

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$ - восьмизначное число. Тогда:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = 3375$$

$3375 = 3^3 \cdot 5^3$. Единственная цифра, которая даёт множитель 5 — это 5. Поэтому при цифры восьмизначного числа всегда будут 5. А 3^3 возможно получить двумя вариантами: 1) в числе 3 цифры 3; 2) В числе одна цифра 3 и одна цифра 9. Исходя из этого, число всегда будет содержать две единицы, если рассматривается вариант 1), и равно 3 единицы, если рассматривается вариант 2).

Рассмотрим 2 случая:

1) Число содержит две цифры 1; три цифры 5, три цифры 3. Тогда таких чисел:

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} =$$

$$= \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 2} = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 560 \text{ чисел.}$$

2) Число содержит три цифры 1; три цифры 5; одну цифру 3; одну цифру 9. Тогда таких чисел:

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} = 1120 \text{ чисел}$$

Тогда всего чисел: $560 + 1120 = 1680$ чисел.

Ответ: в восьмизначном числе всегда будет две единицы, т.е. 3375 при разложении даёт 6 простых множителей.

✓1 (продолжение)

лей. Поэтому два места всегда будут "пустыми", т.е. на
их месте будет 1. При этом возникает случай с тремя
единицами, когда два из них можно 3 преобразовать в
0. Далее ни одна цифра не может равняться 0, иначе
все произведение обратится в 0.

Ответ: 1680 чисел.

✓3

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \quad (1)$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (2)$$

Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение:

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

Решим как квадратное уравнение относительно x :

$$x^2 - (2y+4)x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = 16(y^2 - 2y + 1) = 16(y-1)^2$$

$$x_1 = \frac{2y+4 + 4(y-1)}{2} = 3y$$

$$x_2 = \frac{2y+4 - 4y+4}{2} = 4-y$$

Преобразуем:

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = (x-3y)(x+y-4) = 0$$

Отсюда вытекает два случая:

1 $x = 3y$

Подставим в (1):

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{4 \lg 3y}$$

По ОДЗ $y > 0$. Преобразуем:

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{4 \lg 3y}$$

$$\frac{y^{4 \lg 3y}}{3^{\lg 3y}} - y^{4 \lg 3y} = 0$$

$$y^{4 \lg 3y} \left(\frac{1}{3^{\lg 3y}} - 1 \right) = 0$$

$$1) y^{4 \lg 3y} = 0$$

Не имеет

решений на ОДЗ.

$$2) \frac{1}{3^{\lg 3y}} - 1 = 0$$

$$3^{\lg 3y} = 1$$

$$3^{\lg 3y} = 3^0$$

$$\lg 3y = 0$$

$$y = \frac{1}{3}$$

Отсюда $x = 1$. Тогда $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ — решение системы.

II $x = 4 - y$

Подставим в (1)

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{5 \lg(4-y)}$$

Отсюда: $0 < y < 4$; $0 < x < 4$

$$\left(\frac{y^{5 \lg(4-y)}}{4-y}\right) = y^{2 \lg(4-y)}$$

$$\frac{y^{5 \lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{2 \lg(4-y)}$$

$$y^{5 \lg(4-y)} - y^{2 \lg(4-y)} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} = 0$$

$$y^{5 \lg(4-y)} - y^{2 \lg(4-y) + 2 \lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} = 0$$

$$y^{5 \lg(4-y)} - y^{2 \lg(4-y)} \cdot y^{2 \lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} = 0$$

$$(4-y)^{5 \lg y} - (4-y)^{2 \lg y} \cdot y^{2 \lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} = 0$$

$$(4-y)^{2 \lg y} \left((4-y)^{3 \lg y} - y^{2 \lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} \right) = 0$$

$$(4-y)^{2 \lg y} = 0$$

Не имеет решений на $0 < y < 4$.

$$(4-y)^{3 \lg y} - y^{2 \lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} = 0$$

$$(4-y)^{3 \lg y} - y^{2 \lg y} \cdot 10^{\lg^2(4-y)} = 0$$

$$(4-y)^{3 \lg y} - 10^{2 \lg^2 y} \cdot 10^{\lg^2(4-y)} = 0$$

$$10^{3 \lg^2 y \cdot \lg y} = 10^{2 \lg^2 y + \lg^2(4-y)}$$

$$3 \lg^2 y \cdot \lg y = 2 \lg^2 y + \lg^2(4-y)$$

$$\lg^2 y (3 \lg y - 2) = \lg^2(4-y)$$

$$3 \lg y - 2 = \left(\frac{\lg(4-y)}{\lg y} \right)^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 3 (предположение)

$$3 \log_y (4-y) - 2 = \log_y^2 (4-y)$$

пусть $\log_y (4-y) = t$

$$3t - 2 = t^2$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = 1 ; t_2 = 2$$

1) $\log_y (4-y) = 1$

$$y = 4-y$$

$$y = 2$$

2) $\log_y (4-y) = 2$

$$y^2 = 4-y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ — не подходит из-за ООЗ.}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Тогда: Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} ; \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} ; \begin{cases} x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Найдём все целые x . Система равносильна:

$$70 + (2^{64} - 1)x \geq y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}. \text{ Тогда:}$$

$$70 + 2^{64}x - x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

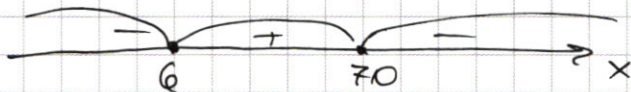
$$70 + 2^{64} \cdot x - x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} > 0$$

Заметим, что при $x = 6$ и при $x = 70$

$$70 + 2^{64} \cdot x - x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} = 0$$

При этом, если $x < 6$, то $70 + 2^{64} \cdot x - x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} < 0$, т.е. $-3 \cdot 2^{65} < 70 + 2^{64} \cdot x - x - 2^x$. Если $x > 70$, то

$70 + 2^{64} \cdot x - x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} < 0$, т.е. $f(x) = -2^x$ резко возрастает по модулю и всё выражение становится отрицательным.



П.с. функции не жёсткая, то применим метод интервалов. Тогда, при ~~$x \in (6; 70)$~~ $x \in (6; 70)$

$$70 + 2^{64} \cdot x - x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} > 0.$$

П.с. неравенство решается в целых числах, то на промежутке $(6; 70)$ при $x \in \mathbb{Z}$ все значения неравенства целые. Тогда для каждого x существует $70 + 2^{64} \cdot x - x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}$ y -ков. Но есть для каждого x существует $70 + 2^{64} \cdot x - x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}$ пар $(x; y)$, удовлетворяющих неравенству. Тогда исходно:

$$\sum_{x=7}^{83} (70 + 2^{64}x - x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}) \text{ считаем:}$$

$$2^{64}x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} \neq 70 - x$$

$$2^{64}(x - 6) - 2^x + 70 - x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 7 (подсчитали)

$$\begin{aligned} \text{Итого} \sum_{x=2}^{63} (2^{64(x-6)} - 2^x + 7(1-x)) &= \\ &= (2^{64} + 2 \cdot 2^{64} + 3 \cdot 2^{64} + 4 \cdot 2^{64} + \dots + 63 \cdot 2^{64}) - (2^7 + 2^8 + 2^9 + \dots + 2^{63}) + (1 + 2 + 3 + \dots + 63) = \\ &= \frac{2^{64} + 63 \cdot 2^{64}}{2} \cdot 63 - \left(\frac{2^7(2^{63}-1)}{1} \right) + \left(\frac{1+63}{2} \cdot 63 \right) = \\ &= 32 \cdot 63 \cdot 2^{64} - 2^7(2^{63}-1) + 32 \cdot 63 = (2^{64}+1)32 \cdot 63 - 2^7(2^{63}-1) = \\ &= (2^{63} + 2^5)63 - 2^{70} + 2^7 = 63 \cdot 2^{63} + 2016 - 2 \cdot 2^{63} + 128 = \\ &= 61 \cdot 2^{63} + 2144 \text{ перн.} \end{aligned}$$

Ответ: $61 \cdot 2^{63} + 2144$ перн.

~ 2

$$\begin{aligned} \cos 14x - \cos 3x - \sin 14x + \sin 3x &= \sqrt{2} \cos 14x \\ -2 \sin 7x \cdot \sin 4x - (2 \sin 4x \cdot \cos 7x) &= \sqrt{2} \cos 14x \\ -2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x - \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) &= 0 \quad (1) \\ 2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) + \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x) &= 0 \\ (\sin 7x + \cos 7x) (2 \sin 4x + \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)) &= 0 \end{aligned}$$

1) $\sin 7x + \cos 7x = 0$

$\tan 7x = -1$

$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}; k \in \mathbb{Z}$

2) $2 \sin 4x + \sqrt{2} \cos 7x - \sqrt{2} \sin 7x = 0$

$2 \sin 4x = \sqrt{2} \sin 7x - \sqrt{2} \cos 7x$

$$2\sin 4x = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x\right) \quad \sqrt{2}(\sin 7x - \cos 7x)$$

$$2\sin 4x = 2\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin 4x = \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

~~$4x = 7x - \frac{\pi}{4}$~~

$$1) 4x = 7x - \frac{\pi}{4}$$

$$3x = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{12}; \text{ с учётом периодичности:}$$

$$\del{x = \frac{\pi}{12} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}} \quad x = \frac{\pi}{12} + 2\pi m; m \in \mathbb{Z}$$

$$2) 4x = \pi - 7x + \frac{\pi}{4}$$

$$11x = \frac{5\pi}{4}$$

$$x = \frac{5\pi}{44}; \text{ с учётом периодичности:}$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

Итого, объединив все ответы:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}; k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + 2\pi m; m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{44} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$x = \frac{\pi}{12} + 2\pi m; m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}; k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + 2\pi m; m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{44} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y^{5 \lg(4-y)} - y^{2 \lg(4-y)} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} = 0$$

$$(4-y)^{5 \lg y} - y^{2 \lg(4-y)} + 2 \lg y \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} = 0$$

$$(4-y)^{5 \lg y} - y^{2 \lg(4-y)} \cdot y^{2 \lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} = 0$$

$$(4-y)^{5 \lg y} - (4-y)^{2 \lg y} \cdot y^{2 \lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} = 0$$

$$(4-y)^{2 \lg y} \left((4-y)^{3 \lg y} - y^{2 \lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} \right) = 0$$

$$(4-y)^{3 \lg y} - y^{2 \lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} = 0$$

$$\lg^2(4-y) \cdot \lg^{-1}(4-y) = \lg^1(4-y) \lg_{(4-y)} 10$$

$$(4-y)^{3 \lg y} - y^{2 \lg y} \cdot 10^{\lg^2(4-y)} = 0$$

$$(4-y)^{3 \lg y} - 10^{2 \lg^2 y} \cdot 10^{\lg^2(4-y)} = y^{2 \lg^2 y} \cdot \lg^{-1} y = y^{2 \lg^2 y} \cdot \lg_{10} 10$$

$$(4-y)^{3 \lg y} - 10^{2 \lg^2 y + \lg^2(4-y)} = 0$$

$$(4-y)^{3 \lg^2 y \cdot \lg_{10} 10} = 10^{2 \lg^2 y + \lg^2(4-y)} \cdot 10^{2 \lg^2 y}$$

$$10^{3 \lg^2 y \cdot \lg_{10}(4-y)} = 10^{2 \lg^2 y + \lg^2(4-y)}$$

$$3 \lg^2 y \cdot \lg_{10}(4-y) = 2 \lg^2 y + \lg^2(4-y)$$

$$\lg^2 y (3 \lg_{10}(4-y) - 2) = \lg^2(4-y)$$

$$3 \lg_{10}(4-y) - 2 = \left(\frac{\lg(4-y)}{\lg y} \right)^2$$

$$3\log_y(4-y) - 2 = \log_y^2(4-y)$$

$$\log_y^2(4-y) = 6$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$D = 1$$

$$t_1 = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$t_2 = 1$$

$$\log_y(4-y) = 1$$

$$y = 4-y$$

$$y = 2$$

$$\log_y(4-y) = 2$$

$$y^2 = 4-y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - (2y+4)x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y =$$

$$= 16y^2 - 32y + 16 = 16(y^2 - 2y + 1) = 16(y-1)^2$$

$$x_1 = \frac{2y+4 + 4(y-1)}{2} = \frac{2y+4+4y-4}{2} = 3y$$

$$x_2 = \frac{2y+4 - 4(y-1)}{2} = \frac{8-2y}{2} = 4-y$$

$$(x-3y)(x+y-4) = 0$$

$$x^2 + xy - 4x - 3yx - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x = 3y$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{4 \lg 3y}$$

$$\frac{y^{4 \lg 3y}}{3^{\lg 3y}} = y^{4 \lg 3y}$$

$$\frac{y^{4 \lg 3y}}{3^{\lg 3y}} - y^{4 \lg 3y} = 0$$

$$y^{4 \lg 3y} \left(\frac{1}{3^{\lg 3y}} - 1 \right) = 0$$

$$y^{4 \lg 3y} = 0$$

$$\frac{1}{3^{\lg 3y}} - 1 = 0$$

$$1 - 3^{\lg 3y} = 0$$

$$3^{\lg 3y} = 1$$

$$\lg 3y = 0$$

$$3y = 1$$

$$\begin{matrix} y = \frac{1}{3} \\ x = 1 \end{matrix}$$

$$x = 4 - y$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y} \right)^{\lg 4-y}$$

$$= y^{2 \lg (4-y)y}$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y} \right)^{\lg 4-y}$$

$$= y^{2 \lg 4y - y^2}$$

$$y^{5 \lg (4-y)}$$

$$\frac{y^{5 \lg (4-y)}}{(4-y)^{\lg (4-y)}}$$

$$- y^{2 \lg (4-y)y} = 0$$

$$y^{5 \lg (4-y)}$$

$$- y^{2 \lg (4-y)y} \cdot (4-y)^{\lg (4-y)} = 0$$

$$(4-y)^{5 \lg y}$$

$$- (y(4-y))^{2 \lg y} \cdot (4-y)^{\lg (4-y)} = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9 \end{cases}$$

$$|y-(3+x)| + |y-(3-x)| = 6$$

$$\begin{cases} y \geq 3+x \\ y \geq 3-x \end{cases}$$

$$y-3-x+y-3+x = 6$$

$$y-3+x=6$$

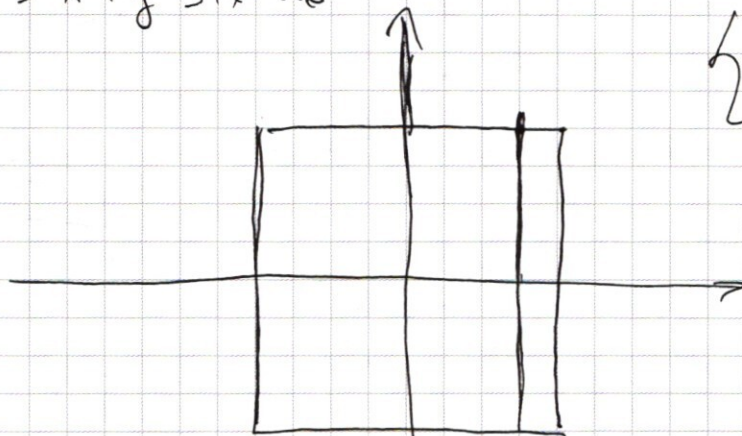
$$y+x=9$$

$$y-3-x=0 \quad x \leq 4$$

$$y-x=3$$

$$y+x=9$$

$$\begin{cases} y=6 \\ x=3 \end{cases}$$



$$|y-7| + |y+1| = 6$$

7

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 + 2^{64} \cdot x - x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} > 0$$

$$70 + 2^{64} \cdot 3 - 3 - 8 - 3 \cdot 2^{65} > 0$$

$$59 + 3 \cdot 2^{64} - 3 \cdot 2^{65} = 59 + 3 \cdot 2^{64} (1 - 2) =$$

$$59 - 3 \cdot 2^{64} < 0$$

$$70 + 2^{66} - 4 - 16 - 3 \cdot 2^{65} =$$

$$50 + 2^{66} - 3 \cdot 2^{65} \quad (x=4)$$

$$70 + 2^{70} - 64 - 2^{64} - 3 \cdot 2^{65}$$

$$6 + 2^{70} - 2^{64} - 3 \cdot 2^{65} =$$

$$= 6 + 2^{64} (64 - 1 - 6) = 6 + 2^{64} \cdot 57$$

$$70 + 2^{71} - 128 - 2^{68}$$

$$70 + 2^{64} \cdot 70 - 70 - 2^{70} - 3 \cdot 2^{65} =$$

$$= 2^{65} \cdot 35 - 2^{70} - 3 \cdot 2^{65} = 2^{65} (35 - 32 - 3) = 0$$

$$x \in [6, 69]$$

$$x \in [7, 69]$$

$$70 + 2^{64} \cdot 5 - 5 - 32 - 3 \cdot 2^{65} =$$

$$= 33 + 2^{64} (5 - 6)$$

$$70 + 2^{64} \cdot 6 - 6 - 64 - 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^{64} (6 - 6) = 0$$

$$70 + 2^{64} \cdot \log_2 t - \log_2 t - \frac{t}{3 \cdot 2^{65}}$$

$$2^x = t$$

$$\log_2 t = x$$

$$2^x = t$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 3 \\ 1125 & 3 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

$$\begin{array}{c} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 \\ \hline 555 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 \\ \text{Фиксированно} \end{array}$$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$$

$$8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

$$10^5$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 8$$

$$1 \cdot 1 \cdot a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$$

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \\ 3 \quad 3 \quad 5 \quad 5 \end{array}$$

$$11333555$$

$$335355$$

$$335535$$

$$335553$$

$$353553$$

$$353355$$

$$353535$$

$$3 \times 3$$

$$5 \times 3$$

$$1 \times 2$$

$$\frac{8!}{2!3!3!} =$$

$$\frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 6} =$$

$$2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 10 \cdot 56 = 560$$

$$\begin{array}{l} 1 \times 1 \\ 2 \times 2 \\ 3 \times 1 \end{array}$$

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

$$1223$$

$$2213$$

$$2231$$

$$2123$$

$$2132$$

$$1223$$

$$1232$$

$$1322$$

$$3122$$

$$3221$$

$$2321$$

$$3212$$

$$2312$$

111 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$

8!

$$5 \times 3$$

$$3 \times 1$$

$$9 \times 1$$

$$1 \times 3$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 20 \cdot 56 = 1120$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2 \sin x \cdot \sin y$$

$$x-y = \beta$$

$$x+y = \alpha$$

$$2x = \alpha + \beta$$

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$(\cos \beta) - \cos \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2y = \alpha - \beta$$

$$y = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x = 2 \cdot \sin 7x \cdot \sin -4x$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin y \cos x$$

$$x+y = \alpha$$

$$x-y = \beta$$

$$2x = \alpha + \beta$$

$$y = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7

$$70 + 2^{64} \cdot 7 - 7 - 128 - 3 \cdot 2^{65} =$$

$$= -65 + 2^{64}(7) = 2^{64} - 65$$

$$4x = \pi - 7x + \frac{\pi}{4}$$

$$11x = \frac{5\pi}{4}$$

$$a \geq b > c$$

10

5

$$\frac{25\pi}{12}$$

$$x = \frac{5\pi}{44}$$

10 9 8 7 6

$$\sin \frac{5\pi}{11}$$

$$70 + 2^{64} \cdot 8 - 8 - 256 - 3 \cdot 2^{65} =$$

$$-194 + 2^{64}(8-6) = -194 + 2^{65}$$

$$\frac{35\pi}{44} - \frac{11\pi}{44} = \frac{24\pi}{44} = \frac{6\pi}{11}$$

$$2^{64} + 2^{65}$$

$$70 - x + 2^x$$

$$7x - \frac{\pi}{4} = \pi - 4x$$

~~70~~

$$2^{57+x}$$

$$-x - 2^x + 70$$

$$11x = \frac{5\pi}{4}$$

$$2^{57} \cdot 2^x - 2^x = 2^x (2^{57} - 1) = \frac{172}{12} =$$

$$2^x (2^{57} - 1) + 70 - x$$

$$x \in [7; 69] = \frac{43}{3}$$

$$2^x \cdot 6$$

$$\frac{93\pi}{44}$$

$$\left(\frac{93\pi}{11} \right)$$

$$\frac{7 \cdot 93}{44} - \frac{11}{44} = \frac{13\pi}{3}$$

$$2^7 \cdot 6 + 2^8 \cdot 6$$

$$6(2^7 + 2^8 + 2^9 + \dots + 2^{69}) + (63 + 62 + \dots + 1)$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{2}{93} \cdot \frac{7}{651}$$

$$= \frac{640}{44} = \frac{160}{11} \cdot \frac{93\pi}{11}$$

$$\frac{5\pi}{11}$$

$$\frac{50\pi}{4}$$

$$\frac{6\pi}{14}$$

$$(2^{69} + 32)63 - 2^{70} + 2^7$$

$$63 \cdot 2^{69} + 2016 - 2 \cdot 2^{69} + 2^7$$

$$61 \cdot 2^{69} +$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ \times 32 \\ \hline 126 \\ 189 \\ \hline 2016 \end{array}$$

$$\cos 11x - \cos 3x \stackrel{\sim 2}{=} \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x + \sin 3x - \sin 11x = \sqrt{2} \cos 11x \cdot \cos 3x - \sqrt{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sqrt{2} \cos 11x \cdot \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x - \frac{\sin 11x \cdot \sin 3x}{\sqrt{2} \sin 11x \cdot \sin 3x} = 0$$

$$\cos 11x (1 - \sqrt{2} \cos 3x) - \cos 3x - \sin 11x (1 + \sqrt{2} \sin 3x) + \sin 3x = 0$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x + (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - (2 \cdot \sin 4x \cdot \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \sin 7x \sin 4x + 2 \sin 4x \cos 7x = -\sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$2 \sin 7x \sin 4x - \sqrt{2} \sin^2 7x + 2 \sin 4x \cos 7x + \sqrt{2} \cos^2 7x = 0$$

$$2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) - \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) = 0$$

$$2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) - \sqrt{2} (\sin 7x - \cos 7x) (\sin 7x + \cos 7x) = 0$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (2 \sin 4x - \sqrt{2} \sin 7x + \sqrt{2} \cos 7x) = 0$$

$$\sin 7x + \cos 7x = 0$$

$$2 \sin 4x - \sqrt{2} (\sin 7x - \cos 7x) = 0$$

$$\tan 7x = -1$$

$$2 \sin 4x - \sqrt{2} \sin 7x + \sqrt{2} \cos 7x = 0$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi k;$$

$$2 \sin 4x - \sqrt{2} \sin 4x \cdot \cos 3x - \sqrt{2} \sin 3x \cos 4x + \sqrt{2} \cos 4x \cdot \cos 3x - \sqrt{2} \sin 4x \cdot \sin 3x = 0$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + 2\pi k.$$

$$\sin 4x (1 - \sqrt{2} \cos 3x)$$

$$\sqrt{2} \sin 7x - \sqrt{2} \cos 7x$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x \right) = 2 \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right)$$