pi\right) \cos \frac{\pi}{4}$$

$$-\sqrt{2} \sin 4\pi = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7\pi\right)$$

$$\sin 4\pi = \sin\left(7\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2 \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

(см. на стр. 2)

№2 (Продолжение)

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{8} = \pi k \Rightarrow \pi = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \\ \cos\left(\frac{11}{2}\pi - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \Rightarrow \frac{11}{2}\pi - \frac{\pi}{8} = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow \pi = \pm \frac{\pi}{11} + \frac{\pi}{44} + \frac{4\pi k}{11} \end{cases}$$

Ответ: $\pi \in \left\{ \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{11} + \frac{\pi}{44} + \frac{4\pi k}{11}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \right\}; k \in \mathbb{Z}.$

№1

Разложим 3375 на простые множители. $3375 = 5^3 \cdot 3^3$.

Заметим, что $5 \cdot 3 = 15 \Rightarrow$ Различная чина делна
состоять из двух единиц, трёх тысяч и трёх тысяч:

"1" x 2, "3" x 3, "5" x 3. Тогда количество способов
расставить их на 8 позиций равно:

$$N = C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{2!}{0! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 =$$

$$N = (8 \cdot 7) \cdot (5 \cdot 2) = 560$$

Ответ: 560 чисел

№3

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} &= y^{2 \lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$(2)$$

$$2) x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \Rightarrow -3(y+x-4)(y-\frac{x}{3}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+x=4 \\ y=\frac{x}{3} \end{cases}$$

$$1) \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\text{ОДЗ}^*: x \neq 0; y \neq 0; x > 0 \Rightarrow y > 0$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg xy}$$

$$y^{5 \lg x} / x^{\lg x} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

(см. стр. 3)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y^{5 \lg x} \cdot \frac{1}{10^{\lg^2 x}} = y^{2 \lg x} \cdot 10^{2 \lg^2 y}$ $\sqrt{3}$ Преобразование

$y^{2 \lg x} = 10^{(\lg^2 x + 2 \lg^2 y)}$; т.к. $y = 10^{\lg y}$
 $10^{2 \lg x \lg y} = 10^{(\lg^2 x + 2 \lg^2 y)}$

$2 \lg x \lg y = \lg^2 x + 2 \lg^2 y$; Пусть $\lg x = a$, $\lg y = b$

$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$ $\Rightarrow 9b^2 - 8b^2 = b^2$

$a = \frac{3b \pm b}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lg x = \lg y \\ \lg x = 2 \lg y \end{cases}$

$\begin{cases} x = y \\ x = y^2 \\ x + y = 4 \\ y = \frac{x}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = y \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = y \\ 3x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} - \text{н.у.} \Rightarrow \emptyset \\ \begin{cases} x = y^2 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y^2 + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} - \text{н.у.} \Rightarrow \emptyset \\ \begin{cases} x = y^2 \\ 3x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ 3y^2 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ 3y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 \\ y = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \mp \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \mp \frac{\sqrt{17}}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2} \end{cases}$
 $\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

Ответ: $(2; 2), \left(\frac{3}{4} \mp \frac{\sqrt{17}}{2}; -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}\right), \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right)$

№ 5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 25 & (2) \end{cases}$$

1) $|y-3-x| + |y-3+x| = 6$

1. $y-x \geq 3$; $y+x \geq 3$

$$y-x-3+y+x-3=6$$

$$2y = 12$$

$$y = 6 \Rightarrow x \leq 3 ; x \geq -3$$

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ y = 6 \end{cases}$$

2. $y-x \geq 3$; $y+x < 3$

$$y-x-3-y-x+3=6$$

$$x = -3 \Rightarrow y < 6 ; y \geq 0$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ 0 \leq y < 6 \end{cases}$$

3. $y-x < 3$; $y+x \geq 3$

$$x-y+3+y+x-3=6$$

$$x = 3 \Rightarrow y < 6 ; y \geq 0$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ 0 \leq y < 6 \end{cases}$$

4. $y-x < 3$; $y+x < 3$

$$x-y+3-y-x+3=6$$

$$y = 0 \Rightarrow x > -3 ; x < 3$$

$$\begin{cases} -3 < x < 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

(см. стр. 5)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 Продолжение

$$2) (x-4)^2 + (y-3)^2 = a = r^2 \quad (r - \text{радиус окр.})$$

Есть 4 окружности, с центрами $(4; 3)$, $(4; -3)$, $(-4; 3)$, $(-4; -3)$ и радиусом $\sqrt{a}$, причём каждая лежит в пределах своей четверти, включая оси.

1 случай:

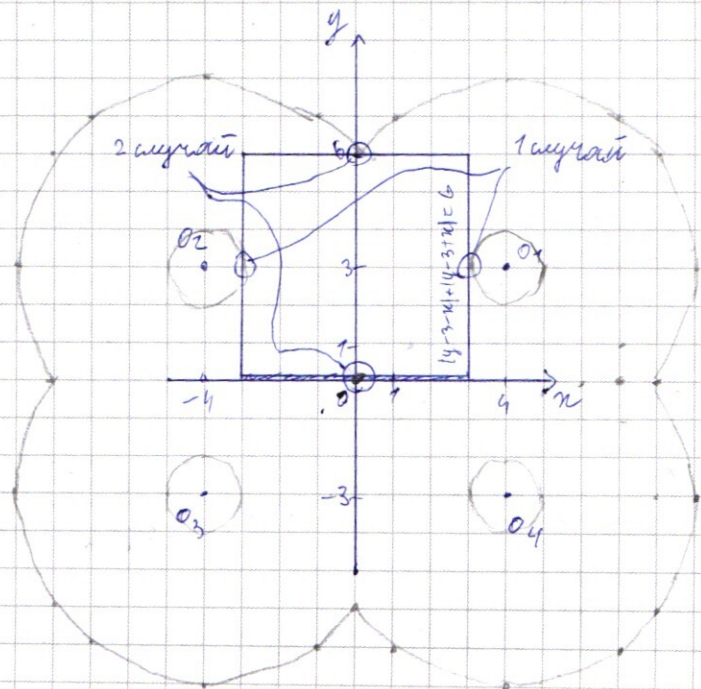
$$r^2 = a = 1^2 \Rightarrow a = 1$$

~~$$r^2 = a = 3^2 + 4^2 = 16 + 9 = 25$$~~

2 случай:

$$r^2 = a = 3^2 + 4^2 = 16 + 9 = 25$$

Ответ: $a \in \{1; 25\}$



№7

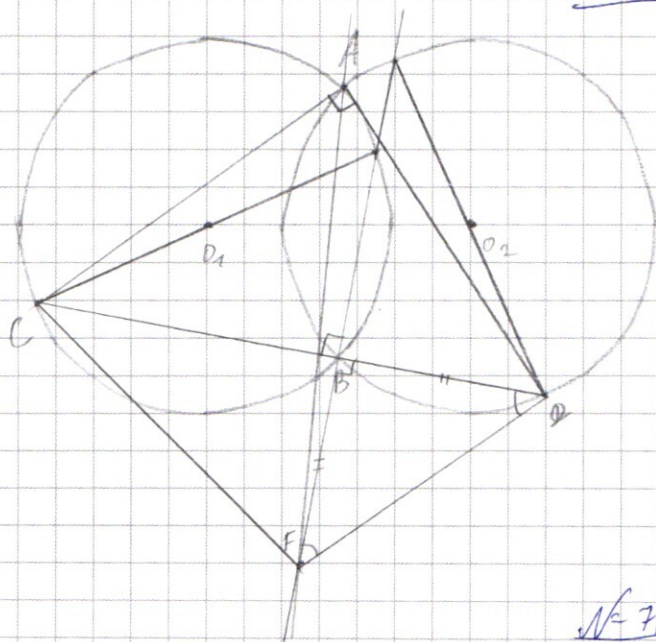
$$\begin{cases} y > 2^n + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)n \end{cases} \quad n, y \in \mathbb{Z}$$

$$2^n + 3 \cdot 2^{65} < 70 + (2^{64} - 1)n$$

$$2^n + 3 \cdot 2 \cdot 2^{64} < 70 + 2^{64} \cdot n - n$$

$$2^n + n - 70 + 2^{64} (6 - n) < 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№ 6

а) Эмпирическим путём было
установлено, что $CF = 2r = 10$

$$S_{ACF} = S_{ACB} + S_{BCF}$$

№ 7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases} \Rightarrow 2^x + 3 \cdot 2^{65} < 70 + (2^{64} - 1)x$$

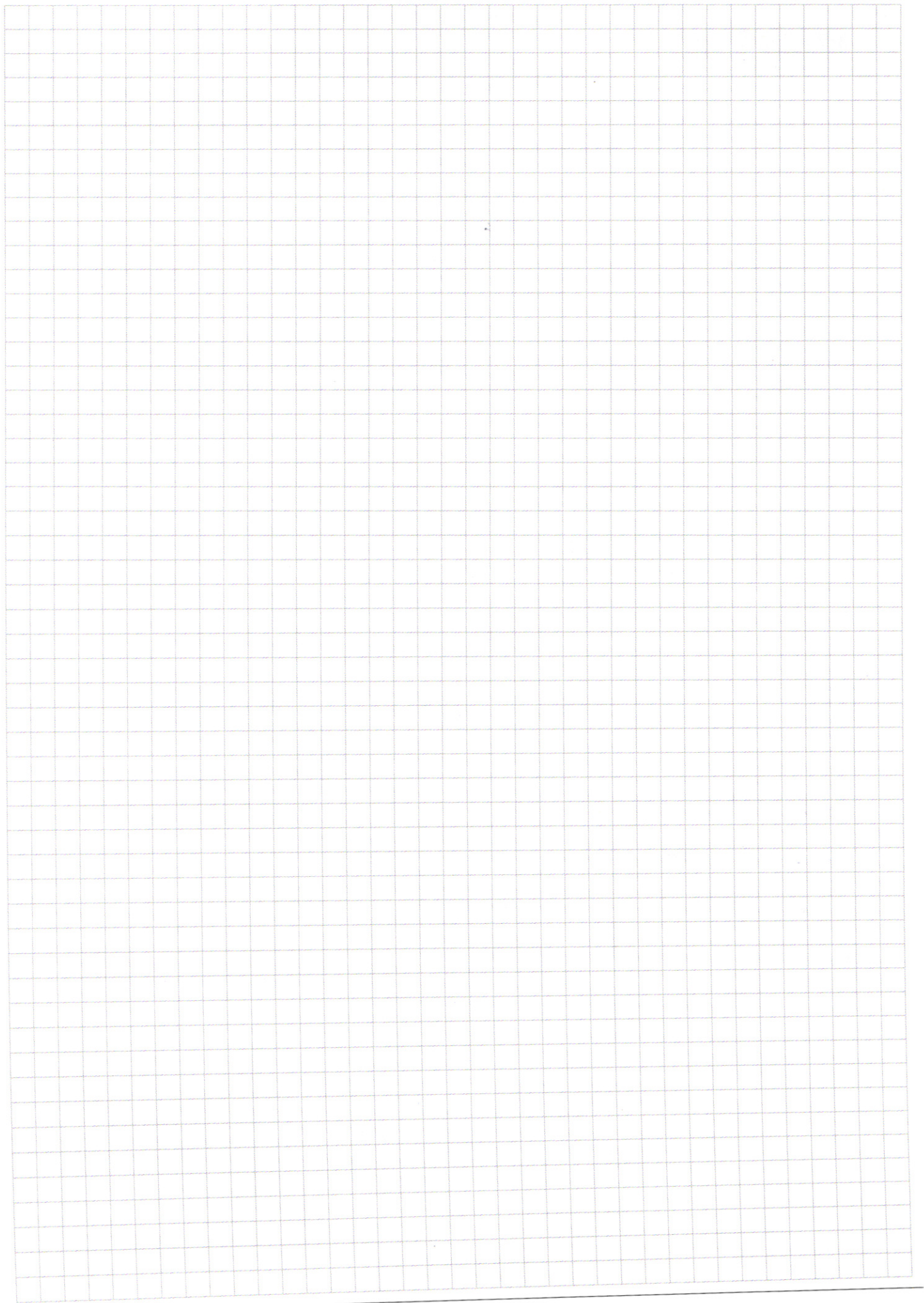
$$2^x + 6 \cdot 2^{64} < 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 6 \cdot 2^{26} < 70 + 2^{26}x - x$$

$$2^x + 6 \cdot 4^6 < 7 \cdot 2 \cdot 5 + 4^6x - x$$

$$2 \cdot 35 - 2^x - x + 4^6(x - 6) > 0$$

$$2(35 - 2^{x-1}) + 4^6(x - 6) - 2^x > 0$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① ② ③ ④ ⑤ 6 7 $\sin \alpha = 35$ $\lg 10 = \cancel{1} \cancel{2} \cancel{18} 23$
 ~~$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2}$~~

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 7 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 α β

$$2 \sin\left(\frac{\pi+y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi-y}{2}\right) = \sin(\pi) + \sin(y)$$

$$\sin(\pi) - \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{\pi-y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi+y}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2} & 2 \cos\left(\frac{\pi+y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi-y}{2}\right) &= \cos \pi + \cos y \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2} & 2 \sin\left(\frac{\pi+y}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi-y}{2}\right) &= \cos \pi - \cos y \end{aligned}$$

$$3375 = 5 \cdot 675 = 5 \cdot 5 \cdot 135 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 27 = 5^3 \cdot 3^3$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$-3y^2 - 2y(x-6) + x(x-4) = 0$$

$$x^2 - 2x(y+2) - 3y(y-4) = 0$$

$$D = 4(x-6)^2 + 12x(x-4) =$$

$$= 4x^2 - 48x + 36 + 12x^2 - 48x =$$

$$= 16x^2 - 96 = 16x =$$

$$= 4(4x^2 - 24x + 36) = 16(x^2 - 6x + 9) =$$

$$= 16(x-3)^2$$

$$y = \frac{2(x-6) \pm 4(x-3)}{-6} = \frac{(2x-12) \pm (4x-12)}{-6} = \begin{cases} \frac{6x-24}{-6} = 4-x \\ \frac{-2x}{-6} = \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$-3(y+x-4)(y-\frac{x}{3}) = x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

