

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓1

$3375 = 3^3 \cdot 5^3$; среди произвольных цифр

3375 нечетное $\Rightarrow$ все цифры исходного числа тоже нечетны.

Среди нечетных цифр только «5» $\div 5 \Rightarrow$ три цифры это «5».

Среди нечетных цифр на третьем месте «3» и «9», причем «9» ~~не~~ может быть на 2-м месте.

Значит 3^3 можно представить либо как $3.3.3$ либо как 3.9 .

Оставшиеся цифры должны быть «1» (2-м способом) или «3» (3-м способом)

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{3 \cdot 8!}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{7!}{3} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} =$$

$$= 1680.$$

Ответ: 1680.

✓3

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^{\lg x} \cdot x^{-\lg x}, \quad \{x > 0, y > 0\}.$$

$$y^{\lg x} = y^{\lg y \cdot \frac{\lg x}{\lg y}} \cdot x^{-\lg x}, \quad y^{\lg x} = y^{\lg y} \cdot y^{\frac{\lg x}{\lg y} \cdot \lg y} \cdot x^{-\lg x}, \quad \lg(y^{\lg x}) = \lg(y^{\lg y}) +$$

$$3 \lg x \lg y = 2 \lg^2 y + \lg^2 x, \quad \lg^2 x - 3 \lg y \lg x + 2 = 0, \quad \lg x = \left[\frac{1}{2} + \lg(y^{\lg y}) \right]$$

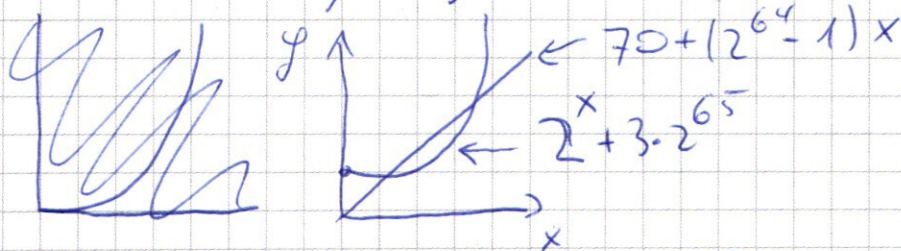
$$\begin{cases} x = y \\ x = y^2 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2^x \cdot 2^{65} = 70 + 12^{64} - 1) \cdot x$$

График функции

При $x \leq 0$ $2^x + 3 \cdot 2^{65} > 0 > 70 + (12^{64} - 1) \cdot x$
Значит пересечений только $x \geq 0$.



Точки пересечения не больше 2.

Это $x=6$ и $x=70$.

Значит ответом будет: $\sum_{x=6}^{70} (70 + (12^{64} - 1) \cdot x - 2^x - 3 \cdot 2^{65})$

$$= 70 \cdot 65 - 3 \cdot 2^{65} \cdot 65 - \frac{76 \cdot 65}{2} + 2^{64} \cdot \frac{76 \cdot 65}{2} - \sum_{x=6}^{x=70} 2^x =$$

$$= 65 \cdot 32 - 6 \cdot 65 \cdot 2^{64} + 2^{64} \cdot 38 \cdot 65 - 2^{71} + 2^6 =$$

$$= 67 \cdot 32 + 2^{64} (44 \cdot 65 - 128) = 2144 + 2^{64} \cdot 2732$$

Ответ: $2144 + 2^{64} \cdot 2732$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375/5 \\ 675/5 \\ 135/5 \\ 27/ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 27 \\ \hline 35 \\ 14 \\ 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$3.5^3$$

$$5,5,5 < 333 \text{ и } 93 \text{ и } 111$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8! \cdot 3}{2 \cdot 3! \cdot 3!} =$$

$$= \frac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 6} = \frac{7!}{3} = 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 21 \cdot 10 \cdot 8 = 1680$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x =$$

$$= \sqrt{2} (\cos 11x \cdot \cos 3x - \sin 11x \cdot \sin 3x)$$



$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) - \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) + \cos(-3x - \frac{\pi}{4}) - \cos(3x + \frac{\pi}{4}) =$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = \cos(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}) - \cos(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}) =$$

$$\frac{1}{2} (\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}) =$$

$$= \frac{1}{2} (\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}) = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta))$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos 14x = 2 \cdot \sin(7x + \frac{\pi}{4}) \cdot \sin 4x$$

$$\log\left(\frac{y}{x}\right)^{65} = y^{2 \log x} = y^{2(\log x + \log y)} = y^{2 \log x} \cdot y^{2 \log y}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^{5 \log x} = y^{2 \log x} \cdot y^{2 \log y} \cdot x^{\log x}$$

$$y^{3 \log x} = y^{2 \log y} \cdot x^{\log x}$$

$$3 \log x \log y = 2 \log^2 y + \log^2 x + 64$$

$$44 \cdot 65 = \log y^2 x - 3 \log y x + 2 = 0$$

$$-22 \cdot 130$$

$$\log y x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \begin{cases} x=y \\ x=y^2 \end{cases}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2x - 4x - 3x + 12x = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 4x=8 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$\begin{cases} y=0 \\ y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} = \frac{1+17-2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

$$[6; 70] \quad y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$y^2 - 7y - 4y + 12 = 0$$

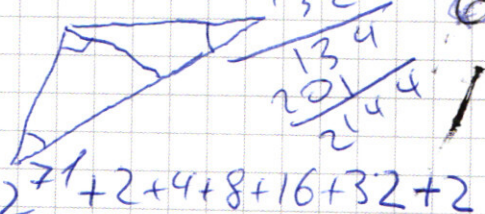
$$y^2 + y - 4 = 0 \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\sum_{x=6}^{70} (70 + (2^{64} - 1)x - 2^x + 3 \cdot 2^{65})$$

$$70 \cdot 65 + (2^{64} - 1) \cdot \frac{70+6}{2} \cdot 65 +$$

$$+ 3 \cdot 2^{65} \cdot 65 - \sum_{x=6}^{70} 2^x =$$

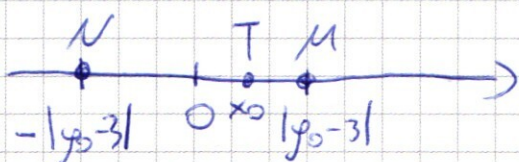
$$= 70 \cdot 65 + (2^{64} - 1) \cdot 38 \cdot 65 + 3 \cdot 2^{65} - 2^7 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 2$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Заметим, что если (x_0, y_0) решение, то $|y_0 - 3| - x_0 + |y_0 - 3| + x_0 = 6$.



$$NT + TM = 6$$

$$NT + TM \geq 2|y_0 - 3| \Rightarrow |y_0 - 3| \leq 3$$

Значит $0 \leq y_0 \leq 6$

Если (x_0, y_0) решение, то $(-x_0, y_0)$ тоже решение.

Если (x_0, y_0) решение, то $(x_0, 6 - y_0)$ тоже решение.

$$\begin{cases} |(6 - y_0) - 3 - x_0| + |(6 - y_0) - 3 + x_0| = 6 \\ (|x_0| - 4)^2 + (|6 - y_0| - 3)^2 = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y_0 - 3| + x_0 + |y_0 - 3| - x_0 = 6 \\ (|x_0| - 6)^2 + (3 - y_0)^2 = \alpha \end{cases}$$

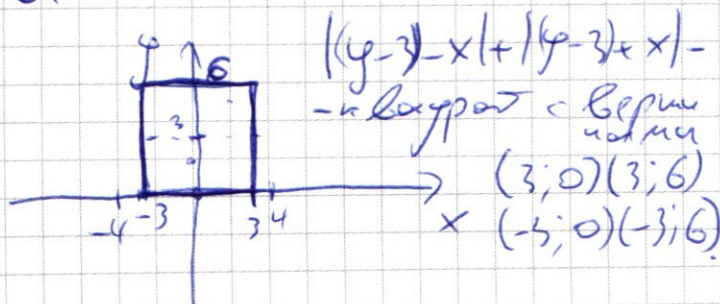
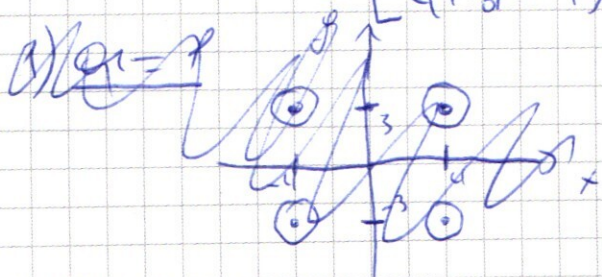
$6 - y_0 \geq 0$ $y_0 = |y_0|$

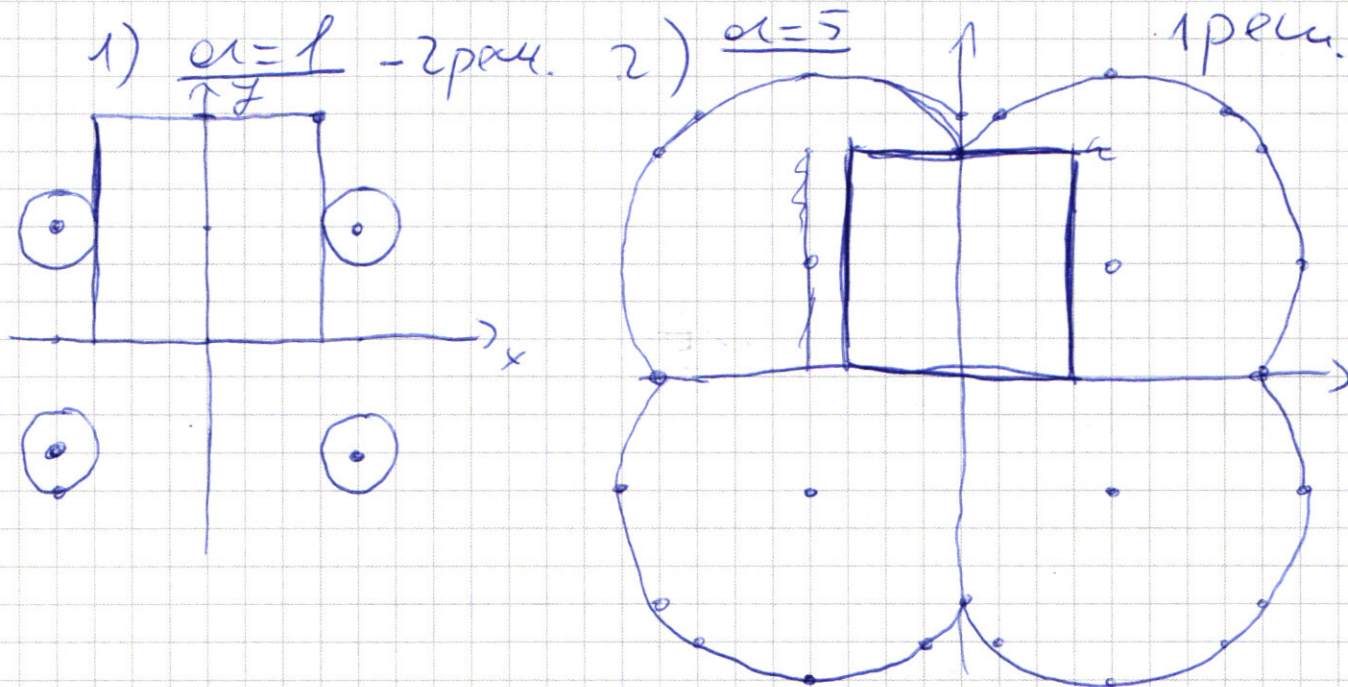
Значит если $\alpha \geq 6$ ровно 2 решения, то

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 6 - y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2|y_0 - 3| = 6 \\ (y_0 - 3)^2 = \alpha - 16 \\ 2|x_0| = 6 \\ (|x_0| - 4)^2 = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 16 + 3^2 = 25 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$





Ответ: $\alpha = 1$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos(3x + \frac{\pi}{4}) = -2 \sin 4x$

$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) - \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$
 $-2 \sin(7x + \frac{\pi}{4}) \sin 4x$

$a - b + c + d = \sqrt{2}(a - b)$

$2r^2 - 2r^2 \cos 2\alpha = 2r^2(2 \sin^2 \alpha)$
 $AB = \frac{r}{2 \sin \alpha}$

$y - 2y + 6$
 $a > b > 0$
 $a = \frac{c}{2}$
 $|y + 3 - x| + |y + 3 + x| = |y - 3 + x| + |y - 3 - x|$

$\sin \alpha - \sin \beta = \sin(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}) - \sin \beta(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2})$
 $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

$-2 \sin 7x \sin 4x + 2 \sin(-4x) \sin 7x =$
 $= -2(\sin 7x \sin 4x + \sin 4x \cos 7x) =$
 $= -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$
 $= \sqrt{2} \sin 4x \cos(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 14x$

$\cos(x - y) + \sin(x + y) =$

$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
 $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x - y) + \sin(x + y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y + \sin x \cos y + \cos x \sin y =$
 $= \cos x (\cos y + \sin y) + \sin x (\sin y + \cos y) = (\cos x + \sin x)(\cos y + \sin y)$

(x{ u/s x}||yS -

5000-1

-x{50>x}||50}25 = x{ u/s + x{500 - x}||yS - x}||50}