

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$16875 = 1 \cdot 3^3 \cdot 5^4$, тогда можно записать
либо из $\{1; 3; 3; 3; 5; 5; 5; 5\}$, либо из
 $\{1; 1; 9; 3; 5; 5; 5; 5\}$, тогда найдем
кол-во первого типа и второго:

$$1) C_8^4 \cdot C_4^3 \cdot C_1^1 = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{1!}{1!0!} =$$

$$= \frac{8!}{4!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 280$$

(т.к. разделим 4 перчатки на 2 меш, 3 перчатки
на оставшиеся 4 и 1 сидит на последнем)

$$2) C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{2!}{2!0!} =$$

$$= \frac{8!}{4!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 840 \text{ (аналогично)}$$

$$\text{Всего: } 840 + 280 = 1120$$

Ответ: 1120

N2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 5x = \sin 7x + \sin 3x,$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\cos 5x - \sin 5x = 0 \quad (1)$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x \quad (2)$$

$$(1) \operatorname{tg} 5x = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x,$$

$$\cos 2x = \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\cos 2x - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$-2 \sin \left(\frac{2x + 5x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \sin \left(\frac{2x - 5x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\left[\sin \left(\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0 \quad (1) \right.$$

$$\left. \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \right) = 0 \quad (2) \right]$$

$$(1) \frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi l, l \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

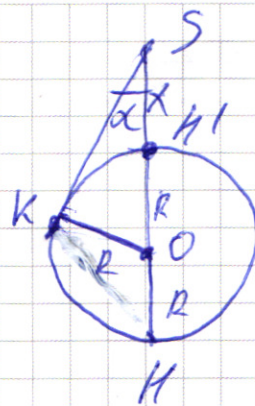
№2 *

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi l}{3}, l \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi l}{3}, l \in \mathbb{Z}.$$



$$V_{A'B'C'} = V'; \text{ merged:}$$

$$\frac{V}{V'} = \frac{\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH}{\frac{1}{3} S_{A'B'C'} \cdot SH'} = \frac{9(x+2R)}{4(x+R)}$$

No 6 more breit $\frac{V}{V'} = K^3 = \left(\frac{5H}{5H}\right)^3 =$

$$= \left(\frac{K+2R}{K+R} \right)^3 \Rightarrow \frac{9}{4} \left(\frac{K+2R}{K+R} \right) = \left(\frac{K+2R}{K+R} \right)^3$$

$$\frac{3}{2} > \frac{x+2R}{x+R} \quad |$$

$$X = R, \text{ maka } \sin \alpha = \sin KSO = \frac{R}{X+R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle KSO = 30^\circ$$

Omben: 30°

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x^4}{y^2}\right)'}'g y = (-x)'g(-xy) \quad (1)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad (2)$$

$$(2) \quad 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0,$$

$$(2y+x)(y-x) = 4(x+2y),$$

$$(2y+x)(4x-y) = 0$$

$$\begin{cases} x = -2y & (1) \\ x = y - 4 & (2) \end{cases}$$

$$x = y - 4 \quad (2)$$

$$(1) \left(\frac{(-2y)^4}{y^2}\right)'g y = (2y)'g 2y^2,$$

$$(16y^2)'g y = (2y)'g 2y^2, \quad \text{прологорифмируем по основанию 10.}$$

$$1g y \cdot 1g 16y^2 = 1g 2y^2 \cdot 1g 2y,$$

$$1g y (1g 16 + 1g y^2) = (1g 2 + 1g y^2) (1g 2 + 1g y),$$

$$1g y (41g 2 + 21g y) = (1g 2 + 21g y) (1g 2 + 1g y),$$

$$41g 2 + 1g y + 21g^2 y = 1g^2 2 + 21g 21g y + 1g 21g y + 21g^2 y,$$

$$1g 21g y = 1g^2 2,$$

$$1g y = 1g 2,$$

$$y = 2 \Rightarrow x = -4$$

~~№ 13*~~

(2) $y = x + 4 \Rightarrow$

$$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2} \right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(x(x+4))},$$

$$\left(\frac{x^2}{x+4} \right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x^2-4x)},$$

$$\lg(x+4) \lg \frac{x^2}{x+4} = \lg(-x^2-4x) \lg(-x),$$

$$\lg(x+4)(\lg x^2 - \lg(x+4)) = \lg(-x)(\lg(-x) + \lg(x+4)),$$

$$2\lg(x+4)\lg x - \lg^2(x+4) = \lg^2(-x) + \lg(-x)\lg(x+4),$$

П.к. $x < 0$, то:

$$2\lg(x+4)\lg(-x) - \lg^2(x+4) = \lg^2(-x) + \lg(-x)\lg(x+4),$$

$$\lg^2(x+4) - \lg(x+4)\lg(-x) + \lg^2(-x) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{— квадратное} \\ \text{уравнение} \Rightarrow \\ \text{нет корней.} \end{array}$$

~~Ответ: $x = -4$
 $y = 2$~~

Ответ: $\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$

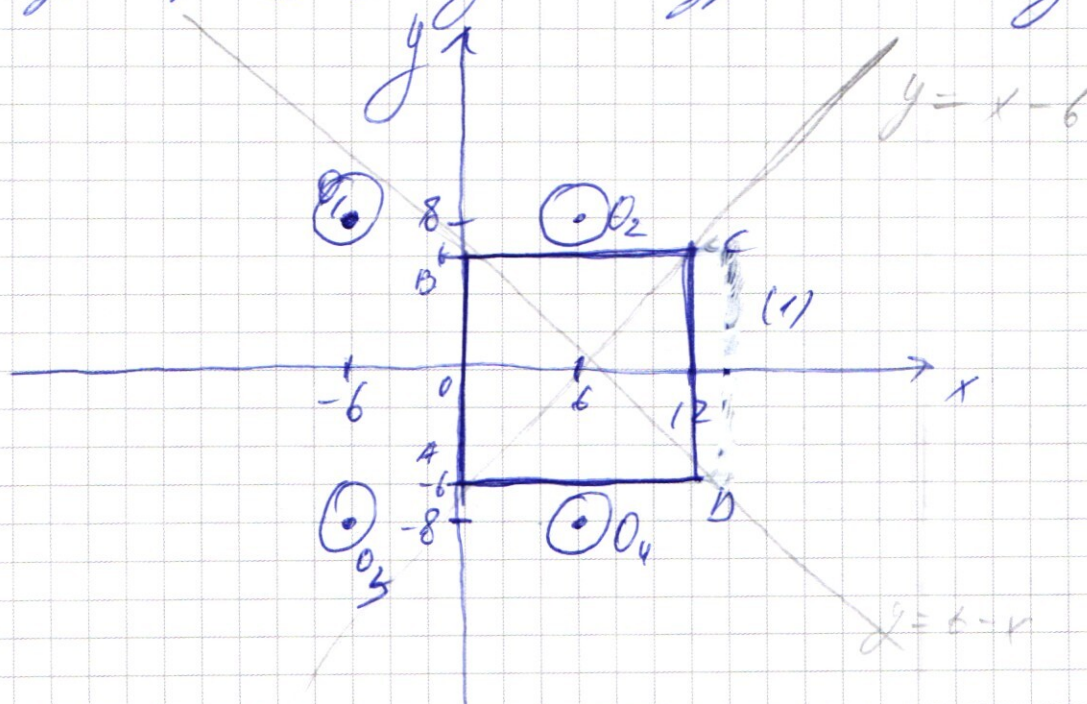
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = 9 \quad (2)$$

Нужно решить систему уравнений для $a \geq 0$



Ур 1 - это квадрат с вершинами $(0; 6)$ $(0; -6)$ $(12; 6)$ $(12; -6)$

Ур 2 - это окр с радиусом $\sqrt{a}$ и

центрами $(8; 6)$ $(8; -6)$ $(-8; 6)$ $(-8; -6)$

тогда для решения возьмем только
касания $\vec{O_1O_2}$ и $\vec{O_3O_4}$ касаются,
либо $\vec{O_1O_2}$ и $\vec{O_3O_4}$ касаются.

Рассчитываем эти случаи.

1) Окр 1 и Окр 3 касаются ABCD в точке,
т.е. в точках C и D $\Rightarrow R = O_1 P \Leftrightarrow$

$$\sqrt{a} = \sqrt{(12 - (-6))^2 + (-6 - 8)^2},$$

$$a = 18^2 + 14^2 = 4(9^2 + 7^2) = 4(81 + 49) = \\ = 130 \cdot 4 = 520$$

2) Окр 2 и Окр 4 касаются:

т.е. $R = P(O_3; BC) \Leftrightarrow$

$$\sqrt{a} = 8 - 6,$$

$$a = 2^2$$

$$a = 4.$$

Ответ: $a = 520$; $a = 4$.

* других случаев нет, т.к. каждая из окружностей будет пересекать квадрат, что даст более двух решений.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 85 + (3^{81} - 1)x \Rightarrow$$

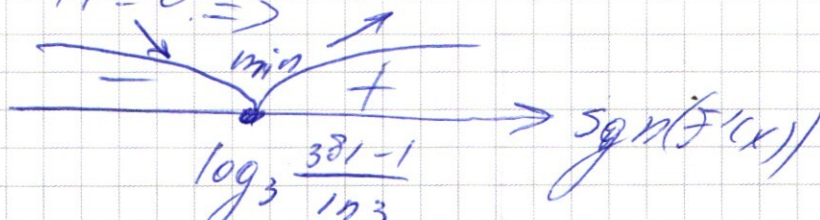
$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x + (4 - x) \cdot 3^{81} + (x - 85) < 0$$

Пусть $F(x) = 3^x + (4 - x) \cdot 3^{81} + (x - 85)$, тогда

$$F'(x) = 3^x \ln 3 - 3^{81} + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \log_3 \frac{3^{81} - 1}{\ln 3}$$



Заметим, что $F(4) = F(85) = 0$, тогда
при $a \neq 85$ и $a \neq 4$: $F(a) \neq 0$, в силу
монотонного убывания и возрастания.

Тогда если $F(x) < 0$, то $x \in (4; 85)$, при $x = 2$:
 $x \in [5; 84]$.

тогда для данного x , $P(x)$ — кол-во решений
для y : $P(x) = (85 - x) + 3^{81}(x - 4) - 3^x$.

$$\begin{aligned} \text{Всего решений соответствующим } P(5) + P(6) + \dots + P(84) = \\ = (85 - 5) + 3^{81}(5 - 4) - 3^5 + \dots + (85 - 84) + 3^{81}(84 - 4) - 3^{84} = \\ = 80 + 3^{81} \cdot 1 - 3^5 + \dots + 1 + 3^{81} \cdot 80 - 3^{84} = \end{aligned}$$

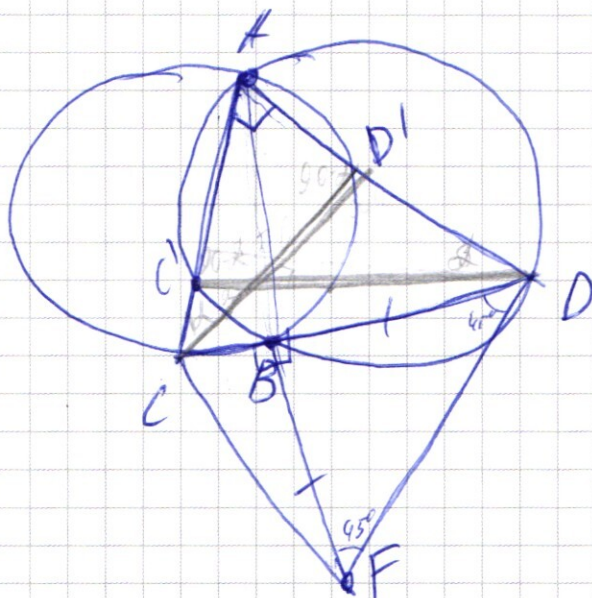
1/2*

$$\begin{aligned} &= (1 + \dots + 80) + 3^{81}(1 + \dots + 80) - (3^5 + 3^6 + \dots + 3^{84}) = \\ &= \frac{80+1}{2} \cdot 80 + (1 + 3^{81}) - 3^5(1 + 3 + \dots + 3^{79}) = \\ &= 40 \cdot 81(1 + 3^{81}) - 3^5 \cdot \frac{1 \cdot (3^{80} - 1)}{3 - 1} = \\ &= 40 \cdot 3^4(1 + 3^{81}) - \frac{3^5(3^{80} - 1)}{2} = \\ &= \frac{3^4}{2} (80 + 80 \cdot 3^{81} - 3^{81} + 3) = \\ &= \frac{3^4}{2} (83 + 79 \cdot 3^{81}) = \frac{83 \cdot 3^4}{2} + \frac{79 \cdot 3^{85}}{2} = \\ &= \frac{81 \cdot 83}{2} + \frac{79 \cdot 3^{85}}{2} = \frac{1}{2} (6723 + 3^{85} \cdot 79) \\ \text{Ответ: } &\frac{6723}{2} + \frac{79 \cdot 3^{85}}{2} \text{ или} \\ &\frac{1}{2} (6723 + 79 \cdot 3^{85}). \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

a1



т.к. $\angle CAD = \frac{\pi}{2} \Rightarrow CD' = C'D = 2R = 2b \Rightarrow$

$\triangle CAD$ - равнобедренный, тогда $\angle C = \angle D = \frac{\pi}{4}$.

$\triangle BDF$ - р/бе и равно/ый $\Rightarrow \angle D = \angle F = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\angle ADF = \frac{\pi}{2}$, тогда $AC \parallel DF$, но

тогда $AD \parallel CF \Rightarrow ACFD$ - ~~прямо~~ ^{квадрат} $\Rightarrow$

$CF = FD = AD = AC \Rightarrow AC$ и AD - диаметры
описанной (т.к. $\angle CBA = \angle DBA = \frac{\pi}{2}$) $\Rightarrow$

$CF = 13$;

б) $S_{ACF} = \frac{S_{ACFD}}{2} = \frac{CD \cdot AF}{2 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 2\sqrt{3 \cdot 4}}{4} =$
 $= 10\sqrt{23 \cdot 3} = 10\sqrt{69}$ (т.к. половина квадрата)

Problem: $CF = 13$
 $SA CF = 10 \sqrt{109}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ \underline{15} \\ 18 \\ \underline{15} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3345 \overline{) 9} \\ \underline{27} \\ 64 \\ \underline{63} \\ 45 \\ \underline{45} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 345 \overline{) 5} \\ \underline{35} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$$8.4 \cdot 5 = 40.4 = 280$$

$$\begin{array}{r} 75 \overline{) 5} \\ \underline{75} \\ 0 \end{array}$$

$$16875 = 1.3^3 \cdot 5^4$$

$$\begin{array}{r} 0 \times 125 \\ \underline{24} \\ 875 \\ \underline{250} \\ 3375 \\ \underline{5} \\ 16845 \end{array}$$

$$15555333$$

$$2155559311$$

.....

$$1) C_8^4, C_4^3, C_1^1$$

$$2) C_8^4, C_4^1, C_3^1, C_2^2$$

$$\begin{array}{r} 280 \\ \times 3 \\ \hline 840 \\ + 280 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 280 \\ \times 4 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos\left(\frac{7x+3x}{2}\right) \cos\left(\frac{7x-3x}{2}\right) - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin \frac{7x+3x}{2} \cos\left(\frac{7x-3x}{2}\right)$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 2x (\sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{2} \sin 5x) = \cos 10x$$

$$\cos 2x \cos\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = \cos 10x$$

$$\cos 2x \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \cos 10x$$

$$\cos\left(2x + 5x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - 5x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos 10x$$

$$\cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos 10x$$

$$\cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 10x = \cos 10x + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

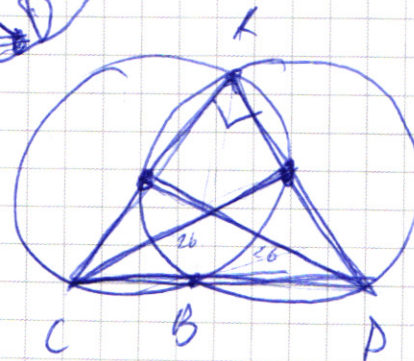
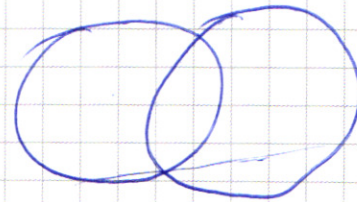
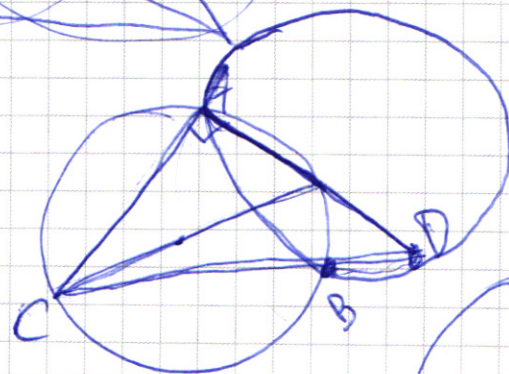
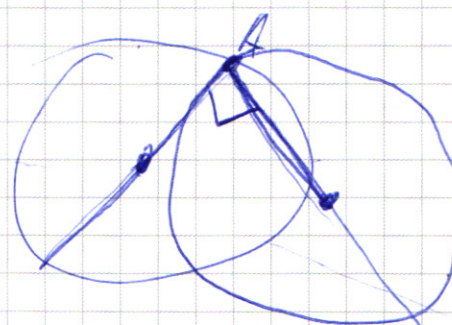
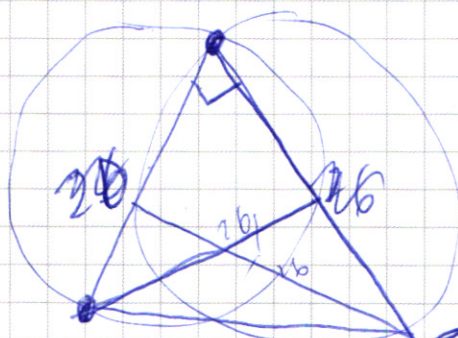
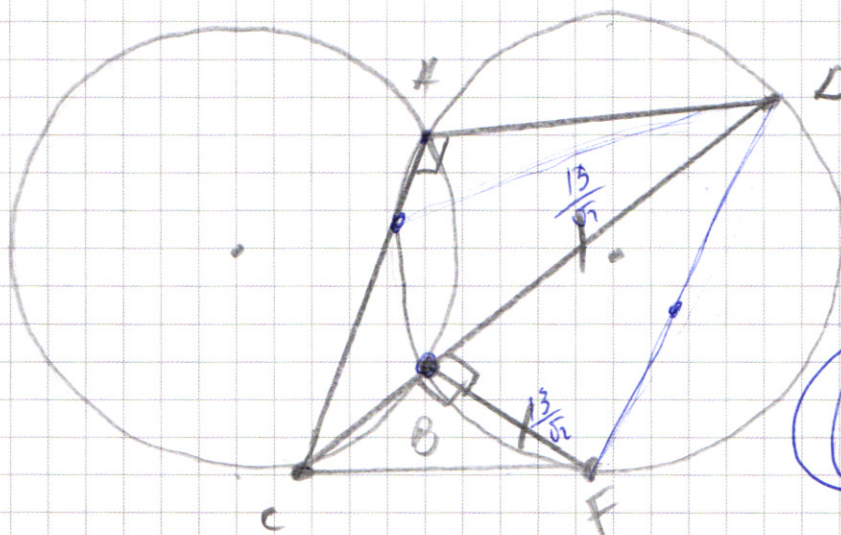
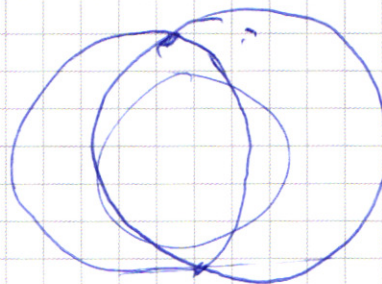
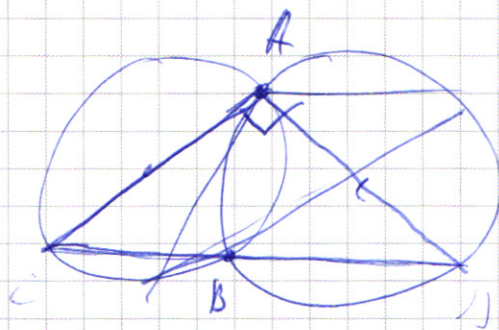
$$-2 \sin\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4} - 10x}{2}\right) \sin\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4} + 10x}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{10x + 3x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

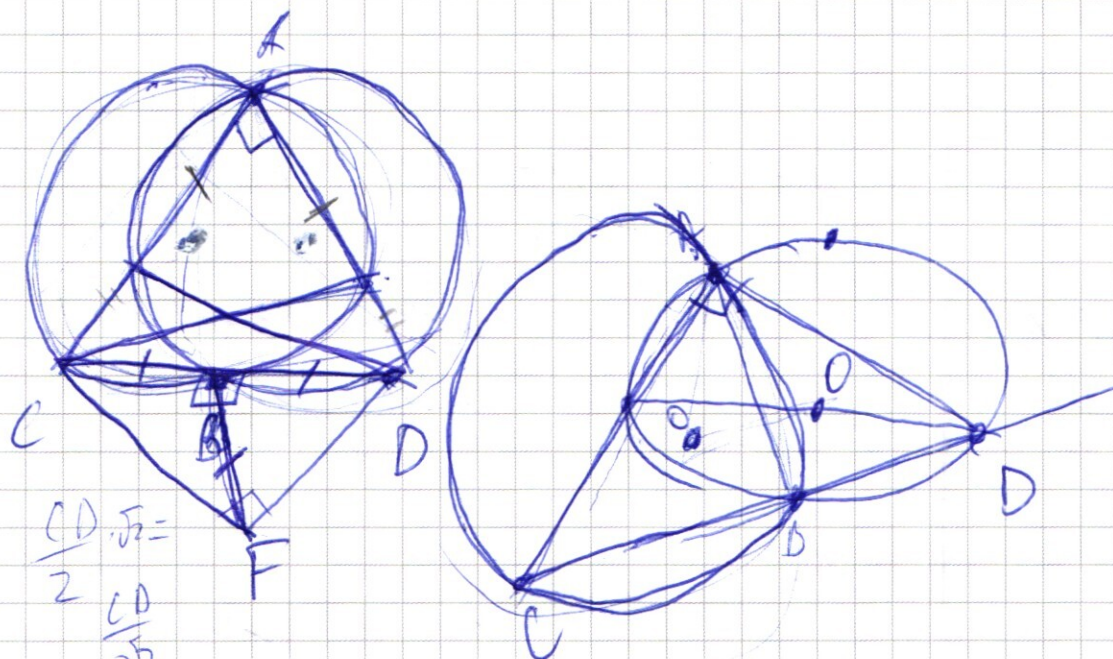
$$\begin{aligned} & \begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases} \quad (3^x + 4 \cdot 3^{81} - 85 - 3^{81}x + x)' = \\ & \quad = 3^x \ln 3 - 3^{81} + 1 = 0 \\ & 3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x \quad 3^x = \frac{3^{81} - 1}{\ln 3} \\ & 3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq 85 + 3^{81}x - x \\ & 3^x - x \leq 85 + 3^{81}(x - 4) \quad \log_3 3^x + \log_3 \ln 3 - \log_3 81 \\ & \quad (\ln 3^x)' = (x \ln 3)' = \ln 3 \\ & \text{Graph showing the intersection of } y = 3^x + 4 \cdot 3^{81} \text{ and } y = 85 + (3^{81} - 1)x \text{ at } x = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + 3^{81}x - x \\ & 3^x + x - 85 = 3^{81}(x - 4) \quad x = 4 \\ & (3^x + (4 - x) \cdot 3^{81} - 85)' = (3^x - 3^{81}x)' = \\ & \quad = 3^x \ln 3 - 3^{81} = 0 \\ & 3^x \ln 3 = 3^{81} \end{aligned}$$

№6



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{CD \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{CD}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)'_{xy}$$

$$4(x+2y) = 2y^2 - xy - x^2$$

$$4(x+2y) = (2y+x)(y-x)$$

$$(2y+x)(4+x-y) = 0$$

$$1) 2y+x = 0$$

$$x = -2y$$

$$(2y+x)(y-x) = 2(x-y)$$

$$= 2y^2 + xy - 2xy - x^2 =$$

$$2y^2 - xy - x^2$$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)'_{xy} = (2y)'_{xy} 2y^2$$

$$(16y^2)'_{xy} = (2y)'_{xy} 2y^2$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg(y^2)}$$

$$\lg y \ln 16y^2 = \lg 2y^2 \ln 2y$$

$$2 \lg y \ln 4y = \lg 2y^2 \ln 2y$$

$$2 \lg y (\lg 4 + \ln y) = (\lg 2 + \lg y + \ln y) (\lg 2 + \lg y)$$

$$2a (2 \lg 2 + a) = (\lg 2 + 2a) (\lg 2 + a)$$

$$4a \lg 2 + 2a^2 = \lg^2 2 + 2a \lg 2 + a \ln 2 + 2a^2$$

$$4a \lg 2 = \lg^2 2 + 3a \lg 2$$

$$a \lg 2 = \lg^2 2$$

$$a = \lg 2$$

$$\ln y = \lg 2 \quad y = 2$$

$$x = -4$$

$$2 \left(\frac{x^4}{62} \right)^{\lg x} = (-x)^{\lg(-x^2)}$$

$$2 \lg$$

$$x^2 \lg x$$

$$= (-x)^{\lg(-x^2)}$$

$$2 \lg x \lg x = \lg(-x^2) \lg(-x)$$

$$2 \lg^2 x = \lg^2(-x^2)$$

$$a(a-b) + b^2 = a$$

$$a^2 - ab + b^2 = 0$$

$$a^2 - 2a \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} = 0$$

$$ab - a^2 = b^2$$

$$2ab - a^2 = b^2 + ab$$

$$2ab - a^2 = b^2 + ab$$

$$b = b^2 - 4b^2 = -3b$$

$$x + 4 = -x$$

$$2x = -4$$

$$x = -2$$

$$\lg^2 x^2 = \lg^2(-x^2)$$

$$x = 0 \quad y = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)' \ln y = (-x)' \ln(-xy)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2(y^2 - 4y) - xy - (x^2 - 4x) = 0$$

$$\cancel{(52y)^2 - 252xy + x^2 + 252xy - xy - x^2 - 4x - 8y = 0}$$

$$\cancel{(52y - x)^2 - 2x^2 + 252xy - 4x - 8y = 0}$$

$$\cancel{2(y^2 - 4y + 4) - 8 - (x^2 - 4x + 4) + 4 - xy = 0}$$

$$2(y-2)^2 - (x-2)^2 = 4 + xy$$

$$\frac{x^4 \ln y}{y^2 \ln y} = \frac{x \ln y^4}{y^2 \ln y} = \frac{y^4 \ln x}{y^2 \ln y} = (-x)' \ln(-xy) = -xy \ln x =$$

$$= y^{4 \ln x - 2 \ln y} = y \ln \frac{x^4}{y^2} = -x \ln(-xy)$$

$$\begin{matrix} x < 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

$$\ln \frac{x^4}{y^2} \ln y = \ln(-xy) \ln(-x)$$

$$\ln \frac{x^2}{y} \ln y = \ln \sqrt{x^2 y} \ln(x)$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$$

$$\frac{\pi}{4} - 3x = 2\pi k \quad x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 3x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 3x \cos 2x - \sqrt{2} (2 \cos^2 x - 1)$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 5x + \sqrt{2} \sin^2 5x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x) = \sqrt{2} \sin 5x (\sqrt{2} \cos 2x - \sin 5x)$$

$$\sqrt{2} \left(\sqrt{2} \frac{\cos 2x}{\cos 5x} - 1 \right) = \sqrt{2} \tan 5x \left(\sqrt{2} \frac{\cos 2x}{\cos 5x} - \tan 5x \right)$$

$$\cancel{2 \cos 5x \cos 2x}$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$1) \cos 5x = \sin 5x$$

$$2) \sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x$$

$$\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x$$

$$\cos 2x = \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \quad \sin 7x - \frac{\pi}{4}$$

$$\cos 2x = \sin$$

$$\cos 2x - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\cancel{2} \sin \left(2x + 5x - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(x - 5x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

(5; 84)

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + 3^{81}x - x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} + x - 85 - 3^{81}x < 0$$

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f'(x) = (3^x)' + (x)' - (3^{81}x)' =$$

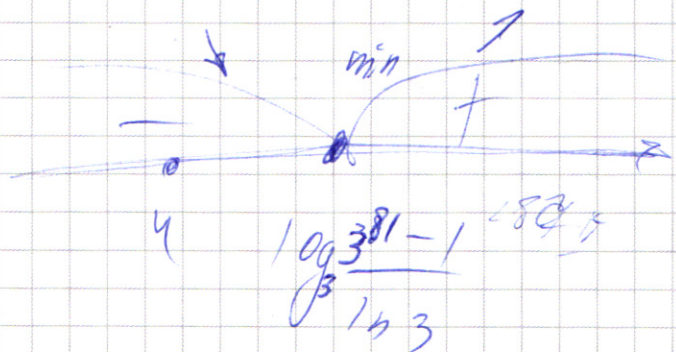
$$= 3^x (\ln 3)^1 + 1 - 3^{81} =$$

$$= 3^x \ln 3 + 1 - 3^{81} = 0$$

$$3^x = \frac{3^{81} - 1}{\ln 3}$$

~~$x \ln 3 =$~~

$$x = \log_3 \frac{3^{81} - 1}{\ln 3}$$



$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 85 \end{cases}$$

$$3^x + (4 - x) \cdot 3^{81} + x - 85 < 0$$

$$3^{81} \cdot 3^4 - 3^{81} \cdot 85$$

$$85$$

$$3^{85} - 3^{81} - 3^4 = 0$$

$$3^{85} - 3^{81} - 81 =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 85 + (3^{81} - 1)x \quad x = [4, 85]$$

$$5) 3^5 + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 85 + (3^{81} - 1)5$$

$$3^5 + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 5 \cdot 3^{81} + 80$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

x

————— a ————— b

Реш для $x=a$: $85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} =$

$$= 85 + 3^{81}(x - 4) - 3^x - x =$$

$$= (85 - x) + 3^{81}(x - 4) - 3^x = P(x)$$

$$P(4) + P(5) + P(6) + P(7) + \dots + P(85) =$$

$$= (85 - 4) + 3^{81}(4 - 4) - 3^4 + (85 - 5) + 3^{81}(5 - 4) - 3^5 + \dots + (85 - 85) + 3^{81}(85 - 4) - 3^{85} =$$

$$= (0 + 1 + \dots + 81) + 3^{81}(0 + \dots + 81) - (3^4 + 3^5 + \dots + 3^{85}) = \frac{12}{9} \cdot 192$$

$$= \frac{81 + 0}{2} \cdot 82(3^{81} + 1) - \frac{3^4(3^{85} - 1)}{3 - 1} + 3 + 3^2 + 3^3 =$$

$$= 41 \cdot 81 (3^{81} + 1) + 82 - \frac{3}{2} (3^{85} - 1) =$$

$$= 41 \cdot 81 (3^{81} + 1) - \frac{3}{2} (3^{85} - 1 - \frac{3^9 \cdot 2}{3}) =$$

$$= 41 \cdot 81 (3^{81} + 1) - \frac{3}{2} (3^{85} - 27) =$$

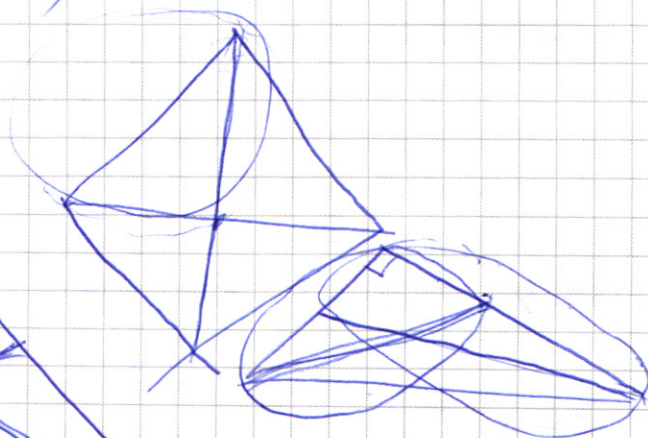
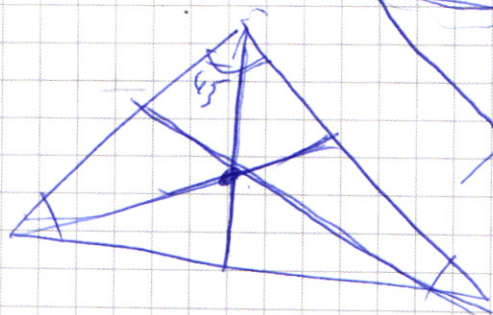
$$= 41 \cdot 81 (3^{81} + 1) - \frac{3 \cdot 3^9}{2} (3^{82} - 1) =$$

$$= 3^4 \left(3^{81} \cdot 41 + 41 - \frac{3^{82} - 1}{2} \right) =$$

$$= \frac{3^4}{2} (3^{81} \cdot 82 + 82 - 3^{82} + 1) =$$

$$= \frac{3^4}{2} \left(3^{82} \left(\frac{82}{3} - 1 \right) + 83 \right) =$$

$$= \frac{3^4}{2} \left(3^{82} \cdot \frac{49}{3} + 83 \right)$$



3 5 3 5
5

5 5 5 5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x = \cos 10x$$

$$\cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 10x$$

$$2 \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4} + 3x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4} - 3x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = \cos 10x$$

$$2 \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \cos 2x = \cos 10x$$

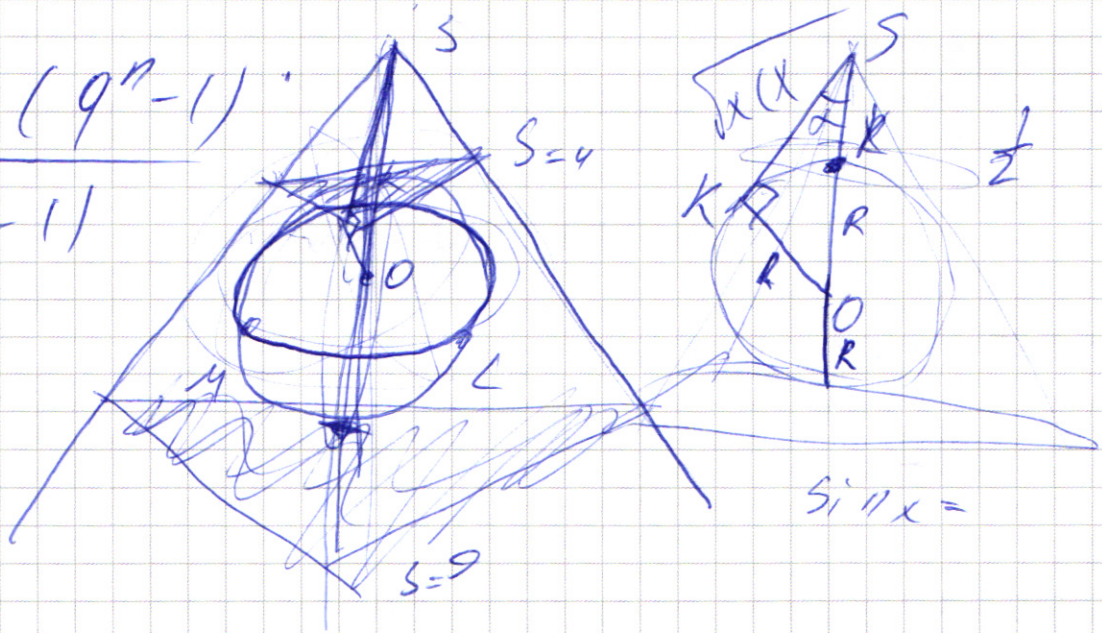
$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 10x$$

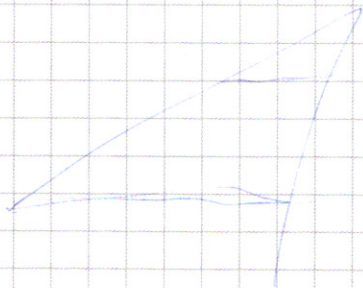
$$\cos 2x \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 10x$$

cos

$$S_n = \frac{q_1(q^n - 1)}{(q - 1)}$$



$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} S_0' h'}{\frac{1}{3} S_0^2 h^2} = \frac{4(x+R)}{9(x+2R)} = \frac{(x+R)^3}{(x+2R)^3}$$



$$\frac{4}{9} = \frac{(x+R)^2}{(x+2R)}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{x+R}{x+2R}$$

$$2x + 4R = 3x + 3R$$

$$R = x$$

$$\begin{array}{r} 183 \\ 181 \\ \hline 6683 \\ 6723 \end{array}$$