МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $3375 = 3^3 \cdot 5^3$, значит данные 8-значные числа могут состоять только из цифр 1, 3, 5, 9. Рассмотрим возможные наборы цифр:

$3375 = 1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot5$

$3375 = 1\cdot1\cdot1\cdot3\cdot5\cdot5\cdot5\cdot9$

Применяя формулу перестановок с повторениями, получаем:

$$S = \frac{8!}{2!\cdot3!\cdot3!} + \frac{8!}{3!\cdot3!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{2\cdot3\cdot2\cdot3\cdot2} + \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{2\cdot3\cdot2\cdot3} = 560 + 1120 = 1680$$

Ответ: 1680 вариантов.

3) $\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$

$x^2 - (2y+4)x - 3y^2 + 12y = 0 \quad D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16(y-1)^2$

$x = \frac{2y+4 \pm 4(y-1)}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3y \\ x = 4-y \end{array}\right.$

I) $x = 3y \Rightarrow \left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2} \Leftrightarrow \cancel{y^{4\lg y}} \cdot y^{4\lg 3} = 3^{\lg y} \cdot 3^{\lg 3} \cdot y^{2\lg 3} \cdot \cancel{y^{4\lg y}} \Leftrightarrow$

$y^{2\lg 3} = 3^{\lg 3y} \Leftrightarrow \quad 2\lg 3 \cdot \log_3 y = \lg 3y \Leftrightarrow 2\lg y = \lg y + \lg 3 \Leftrightarrow \lg y = \lg 3 \Leftrightarrow$

$y = 3 \Leftrightarrow x = 9$ Проверка: $27^{\lg 9} = 3^{2\lg 27} \Leftrightarrow 3^{6\lg 3} = 3^{6\lg 3}$ верно.

II) $x = 4-y \Rightarrow \left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg(4y-y^2)} \Leftrightarrow y^{5\lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2\lg(4-y)} \cdot y^{2\lg y} \Leftrightarrow$

$y^{3\lg(4-y) - 2\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)} \Leftrightarrow (3\lg(4-y) - 2\lg y) \cdot \log_{(4-y)} y = \lg(4-y) \Leftrightarrow$

$3\lg y - 2\lg y \cdot \log_{(4-y)} y = \lg(4-y) = \lg y \cdot \log_y(4-y) \Leftrightarrow$

$\lg y\left(\log_y(4-y) + 2\log_{(4-y)} y - 3\right) = 0$

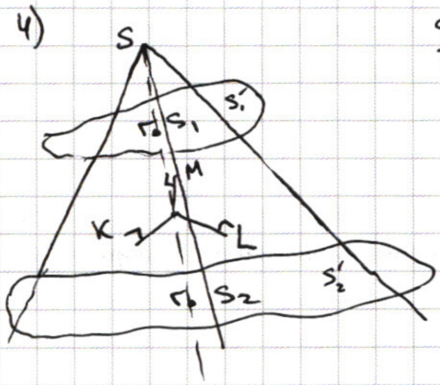
$\lg y = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x = 3$ Проверка: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3} = 1$ неверно.

пусть $\log_y(4-y) = t$, тогда $t + \frac{2}{t} - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = (t-2)(t-1) = 0 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \log_y(4-y) = 1 \\ \log_y(4-y) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4-y \\ y^2 = 4-y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 2 \\ y = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{2};\ x = \frac{9 \mp \sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$

Ответ: $(9;3);(2;2);\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2};\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right);\left(\frac{9+\sqrt{17}}{2};\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)$

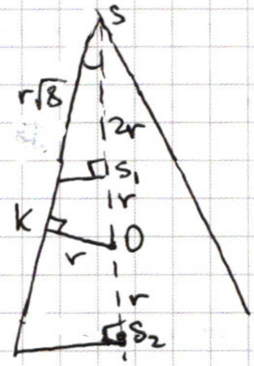
4)



$\frac{S_1'}{S_2'}=\frac{SS_1^2}{SS_2^2}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{SS_1}{SS_2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow SS_2=2SS_1$

$SS_2-SS_1=SS_1=2r \Leftrightarrow SS_1=S_1S_2=2r$

Перейд. в проекцию, в кот. одна из граней угла - прямая. →

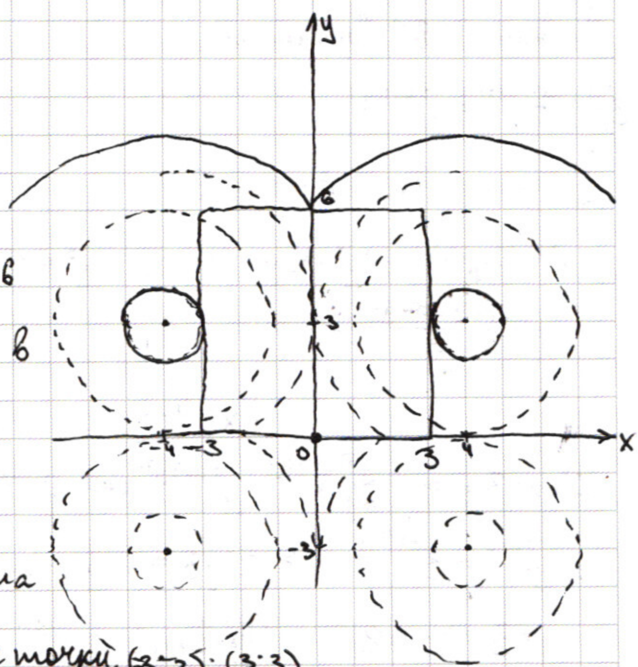


$\angle KSO=\arcsin\frac{1}{3}$

$\frac{S}{S_2'}=\left(\frac{r\sqrt{8}}{4r}\right)^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow S=S_2'=\frac{1}{2}S_2'=2$

Ответ: $\angle KSO=\arcsin\frac{1}{3}$; $S=2$

5) $\begin{cases}|y-3-x|+|y-3+x|=6\\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a\end{cases}$



построим графики данн. функций:

F_1 – квадрат с центром в т. $(0;3)$ с стороной 6

F_2 – система окружностей с центрами в точках $(4;3);(4;-3);(-4;3);(-4;-3)$ и радиусами $\sqrt{a}$.

Окружности в первый раз касают. квадрата при $a=1$, и имеют с ним ровно 2 общие точки. $(-3;3);(3;3)$

При увеличении a окружн. пересек. квадрат и появл. 4 общие точки.

При $a=25$ окужн. в последн. раз касаются квадрата в 2 точках $(0;0);(0;6)$.

При дальн. увеличен. a кол-во общ. точек равно 0.

Ответ: 1; 25.

7) при $x=6$ $y\in\varnothing$

$x=7$ y существует

...

$x=69$ y существует

$x=70$ $y\in\varnothing$

$\Rightarrow x\in[7;69]$

Ответ: 63 пары

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) 8-значный; произвед. $3375 = 3^3 \cdot 5^3$ → 1, 3, 5, 9

±

$3375 =$ 11333555 $= \frac{8!}{2!\cdot 3!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2} = 560$

$3375 =$ 11135559 $= \frac{8!}{3!\cdot 1!\cdot 3!\cdot 1!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 3\cdot 2} = 1120$

1680 вариантов

3) $\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$

∓

$x^2 - (2y+4)x - 3y^2 + 12y = 0 \quad D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = 16(y-1)^2 \geq 0$

$x \neq 0$, $y \neq 0$

$x = \frac{2y+4 \pm 4(y-1)}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2y+4+4y-4}{2} = 3y \\ x = \frac{2y+4-4y+4}{2} = 4-y \end{array}\right.$

I) $x = 3y$ $\quad \left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2} \Leftrightarrow \left(\frac{y^4}{3}\right)^{(\lg y + \lg 3)} = y^{(2\lg 3 + 4\lg y)}$

$y^{4\lg y + 4\lg 3} = y^{4\lg y + 2\lg 3} \cdot 3^{\lg y + \lg 3}$

$y^{2\lg 3} = 3^{\lg y + \lg 3}$

$2\lg 3 \cdot \log_3 y = \lg y + \lg 3$

$2\lg y = \lg y + \lg 3$ $\quad \boxed{y = 3}$ ± $\quad \boxed{x = 9}$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$

$27^{\lg 9} = 3^{2\lg 27}$

$3^{6\lg 3} = 3^{6\lg 3}$

II) $4 - y = x$ $\quad \left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg((4-y)y)}$

$y^{5\lg(4-y)} = y^{2\lg(4-y)} \cdot y^{2\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$

$y^{3\lg(4-y) - 2\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)}$

$2y+4-4y+4 = 8-2y$

$\lg(4-y) - 2\lg y = \lg(4-y) \cdot \log_y(4-y) \quad \Big| \cdot \log_{4-y} y$

$\frac{\lg(4-y)}{\lg y}$

$\lg y - 2\lg y \cdot \log_{4-y} y = \lg y \cdot \log_y(4-y)$

$\lg y\left(\log_y(4-y) + 2\log_{4-y} y - 1\right) = 0$

$t \qquad \frac{1}{t}$

$\left[\lg y = 0 \quad \boxed{y = 1 \quad x = 3}\right.$ ⊖

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3} = 1$ ~ –

$t^2 - t + 2 = 0$ $\quad D = 1 - 8$

$\frac{69}{7}$, 62

$t + \frac{2}{t} - 3 = 0$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$4 - \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} = \frac{8 + 1 - \sqrt{17}}{2}$

$y^2 + y - 4 = 0$

$D = 1 + 16$

$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

5) $\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$ ±

I $y-3-x \geq 0$ $x \leq y-3$
$y-3+x \geq 0$ $x \geq 3-y$

$y-3\cancel{-x}+y-3\cancel{+x}=6$

$y=6$ $-3 \leq x \leq 3$

$|y-(x+3)| + |y-(3-x)| = 6$

$y-3-x \geq 0$ $y \geq x+3$
$y-3+x \leq 0$ $y \leq -x+3$

II $\cancel{y}\cancel{-3}-x\cancel{-y}\cancel{+3}-x=6$ $x=-3$ $0 \leq y \leq 6$

$|y-3+x| = t$ $\begin{cases} y-3-x=t \\ -(y-3-x)=t \end{cases}$ $\begin{cases} y=x+3+t \\ y=x+3-t \end{cases}$

$|y-3-x| = k$

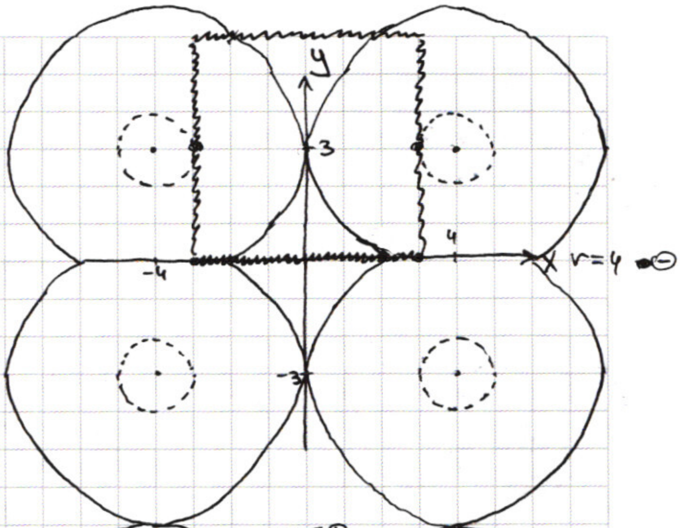
III $y-3-x \leq 0$ $y \leq x+3$
$y-3+x \geq 0$ $y \geq 3-x$

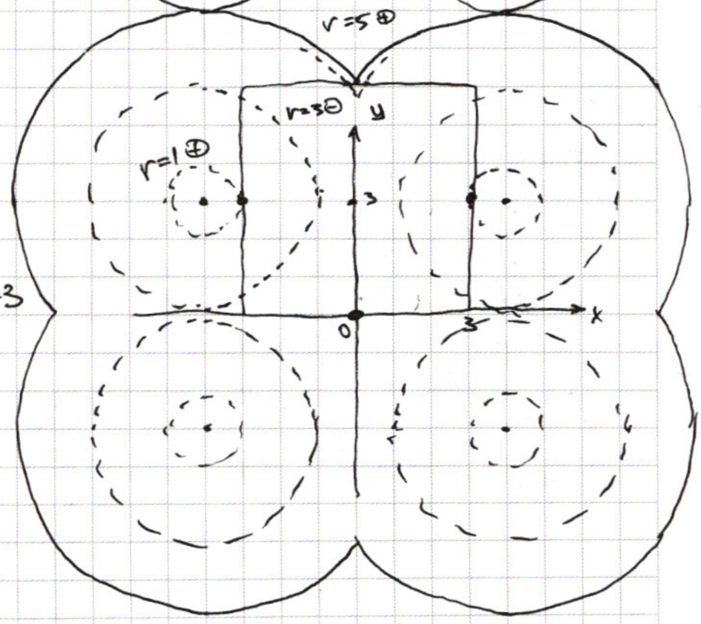
$\cancel{-y}\cancel{+3}+x\cancel{+y}\cancel{-3}+x=6$ $x=3$ $0 \leq y \leq 6$

IV $y-3-x \leq 0$ $x \geq y-3$
$y-3+x \leq 0$ $x \leq 3-y$

$-y+3\cancel{+x}-y+3\cancel{-x}=6$ $-2y=0$ $y=0$ $-3 \leq x \leq 3$

$r=1$ $a=r^2=1$
$r=5$ $a=25$





7) $(2^{64}-1) = (2^{32}+1)(2^{32}-1) = (2^{32}+1)(2^{16}+1)(2^{16}-1) = (2^{32}+1)(2^{16}+1)(2^{8}+1)(2^{4}+1)(2^{4}-1)$

$y > 2^x + 3\cdot 2^{65} = 2^x + 2^{66} + 2^{65} = 2^x + 2^{67} - 2^{65}$

$y \leq 70 + (2^{64}-1)x = (2^6+2^2+2) + (2^{64}-1)x$

$\log_2 y > x + \log_2 3\cdot 2^{65} = x + \log_2 3 + 65$

$\log_2 y \leq 1 + \log_2 35 + \log_2 x + \log_2 (2^{64}-1)$

$x + \log_2 3 + \cancel{65} < \cancel{1} + \log_2 35 + \log_2 x + \log_2 (2^{64}-1)$
64
$\log_2(2^{64})$

$x - \log_2 x < \log_2 \frac{35}{3} + \log_2 \frac{2^{64}-1}{2^{64}}$

$\log_2 2^x - \log_2 x$
$\log_2 \frac{2^x}{x} < \log_2 \frac{35}{3}\cdot\frac{2^{64}-1}{2^{64}}$

$x>0$ $\frac{2^x}{x} < \frac{35}{3}\cdot\frac{2^{64}-1}{2^{64}}$ $x > 2^x \cdot \frac{3}{35}\cdot\frac{2^{64}}{2^{64}-1}$

$x=1$
$x=2$ $x=5$
$x=3$ $x=6$
$x=4$

$y \leq 70 + 2^{64} - 1 = 69 + 2^{64}$

$y > 2 + 3\cdot 2^{65} = 2(1+3\cdot 2^{64})$

$69 + 2^{64}$
$- \quad 2 + 3\cdot 2^{65}$
$-3\cdot 2^{65} + 2^{64} + 67$

$2^{64}(1-6) = -5\cdot 2^{64}$

1) $2 + 3\cdot 2^{65} < y \leq 70 + 2^{64} - 1 = 69 + 2^{64}$
2) $4 + 3\cdot 2^{65} < y \leq 2^{65} + 68$
3) $8 + 3\cdot 2^{65} < y \leq 3\cdot 2^{64} + 67$
$3\cdot 2^{64}$ 59
$< \frac{256\cdot 3}{35}$

$2^{10} = 4^5 = 16\cdot 16\cdot 4$
$2^8 = 16\cdot 16$

$x=10$ $10<$
$1 > \frac{8}{35}\cdot \sim 1$
$2 > \frac{12}{35}\cdot \sim 1$ $x=8$ $8<$
$3 > \frac{24}{35}\cdot \sim 1$ $5 > \frac{96}{35}$ $x=7$ $7 < 10{,}9\cdot 1$
$4 > \frac{48}{35}$
6
$6 > \frac{2^6 \cdot 3}{35}\cdot\frac{2^{64}}{2^{64}-1}$

$64\cdot 3 = 192$, $192 : 35 = 5{,}49$
$128\cdot 3 = 384$, $384 : 35 = 10{,}9$
$16\cdot 16 = 256$, $256\cdot 4 = 1024$, $256 : 35 = 7$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) $2^x+3\cdot 2^{65}<y\le 70+(2^{64}-1)x$ $\qquad x>0$

$70+2^{64}\cdot x-x-2^x-3\cdot 2^{65}>0$

$2^{64}(x-3)+70-x-2^x>0$

$2^{64}(x-3)>2^x+x-70$

$2^x+3\cdot 2^{65}<70+2^{64}\cdot x-x \Leftrightarrow$

$2^{64}(6-x)<70-2^x-x$

$2^{64}(x-6)>2^x+x-70$

$x=6 \quad 2^{64}\cdot 0>64+6-70$

$0>0$ нев.

$x=7 \quad \ldots \oplus$

$x=64 \quad 2^{64}\cdot 58>2^{64}-6 \ \oplus$

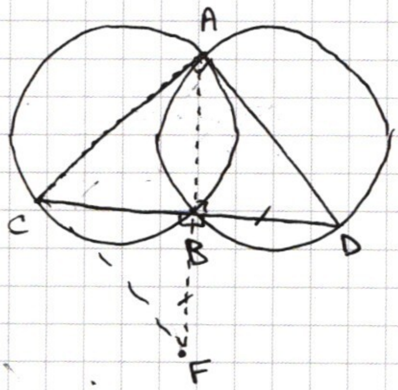
$x=66 \quad 2^{64}\cdot 60>4\cdot 2^{64}-4$

$x=69 \ \oplus$

$x=70 \quad 2^{64}\cdot 64>64\cdot 2^{64}+\varnothing$ неверно

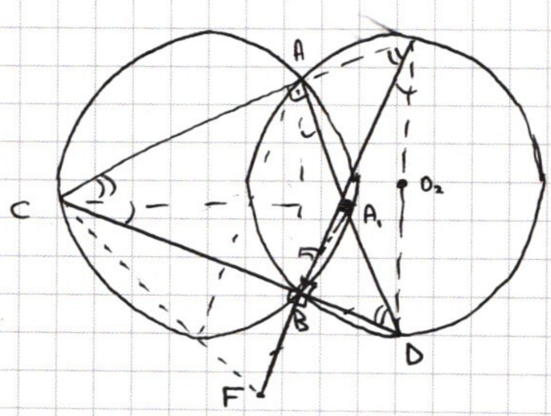
$x\in[7;69]$

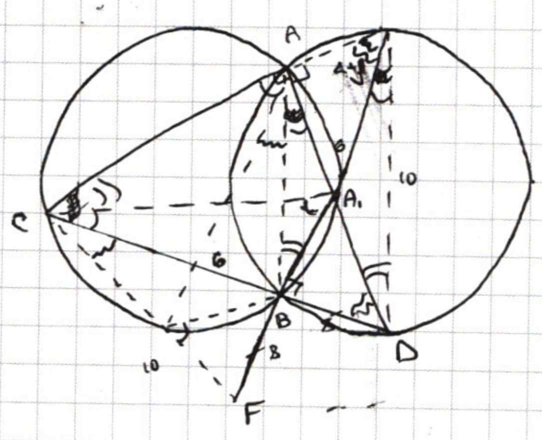
6) а) CF–? $r=5$



$DA_1\cdot DA=DB\cdot DC$

$\frac{DC}{DA}=\frac{DA_1}{DB}$

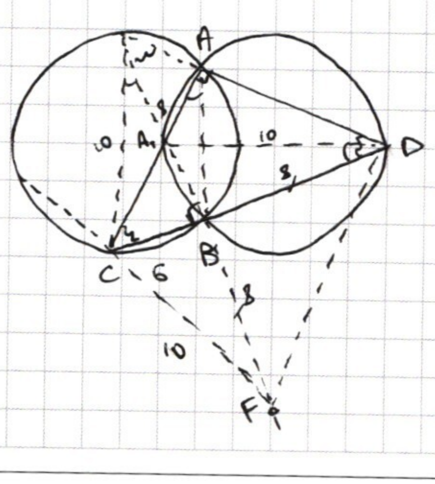




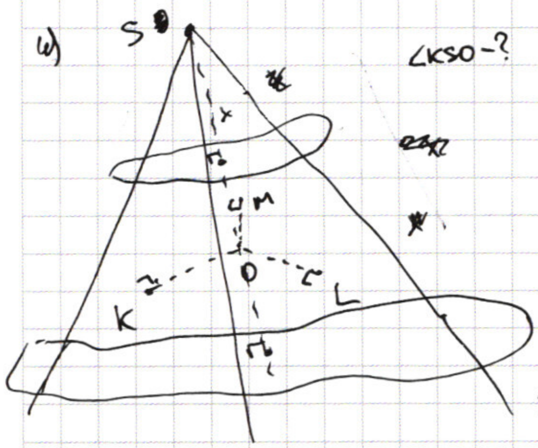
а) $CF=2r=10$

б) $S_{ACF}=$

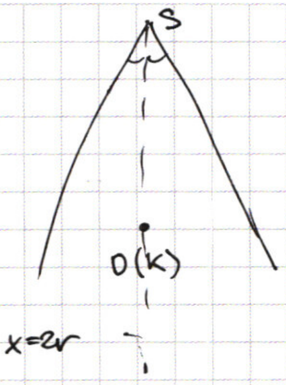
$BC=6$



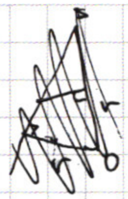
4)



$\angle KSO - ?$

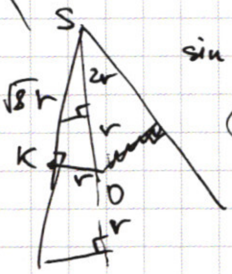


$x = 2r$



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{x_1^2}{x_2^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$$

$x_2 = 2x_1$



$\sin \angle KSO = \frac{1}{3}$

$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$

$$\frac{S}{S_2} = \frac{8r^2}{16r^2} = \frac{1}{2} \qquad S = \frac{1}{2} S_2 = 2$$

$\frac{1}{2} = \cos 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha$

2) $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

$\sqrt{2}(\cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x)$

$\cos\alpha - \cos\beta = \frac{1}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА