МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Заметим, что $3375 = 3^3 \cdot 5^3$. Цифр, делящихся на 5, всего одна — сама пятерка. Тогда в этом числе однозначно есть три пятерки. Цифр, имеющих в своем разложении только тройки, две — 3 и 9. Рассмотрим 2 случая: 1) 9 есть 2) 9 нет.

1) Расположить 5-ки мы можем C_8^3 способами $\left(\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}\right)$. Так как еще остается расставить цифры 3 и 9, то оставшиеся 3 позиции нужно занять 1-ми (т.к. искомые числа не просто кратны 3375, а равны ему). Расставляем три 1-цы C_5^3 $\left(\frac{5\cdot4\cdot3}{2\cdot3}\right)$ способами. Остается расставить 3 и 9 на 2 позиции, всего 2 способа. Итого имеем:

$$S_1 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot3\cdot2} = 1120 \text{ способов.}$$

2) Располагаем 5-ки также $\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}$ способами. Далее расставляем 3-ки C_5^3 $\left(\frac{5\cdot4\cdot3}{2\cdot3}\right)$ способами. Оставшиеся 2 позиции занимают единицы, так как их порядок неважен, то 1 способом. Имеем: $S_2 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot3\cdot2} = \frac{S_1}{2} = 560$ способов.

$S = S_1 + S_2 = 1120 + 560 = 1680$ способов. (Примечание: цифр, делящихся и на 3, и на 5, очевидно, нет, кроме 0. Но 0 мы ставить не можем, так как при умножении он даст 0).

Ответ: 1680

№5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

см. стр. 2

График второго выражения — это график ф-и $(x-4)^2+(y-3)^2=a$, у которого оставляют только ту часть, кот. нах-ся в I четверти, и затем оставшийся график симметрично отражают сначала по оси OX, а затем Oy. (Это 4 „урезанные" окружности с центрами $(4;3)$; $(-4;3)$; $(4;-3)$; $(-4;-3)$). Рассмотрим первое выражение: $|y-3-x|+|y-3+x|=6$.

1) $y-3-x>0$; $y-3+x>0$ $\Rightarrow$ $2y=12$ $\Rightarrow$ $y=6$.

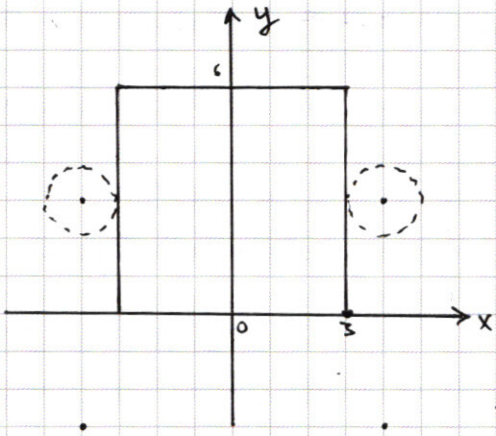
2) $y-3-x<0$; $y-3+x<0$ $\Rightarrow$ $-2y=0$ $\Rightarrow$ $y=0$

3) $y-3-x>0$; $y-3+x<0$ $\Rightarrow$ $-2x=6$ $\Rightarrow$ $x=-3$.

4) $y-3-x<0$; $y-3+x>0$ $\Rightarrow$ $2x=6$ $\Rightarrow$ $x=3$

(точки пересечения прямых удовлетворяют условию).

Графиком ов-ся квадрат с вершинами $(3;0)$; $(3;6)$; $(-3;6)$; $(-3;0)$



Очевидно, $a>0$. Если ~~все~~ ~~верхние~~ одна из верхних окр-ей пересекает квадрат n раз, то и другая верхняя аналогично точек. Значит, найдем такие a, что правая верх. окр-~~на~~ пересекает квадрат в 1 точке. Очевидно, первое $a=R^2=1^2=1$. Далее, до момента, когда она прох. через т. $(3;0)$ решений больше двух х. ($a=10$). После $a=10$ и до момента прохода через т. $(0;6)$ „окр-ть" пересекает всего 1 раз, что и требуется. $a\in(10;25)$. В точке $(0;6)$ обе верхние „окр-ти" проходят через 1 точку. Если при этом посмотреть на две нижние окр-ти, то они обе проходят через $(0;0)$. При $a=25$ имеем два решения. Для верхних окр-тей ≤ 2 решений при: $a\in\{1\};(10;25)$. (случай $a=25$ больше не смотрим). Для нижних „окр-стей" симметрия также присутствует. При $a\in(10;25)$ они обе пересекают квадрат в 1 точке. Но тогда при $a\in(10;25)$ каждая окр-ть дает 1 точку $\Rightarrow$ решений 4. (случай $a=10$ тоже). Тогда остаются $a=1$ и $a=25$.

Ответ: $1;25$.

№ 3

$$\begin{cases}\left(\dfrac{y^5}{x}\right)^{\lg x}=y^{2\lg xy} & * \\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0.\end{cases}$$

см. стр. 3

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$* \quad \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$ $\qquad$ $x>0;\ y>0$

$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg xy}$ $\qquad$ $x^{\lg x} = 10 = y^{\lg y}$

$y^{5\lg x} = y^{\lg y}\cdot y^{2\lg xy}$

$y^{5\lg x} = y^{(\lg y + 2\lg xy)}$

$\left[\begin{array}{l} y=1. \\ 5\lg x = \lg y + 2\lg xy \end{array}\right.$ $**$

$**$ $\lg x^5 = \lg x^2y^3$

$x^5 = x^2y^3$

$x^3 = y^3$

$x = y$. Из $*$ имеем: $\left[\begin{array}{l} y=1 \quad ① \\ x=y \quad ② \end{array}\right.$

① $\begin{cases} y=1 \\ x^2-2x-4x-3+12=0 \to x^2-6x+9=0 \to x=3 \\ x>0 \end{cases}$

$(3;1)$. Подставляя $(3;1)$, получаем $\frac{1}{10}=1$. противоречие.

② $\begin{cases} x=y \\ x>0 \\ y>0 \\ x^2-2x^2-4x-3x^2+12x=0 \quad *** \end{cases}$

$***$ $-4x^2+8x=0$

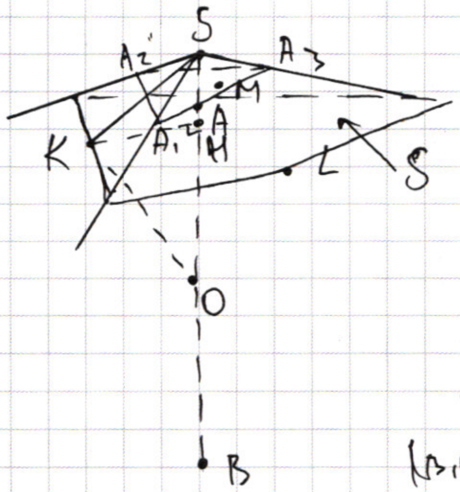
$x(8-4x)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$ т.к. $x>0$, то $x=2$. $(2;2)$

Корень $(2;2)$ подходит.

Ответ: $(2;2)$

№ 4



Пусть SO пересекает сферу в первые в точке A и в последний раз в точке B. (через т. A и т. B как раз проходят данные сечения.).

$S_{A_1A_2A_3} = 1$; $S_{B_1B_2B_3} = 4$. (A_1, A_2, A_3 стороны образовавшегося сечения, B_1, B_2, B_3 аналогично) (то, что B_1 и B_2 и B_3 не попали в рисунок не имеет значения.). $SA_1A_2A_3$ и $SB_1B_2B_3$ — подобные пирамиды ($(A_1A_2A_3) \parallel (B_1B_2B_3)$). $\frac{V_{SA_1A_2A_3}}{V_{SB_1B_2B_3}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot S_{A_1A_2A_3}\cdot SA}{\frac{1}{3}\cdot S_{B_1B_2B_3}\cdot SB} =$

$= \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3$ => если $SA = x$; то $SB = x + 2R$ (где R — радиус сферы).

$\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{x+2R} = \frac{1}{8}$ => $\frac{x}{x+2R} = \frac{1}{2}$ => $x = 2R$. В ΔKSO $OK \perp KS$ (т.к. OK перп. плоскости трехгр. угла). => $\angle SKO = 90^\circ$; $OK = R$; $SO = x + R = 3R$. $\sin\angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$; $\angle KSO = \arcsin\frac{1}{3}$. Рассуждая аналогично, получаем, что $\Delta OKS = \Delta OLS = \Delta OMS$ => $(KLM) \parallel (A_1A_2A_3)$. Проведем $KH \perp OS$. из ΔKSO $KS = \sqrt{9R^2 - R^2} = R\sqrt{8}$.

$KH = KS\cdot\frac{1}{3} = \frac{R\sqrt{8}}{3}$. Пусть $SH = y$ => $OH = 3R - y$. $KH^2 = SH\cdot OH$ =>

$\frac{8R^2}{9} = y\cdot(3R - y)$ => $8R^2 = 27Ry - 9y^2$ => $y = \frac{1}{3}R$ или $y = \frac{8}{3}R$.

Т.к. $y > SA = 2R$, то по смыслу задачи $y = \frac{8}{3}R$. $\frac{S_{A_1A_2A_3}}{S} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$

$\frac{1}{S} = \left(\frac{2R\cdot 3}{8R}\right)^2$; $\frac{1}{S} = \frac{9}{16}$ => $S = \frac{16}{9}$.

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\frac{1}{3}$; $S = \frac{16}{9}$

№ 7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \le 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3\cdot 2^{65} < y \le 70 + (2^{64} - 1)x$$

Рассмотрим неравенство:

$$2^x + 3\cdot 2^{65} < 70 + (2^{64} - 1)x$$

$f(x) = 2^x + 3\cdot 2^{65}$ — выпуклая вниз функция.

см. стр. 5

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$g(y) = 70 + (2^{64}-1)x$ – прямая => невыпуклая функция. Тогда графики этих функций пересекаются максимум в 2-ух точках x:

$2^x + 3\cdot 2^{65} = 70 + (2^{64}-1)\cdot x$

Подбором находим $x = 6$ и $x = 70$. Тогда условию неравенства удовл. промежуток $x \in (6; 70)$. В этом промежутке 63 целых числа => условию удовл. 63 пары

Ответ: 63.

№2

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2\sin 7x \sin 4x - 2\sin 4x\cos 7x = \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x)$

$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$

$\left[\begin{array}{l}\sin 7x + \cos 7x = 0\\ -2\sin 4x = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)\end{array}\right.$

$-2\sin 4x = \sqrt{2}\left(\sqrt{1-\sin^2 7x} - \sin 7x\right)$ $\not\in$

$-2\sin 4x = \sqrt{2}(\cos 3x\cos 4x - \sin 3x\sin 4x - \sin 3x\cos 4x - \sin 4x\cos 3x)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-3-x>0 \qquad y-3+x<0$ ←

$\cancel{y-3}-x \quad \cancel{+y+3}-x = 6$

$-2x = 6$

$x = -3$

$y-3-x<0 \qquad y-3+x<0$ ↓

$-y+3+x \quad -y+3-x = 6$

$-2y+6 = 6$

$y = 0$

$y-3-x<0 \qquad y-3+x>0$ →

$-y+3+x \quad +y-3+x = 6$

$x = 3$

$y > 2^x + 3\cdot 2^{65}$

$y \le 70 + (2^{64}-1)x$

$2^x + 3\cdot 2^{65} < 70 + (2^{64}-1)x$

$\cancel{x<0}$ x не меньше 0. $x \ne 0$

$x=1 \quad 2+3\cdot 2^{65} \quad 70+2^{64}-1$

$\cancel{2^x}$ 2 корня.

$2^x + 3\cdot 2^{65} - 70 - (2^{64}-1)x = 0.$

$2^x + 3\cdot 2^{65} - 70 - x2^{64} + x = 0$

$\cancel{2^{12} + 3\cdot 2^{65} - 70 - 3\cdot 2^{66} + 12}$

$2^x + 2^{64}(6-x) + x - 70 = 0$

$\cancel{2^{64} + 2^{64}(6-64) + 64 - 70 = 0}$

$x = 6$

$64 + 6 - 70 = 0$ еее.

$2^{70} + 2^{64}\cdot(-64) + 70 - 70 =$

$2^{70} - 2^{70} + 70 - 70 = 0$

$x = 70$

$a = R^2$

$a = 1$

$\frac{x}{x+2z} = \frac{1}{2}$

$2x = x+2z$

$\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5) $(\cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x)$

$2\cos\frac{2}{+\sqrt{3}} + 2\cos\frac{2}{-\sqrt{3}} = 2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2^x + 3\cdot 2^{65} < y \le 70 + (2^{64}-1)x$ $\frac{76}{2}=38$

$2^x + 3\cdot 2^{65} < 70 + (2^{64}-1)x$ $(6;70)$

$2^7 + 3\cdot 2^{65} < 70 + 7(2^{64}-1)$

$128 + 3\cdot 2^{65} < 70 + 7\cdot 2^{64} - 7$

$2^x + 3\cdot 2^{65}$ $63 + 2^{64}x$

$2^{38} + 3\cdot 2^{65} \vee 70 + 38(2^{64}-1)$

$2^{38} + 3\cdot 2^{65} - 70 + 38 - 38\cdot 2^{64}$

$x^2 - 2xy + y^2$

$(x-2)^2$

$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$ $\cancel{2^{64}(6-38)}$

$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg xy}$

$\downarrow 10$

$y^{5\lg x} = 10\, y^{2\lg xy}$

$y^{\lg x}(y^5 + 10 y^{2\lg y}) = 0$

$y^{\lg x}(y^5 + 10(y^{\lg y})^2) = 0$

$y^{\lg x}(y^5 + 1000) = 0.$

$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$

$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg xy}$

$y^{5\lg x} = 10\cdot y^{2\lg xy}$

$\cancel{y^{\lg x}(5}$

$5\lg x = \lg y + 2\lg xy$

$5\lg x = \lg x^2y^3$

$x^5 = x^2y^3$

$x^3 = y^3$ $x = y$

$\cancel{x = y}$

шидо $y = 1$

$\cancel{(x^4)^{\lg x} = x^{2\lg x^2}}$

$\cancel{x^{4\lg x} = x^{4\lg x}}$

$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$

$-4x^2 + 8x = 0$

$x(8-4x) = 0$

$x = 0$

$x = 2.$

$x > 0$

$y > 0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3}$

$1^{2\lg 3}$ $3^{\lg 9}$ $= \frac{1}{3^{\lg 3}} = \frac{1}{10}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3375	3
1125	3
375	3
125	5
25	5
5	5
1	

$125 \times 27 = 875 + 250$

3 3 3 5 5 5

1) девяток нет 3 3 3 5 5 5 1 1 3375

$\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}$ вариантов поставить 3, 5

$\frac{8\cdot7\cdot6 \cdot 8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot3\cdot2}$

2) есть 9. 9 3 5 5 5 1 1 1

$\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2} \cdot \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\sin$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt2 \cos 14x$

$-(\sin 11x - \sin 3x)$

$-2\sin 7x \sin 4x - 2\sin 4x \cos 7x = \sqrt2(\cos^2 7x - \sin^2 7x)$

$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt2(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x) \quad | :$

* $\sin 7x + \cos 7x = 0$

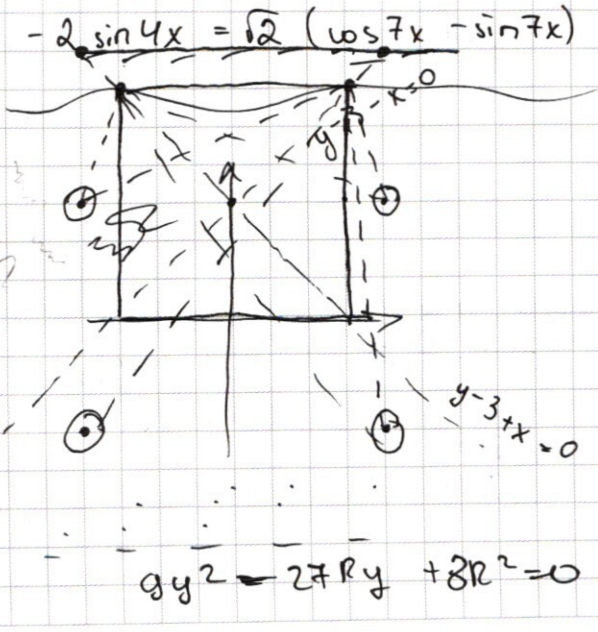
$\downarrow$

$-2\sin 4x = \sqrt2(\cos 7x - \sin 7x)$

$\cos(3x+4x) = \cos 3x \cos 4x - \sin 3x \sin 4x$

$\sin(3x+4x) = \sin 3x \cos 4x + \sin 4x \cos 3x$

$\cos 3x(\cos 4x - \sin 4x) - \sin 3x(\sin 4x + \cos 4x)$



$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$

$y = 3+x \qquad y = 3-x$

1) $y-3-x \geq 0$

$y-3+x \geq 0$

$2y - 6 = 6$

$2y = 12$

$y = 6$

$(|x|-4)^2 + 9 = a$

$9y^2 - 27Ry + 8R^2 = 0$

$y = \frac{1}{3} \qquad y = \frac{8}{3}$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$\cancel{(x-y)^2}$

$(x-y)^2$

$(x-2)^2$

$(2y-3)^2$

$(x-y)^2 + (x-2)^2 - (2y-3)^2$

$-x^2 - 4 + 9 = 0$

$= x^2 - 5$

$\lg\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = \lg\left(y^{2\lg xy}\right)$

$\lg x \lg \frac{y^5}{x} = 2\lg xy \lg y$

$x > 0$
$y > 0.$

$\cancel{\lg y^5 = 2\lg 2xy^2}$

$\cancel{y^5 = 2xy^2}$

$\lg y^5 = \lg 100xy^2$

$y^3 = 100x$

$x = \frac{y^3}{100}$

$\cancel{y^3 = 2x}$ $\quad$ $\cancel{x = \frac{y^3}{2}}$

$\cancel{\frac{y^6}{4} - y^4 - 2y^3 - 3y^2 + 12y = 0. \quad | \cdot 4}$

$\cancel{y^6 - 4y^4 - 8y^3 - 12y^2 + 48y = 0}$

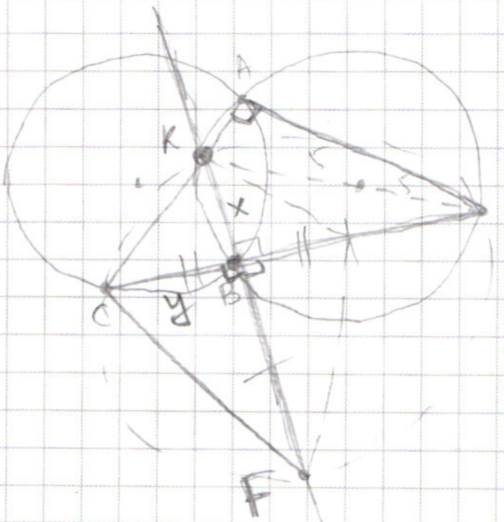
$\cancel{\frac{y^6}{10000} - 2\frac{y^3}{100}\cdot y - \frac{4y^3}{100} - 3y^2 + 12y = 0}$

$\cancel{y^6 - 200y^4 - 400y^3 - 30000y^2 + 120000y = 0}$

$\cancel{y(y^5 - 200y^3 - 400y^2 - 30000y + 120000) = 0.}$

$\cancel{100000 - 200\,000 - 400\,00 - 300000}$

61,70

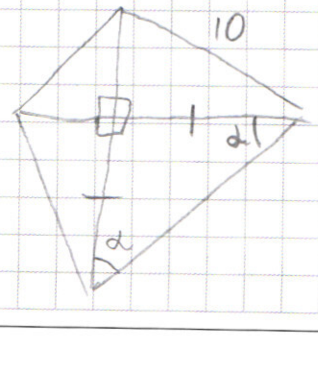


$70 + 38(2^{64} - 1) - 2^{38} - 3\cdot 2^{65}$

$32 + 19\cdot 2^{65} - 2^{38} - 3\cdot 2^{65}$

$2^{65}(19-3)$

2^{69}



$\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}}{\cancel{3}\cdot 2\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}}$

$8\cdot 7 \cdot 5 \cdot 4$

56 $\quad$ 20

$56 \times 20 = 1120$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)