

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

$3375 = 3^3 \cdot 5^3$, значит числа могут содержать только ¹5, 3 или 9,

а именно возможны два случая:

1) числа состоят из цифр 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1; значит всего

таких чисел:

единицы после 50х и 30х
ставятся однозначно

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} \cdot 1 = 560$$

вариантов
поставить
цифры

вариантов
поставить
3 на ост.
после 50х
места

2) числа состоят из цифр: 9, 5, 5, 5, 3, 1, 1, 1; значит всего

таких чисел:

30х ставится после всего однозначно

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} \cdot 2 \cdot 1 = 1120$$

вариантов
поставить
50х

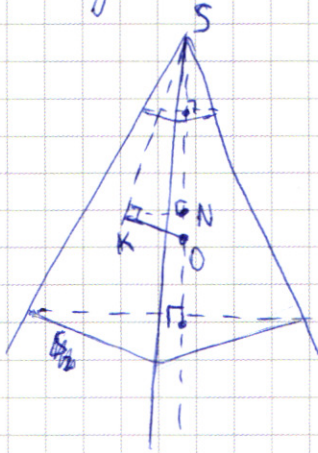
вар. расст.
10х после
50х

вариантов
поставить 90х

Значит всего искомым чисел $560 + 1120 = 1680$

Ответ: 1680

Задача № 4



Пусть α и β - тетраэдры с общей вершиной S и противоположными сторонами с основаниями - сечениями с известными площадями. (α - с меньшим сечением).

Эти тетраэдры подобны, коэффициент подобия $k = \sqrt{\frac{1}{4}}$ (т.к. площади относятся как квадрат коэф. подобия)

$k = \frac{1}{2}$. Пусть h_1 - высота α , опущенная из S .

h_2 - высота β из S , тогда $\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}$, но $h_2 = h_1 + 2r$,

где r - радиус сферы, тогда:

$$\frac{h_1}{h_1 + 2r} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2h_1 = h_1 + 2r \Rightarrow h_1 = 2r,$$

Значит $SO = h_1 + r = 3r$, тогда из прямоугольного треугольника $SOК$:

$$\sin \alpha = \frac{KO}{SO} = \frac{r}{h_1 + 2r} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}, \text{ где } \alpha = \angle KSO.$$

Находим

Опустим перпендикуляр KN из K на SO .

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{из } \triangle SKO: SK = \sqrt{SO^2 - KO^2} = \sqrt{9r^2 - r^2} = 2\sqrt{2}r$$

$$\frac{SN}{SK} = \cos \alpha \Rightarrow SN = SK \cdot \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2\sqrt{2}r = \frac{8}{3}r$$

Триугольные $\triangle SKO$, SLO и $SМО$ равны по катетам - радиусам и общей гипотенузе SO , значит и перпендикуляры из L и M на SO это так же точка N , а значит все сечение плоскостью KLM перпендикулярно SO , а значит тетраэдр из этого сечения (продолжение см на след. странице)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4 (продолжение)
Найдите α и β .

$$\frac{SN}{h_1} = \frac{8 \text{ км}}{3 \cdot 2 \text{ км}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Пусть искомая мощность - S_0 , тогда

$$\frac{S_0}{1} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{4}{3}$; искомая мощность - $\frac{16}{9}$

Задача 5

$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$ - сумма квадратов окружности ограниченные
каждая в своей координатной четверти

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$|y-x| + |y+x| = 6$$

Рассмотрим I коорд. четверти:

II коорд. четверти:

1) $x \geq y$: $x=3$

2) $x < y$: $y=3$

1) $x \geq -y$: $x=-3$

2) $x < -y$: $y=3$

1) $x \geq y$: $y=-3$

2) $x < y$: $x=-3$

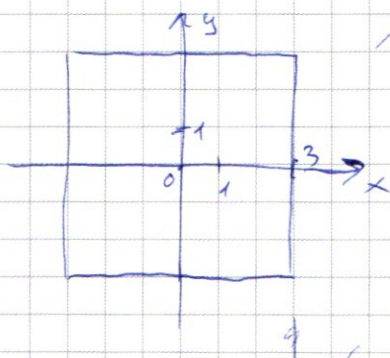
IV: 1) $x \geq -y$: $y=3$

2) $x < -y$: $x=3$

Квадрат с центром $(0;0)$ и стороной 6

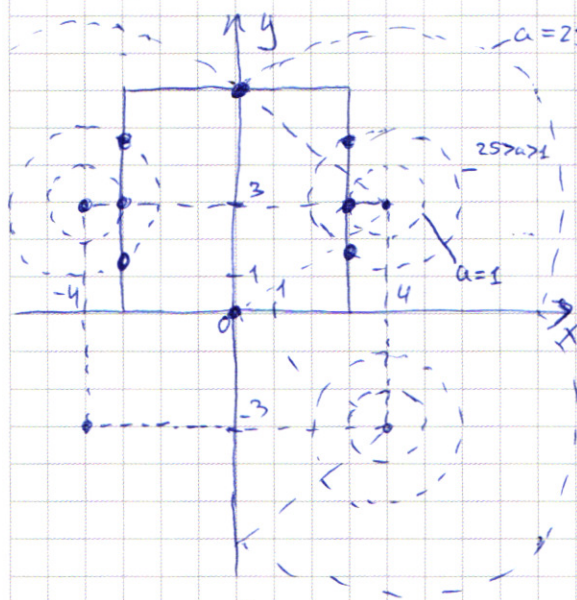
$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

Квадрат с центром $(0;3)$ и
стороной 6 (составить т.о
ГПГФ)



(Продолжение см. на след. стр.)

Задача 5 (продолжение)



- При $a < 1$ - общих точек нет
- При $a = 1$ - две окр. в I и II квтв касаются квадрата $\Rightarrow$ два решения
- При $25 > a > 1$ - более двух реш.
- При $a = 25 (= 4^2 + 3^2)$ - вершины окружности касаются с квадратом по две общие точки $(0; 6)$ и $(0; 0)$, нижние окр. только $(0; 0)$, т.е. всего 2 решения.
- При $a > 25$ общих точек нет

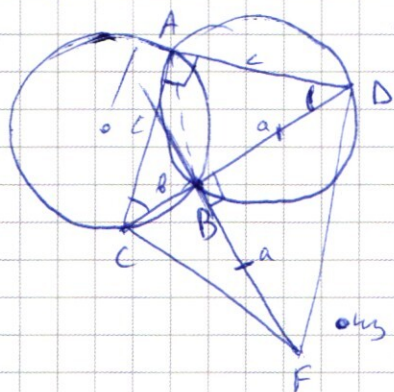
Ответ: $a = 1, a = 25$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2. \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos(11x + 3x)$$

$$\cos 11x - \cos 3x = \sqrt{2} \cos 11x \cdot \cos 3x = \sin 11x - \sin 3x = \sqrt{2} \sin 11x \cdot \sin 3x$$

Задача №6



а) $\angle ACB = \angle ADB$ т.к. они опираются на равные

given $\Rightarrow AC = AD, \angle ADC = 45^\circ$

3) $BD = a$, $CB = b$, $AC = AD = c$, $AB = d$

$$d \cdot \sin \angle ADB = 2.5 \Rightarrow d = 10\sqrt{2}$$

• by ACD:
 $2c^2 = (a+b)^2 \Rightarrow c = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$

• из $\triangle ACB$ по Т. кос:

$$c^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 45^\circ = d^2, \quad c = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

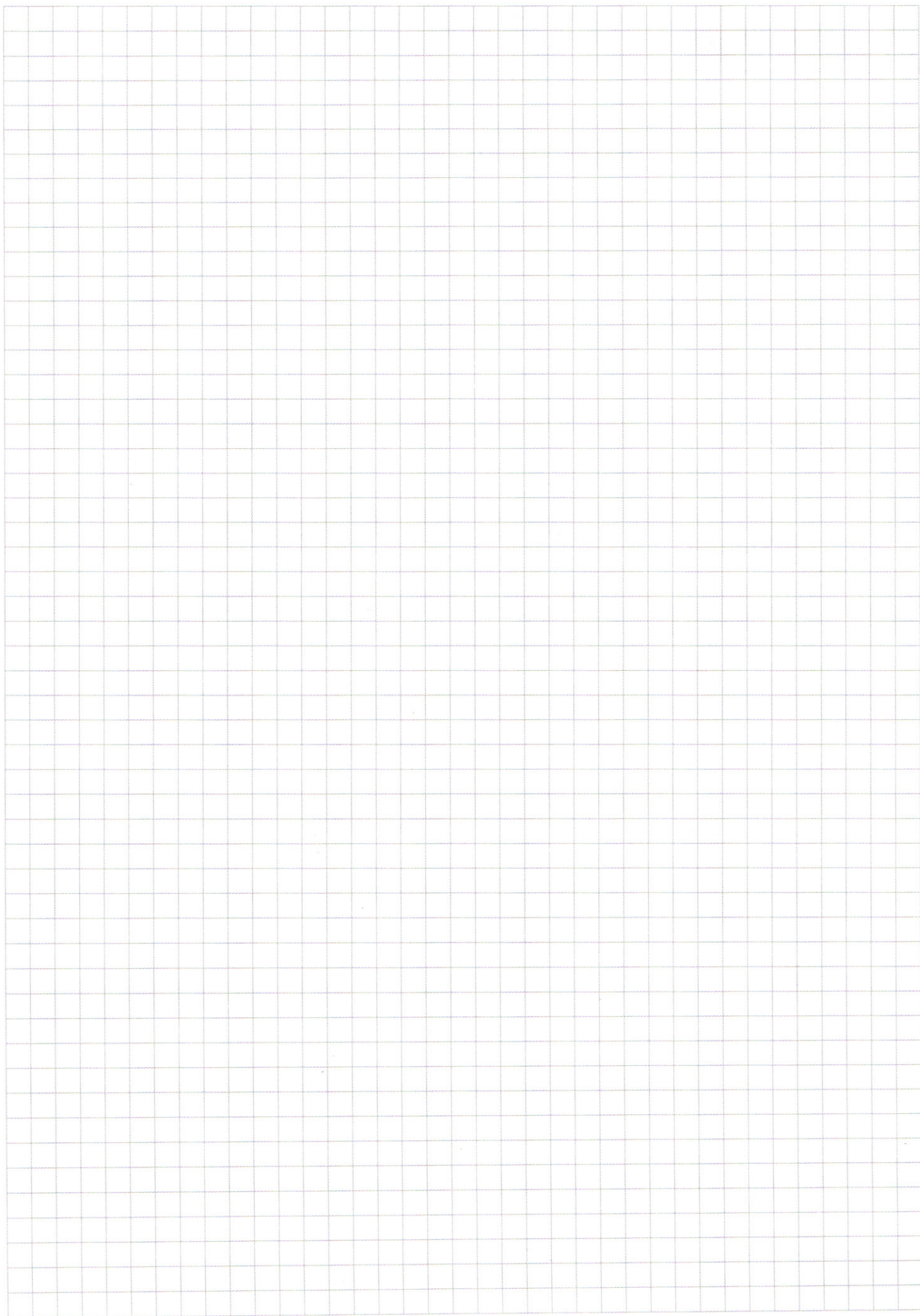
$$\frac{(a+b)^2}{2} + b^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{(a+b)b}{\sqrt{5}} = 200$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} + \cancel{ab} + \cancel{b^2} - \cancel{ab} - \cancel{b^2} = 200$$

$$a^2 + b^2 = 400$$

$w_3 \triangleq CBF: CF = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{400} = 20$

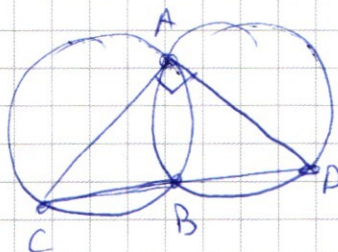
Übungen: a) $CF = 20$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



3 - 11

$$\sin 8x \cdot \cos 7x + \cos$$

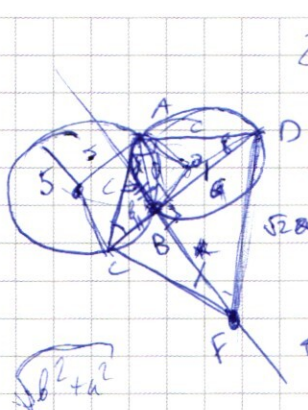
$$\frac{\ln x \times \ln 10}{\ln 10 \ln xy} = \log_{xy} x$$

$$\frac{x^3}{x^{\log_y x}} = x^{y^2}$$

$$x^3 = y^2 \cdot x^{\log_y x}$$

$$y^2 = x^{3 - \log_y x}$$

$$x^2 = 2x$$



$$2c^2 = (a+b)^2 \quad c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$x = \frac{100}{\sqrt{2}} = 10.52$$

$$d = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

$$a^2 + 5ac = b^2 + \sqrt{2}bc$$

$$c^2 + a^2 + 5ac = 10\sqrt{2}$$

$$a^2 + 5ac = b^2 + \sqrt{2}bc$$

$$a^2 - \sqrt{2}a(a+b) = 10\sqrt{2}$$

$$a^2 - a^2 - ab = 200$$

$$d = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 10$$

$$d = \frac{20}{\sqrt{2}} \quad d^2 = \frac{400}{2} = 200$$

$$ab = 400 - 36 = 364$$

$$a =$$

$$\sqrt{\frac{c^2}{b^2} + 400}$$

$$c = \frac{a+b}{\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$$

$$a^2 + c^2 - 2ac \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 200$$

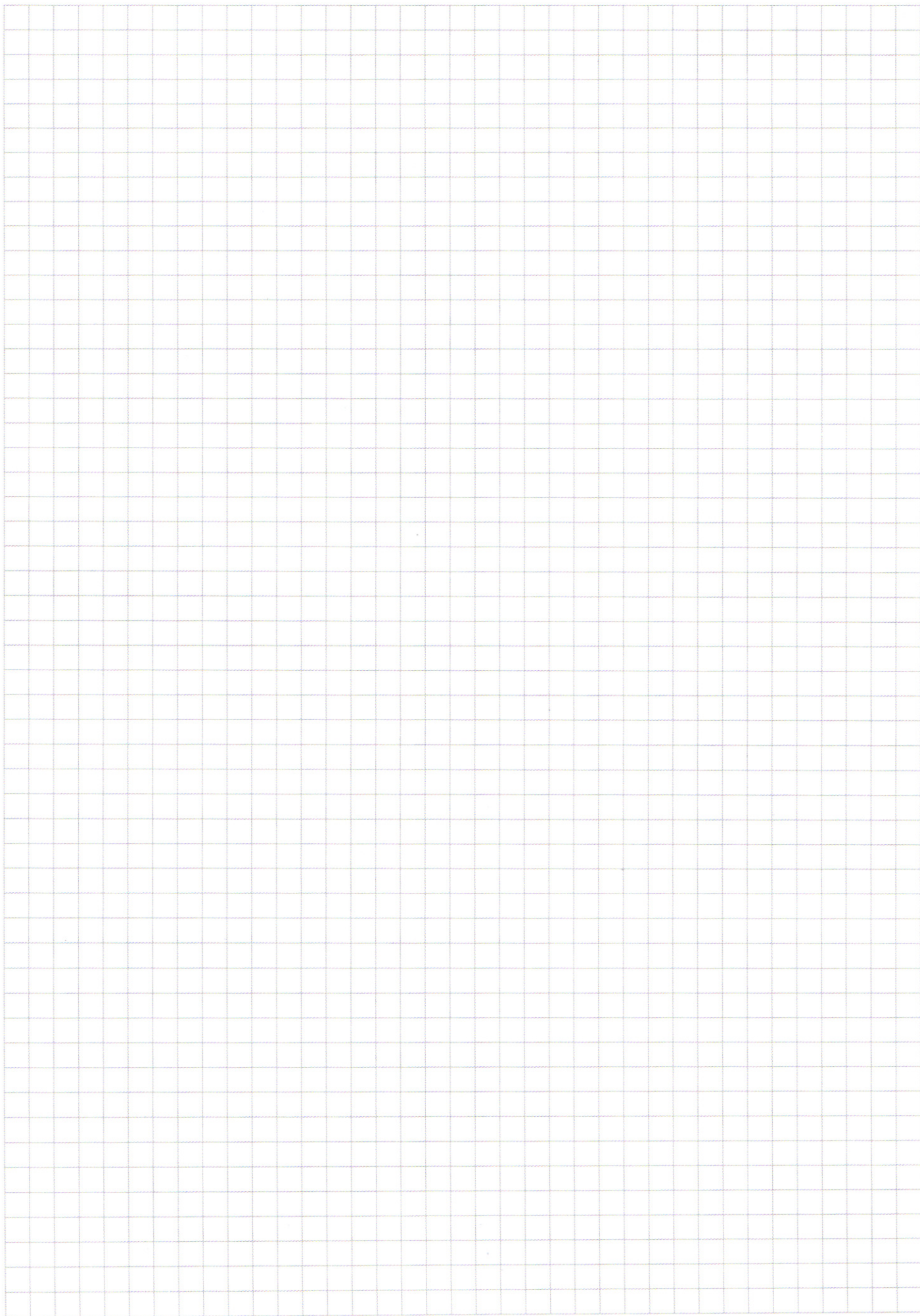
$$a^2 + \frac{(a+b)^2}{2} - \frac{a(a+b)}{\sqrt{2}} = 200$$

$$a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + ab - \frac{a^2}{\sqrt{2}} - \frac{ab}{\sqrt{2}} = 200$$

$$a^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{ab}{2} = 200$$

$$a^2 = 200$$

$$a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + ab - a^2 - ab =$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 25} \\ \underline{25} \\ 87 \\ \underline{75} \\ 125 \\ \underline{125} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ \underline{10} \\ 35 \\ \underline{35} \\ 0 \end{array}$$

$$25 \cdot 5 \cdot 27 = 5^3 \cdot 3^3$$

$$1) 5553 \cdot 3311$$

$$2) 55593111$$

$$1) \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} =$$

2)

$$3) x^2 - 2xy + y^2 - 4y^2 + 12y - 4x = 0 \quad \sqrt{3}x \quad \frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$(x-y)^2 - 4y^2 + 12y - 4x = 0 \quad 4x^2 - 2xy + \frac{1}{4}y^2 - (3x^2 + 4x + \frac{4}{3}) - \frac{13}{4}y^2$$

$$\frac{3}{4}x^2 \quad \frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3}}$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$(x-y)^2 - (4y^2 - 2 \cdot 2y \cdot 3 + 9) + 9 - 4x = 0$$

$$(x-y)^2 - (2y-3)^2 + 9 - 4x = 0$$

$$\frac{x}{y} - 2\frac{y}{x} - \frac{4}{y} - \frac{3y}{x} + \frac{12}{x} = 0$$

$$(x-y)^2 + 9 = (2y-3)^2 + 4x$$

$$\frac{5 \log x}{e} = \log x y$$

$$y^{\frac{5}{3}x} = y^{2 \log x y} \cdot x^{\frac{5}{3}x}$$

$$y^5 = x y^{2 \log x y}$$

$$a = 1$$

$$a = 25$$

$$\frac{\ln x y}{\ln x} \rightarrow \frac{\ln x y}{\ln x}$$

$$\frac{\log x y}{\log x} \quad \log x y$$

$$y > x > 0$$

$$|y-x| + |y+3| = 6$$

$$I) y \geq x$$

$$y - x + y + x = 6$$

$$y = 3$$

$$2) y < x$$

$$x + y + y + x = 6$$

$$x = 3$$

$$II) \begin{array}{l} x \leq 0 \\ y > 0 \end{array}$$

$$1) |y| > |x| \quad 2) |y| < |x|$$

$$1) y > -x \quad 2) y < -x$$

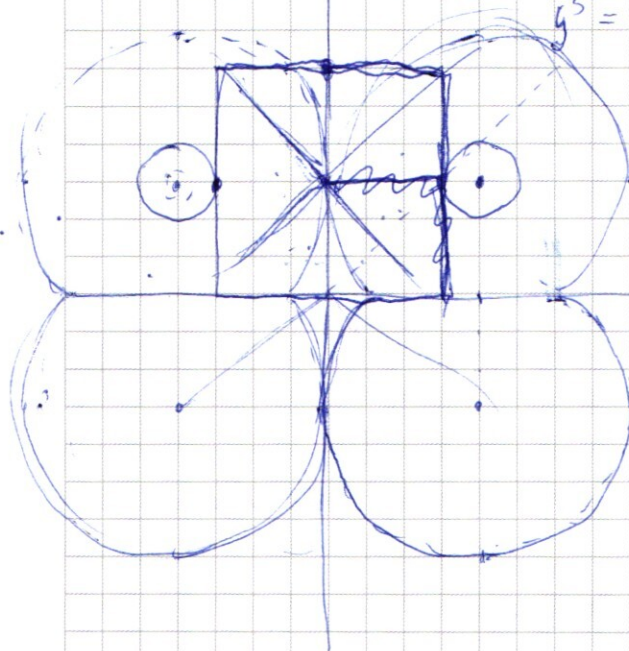
$$1) y - x + y + x = 6$$

$$y = 3$$

$$2) y - x - y - x = 6$$

$$-2x = 6$$

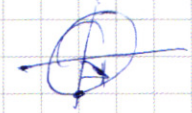
$$x = -3$$



$$\sin \alpha - \sin \beta =$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$



$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin(\alpha+\beta) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin \alpha - \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \beta \right)$$

$$\cos(3x+11x) = \cos 3x \cdot \cos 11x - \sin 3x \cdot \sin 11x$$

$$\cos 11x - \sqrt{2} \cos 3x \cos 11x - \cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2} \sin 3x \sin 11x - \sin 11x = 0 \quad \left(\sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$\cos 11x (1 - \sqrt{2} \cos 3x) - \cos 3x$$

$$\sin x = a \quad \sin 11x = b$$

$$\sin 3x + \sqrt{2} \sin 3x \sin 11x - \sin 11x = \cos 3x + \sqrt{2} \cos 3x \cos 11x - \cos 11x$$

$$f(\sin x) = f(\cos x)$$

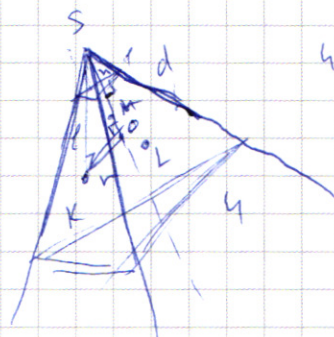
$$a + \sqrt{2} ab - b = \sqrt{1-a^2} + \sqrt{2} \sqrt{1-a^2} \sqrt{1-b^2} - \sqrt{1-b^2}$$

$$\cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} (\cos 3x \cos 11x) = \cos 11x - \sin 11x$$

$$a - \sqrt{1-a^2} + \sqrt{2} ab = b - \sqrt{1-b^2} + \sqrt{2} \sqrt{1-a^2} \sqrt{1-b^2}$$

$$\cos 3x (1 - \tan 3x) + \sqrt{2} \cos 3x (1 - \tan 3x)$$

$$a^2 + 2a^2b^2 + b^2 + 2\sqrt{2}ab - 2ab - 2\sqrt{2}ab^2 = 1-a^2 + 1-b^2 + 2(1-a^2)(1-b^2) + 2\sqrt{2}(1-a^2)\sqrt{1-b^2} -$$



$$h_1 S \alpha = S \beta$$

$$\frac{S \alpha}{S \beta} = \frac{1}{4}$$

$$k = \frac{1}{2}$$

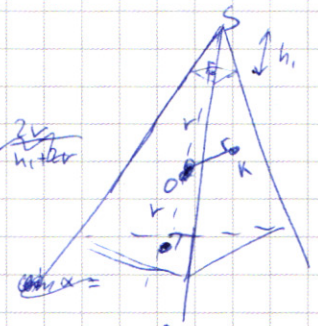
$$h_2 = h_1 + 2r$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2} = \frac{h_1}{h_1 + 2r}$$

$$2h_1 = h_1 + 2r$$

$$h_1 = 2r$$

$$\sin \alpha = \frac{r}{h_1 + r} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$$



$$\cos \alpha = \frac{d}{2}$$

$$\alpha + \beta = \pi$$

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{m+n}{2} = \alpha \quad \sin(\alpha + \beta) \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin \alpha + \sin \beta) \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{8}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$\frac{8}{9} = \frac{d^2}{8r^2}$$

$$\sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \sin\left(11x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) = \cos 14x = \cos\left(\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\pi}{4} - 11x\right)\right)$$

$$2 \sin\left(-4x\right) \cdot \cos\left(14x + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2 \sin \frac{m+n}{2} \cos \frac{m-n}{2}$$

$$\frac{64}{9} r^2 = d^2$$

