

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Разложим 3375 на произведение цифр.

$$3375 = 675 \cdot 5 = 135 \cdot 5 \cdot 5 = 27 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Разложим лишь 2 случая:

1) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1$. Теперь найдем кол-во вариантов такого разложения. Это будет $8!$, но учитывая повторения, разделим на $3! \cdot 3! \cdot 2!$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2$$

2) $9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$. Кол-во будет равно $\frac{8!}{3! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4$

В общем получили $2(8 \cdot 7 \cdot 5) + 4(8 \cdot 7 \cdot 5) = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 = 1680$

Ответ: 1680

$$3. \left(\frac{y^5}{x} \right)^{1/x} = y^{2/x} x^y$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 11y = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Реш. введем x :

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 11y = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3xy + xy - 3y^2 - 4(x - 3y) = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow x(x - 3y) + y(x - 3y) - 4(x - 3y) = 0 \quad (3)$$

$$(x + y - 4)(x - 3y) = 0$$

У нас 2 варианта:

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x = 3y \end{cases}$$

1) Пусть $x = 3y$

$$\left(\frac{y^5}{3y} \right)^{1/3y} = y^{2/3y} \quad (2) \quad \frac{y^{5/3y}}{(3y)^{1/3y}} - y^{2/3y + 1/3y} = 0$$

Очевидно, что $y^{2/3y} \neq 0$, а-то разделим наше выражение.

$$\frac{y^{3 \lg 3}}{(3y)^{\lg 3}} - y^{2 \lg y} = 0 \Leftrightarrow \frac{y^{3 \lg 3 + 3 \lg y}}{(3y)^{\lg 3}} = y^{2 \lg y} \Leftrightarrow \frac{y^{2 \lg 3 + 2 \lg y}}{3^{\lg 3}} = y^{2 \lg y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^{2 \lg y}}{3^{\lg 3}} = 1 \Leftrightarrow y^{2 \lg y} = 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y} \quad \left(\frac{y^2}{3} \right)^{\lg y} = 3^{\lg 3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^{2 \lg 3}}{3^{\lg 3}} = 1 \Leftrightarrow y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y}$$

Логарифмируем обе части по основанию 10:

$$\lg(y^{2 \lg 3}) = \lg(3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y}) \Leftrightarrow 2 \lg 3 = \lg 3 + \lg y$$

$$\lg(y^{2 \lg 3}) = \lg(3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y}) = 2 \lg 3 \cdot \lg y = \lg 3 \cdot \lg 3 + \lg y \cdot \lg 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg 3 \cdot \lg y = \lg 3 \cdot \lg 3 \Leftrightarrow y = 3$$

$$x = 3y = 9$$

2) Пусть $x + y = 4$

$$\left(\frac{y^5}{4-y} \right)^{\lg(4-y)} = y^{2 \lg y} \Leftrightarrow \frac{y^{5 \lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{2 \lg y} \Leftrightarrow y^{3 \lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2 \lg y}$$

Логарифмируем обе части по основанию 10:

$$3 \lg(4-y) \cdot \lg y = \lg(4-y) \cdot \lg(4-y) + 2 \lg y \cdot \lg y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \lg^2 y - 2 \lg(4-y) \cdot \lg y - \lg(4-y) \cdot \lg y + \lg^2(4-y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \lg y (\lg y - \lg(4-y)) - \lg(4-y) (\lg y - \lg(4-y)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg y = \lg(4-y), \\ 2 \lg y = \lg(4-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4-y, \\ y \in (0; 4), \\ y^2 = 4-y, \\ y \in (0; 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ y^2 + y - 4 = 0, \\ y \in (0; 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}, \\ y \in (0; 4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \end{cases} \quad x = 4-y \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = \frac{5-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = \frac{5-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (1; 3); (2; 2), \left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2} \right).$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5. \begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 0 \end{cases}$$

Построим график первой ф-ии. Для
этого нужно рассмотреть 4 варианта:

$$1) |y-3-x| \geq 0, |y-3+x| \geq 0$$

$$y-3-x \geq 0, y-3 \geq -x \text{ или } y \geq x+3, y \geq -x+3$$

$$y-3-x+y-3+x \leq 6 \Leftrightarrow 2y = 12 \Leftrightarrow y = 6$$

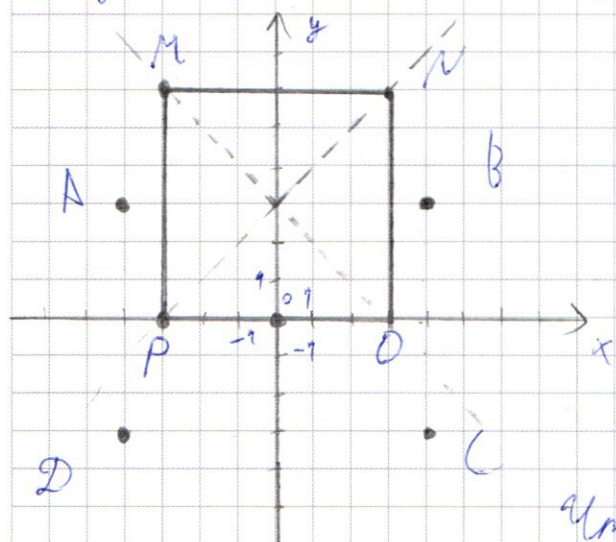
$$2) y-3 \geq x, y-3 < -x \text{ или } y \geq x+3, y < -x+3$$

$$y-3-x - y+3-x = 6 \Leftrightarrow -2x = 6 \Leftrightarrow x = -3$$

$$3) y-3 < x, y-3 < -x \text{ или } y < x+3, y < -x+3$$

$$-y+3+x - y+3-x = 6 \Leftrightarrow -2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$4) y-3 < x, y-3 \geq -x \text{ или } -y+3+x+y-3+x \leq 6 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$$



Графиком первой функции является
квадрат. Заметим, что графиком второй
ф-ии будут 4 окружности, симметричные
относительно осей и касаясь начала координат.

Отметим центры этих окружностей:

$$A(-4; 3), B(4; 3), C(4; -3), D(-4; -3).$$

Чтобы система имела два решения, нужно,
чтобы только две окружности касались двух сторон квадрата, либо
одна окружность пересекала одну сторону в двух точках. По графику
видно, что сторона квадрата 6, и если радиус будет меньше одного, то решений
нет, а если равен одному, то есть 2 решения. И.е. $a = 1$.

Точки A и B абсолютно симметричны⁸ и одинаково будут пересекать или не пересекать квадрат. Рассмотрим случай, когда они касаются квадрата, перейдем к тому, где они оба не касаются квадрата, а две другие окружности касаются. Окружности D и C могут касаться квадрата так, чтобы радиус другие две не касались. Проверим это. Если квадрат $MNOP$ и окружность A . $|AN| = |OP| = \max R$, при котором окр. A пересекает квадрат. $|OA| \leq \sqrt{7^2 + 3^2} \leq \sqrt{58}$.

Если $|DN| = |CM| = \max R$, при котором окр.-ти C и D касаются квадрата.

$$|DN| = |CM| = \sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{82} > \sqrt{58}. \text{ Т.е. } a \leq 82$$

$|DN| = |CM| = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{130} > \sqrt{58}$, т.е. $a \leq 130$. Очевидно, что $|DP| \leq |OC| \leq \sqrt{58}$ по рисунку и $n > 1$, следовательно больше нет параметра a , при котором система имеет 2 решения.

Ответ: $a \leq 1$, $a \leq 130$.

$$7. \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases} \Leftrightarrow 70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

График первой ф-ии имеет вид прямой, а график второй ф-ии - экспоненциальной функции, в которой лишь один перегиб. Т.е. эти две ф-ии могут иметь только 2 общие точки (точки пересечения). Т.е. $70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$ всегда между этими двумя точками пересечения, как показано на рисунке:



Поэтому нам нужно решить ур-е:

$$70 + (2^{64} - 1)x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{65}. \text{ Если это и имеет решение, то максимум 2 решения. Подставим } x = 6$$

$$70 + 6 \cdot 2^{64} - 6 = 2^6 + 3 \cdot 2^{65} \Leftrightarrow 64 = 2^6 \Leftrightarrow 64 = 64 \text{ (ист.)}$$

~~Подставим~~ x Мы нашли первый корень $x = 6$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$15) \sin 4x \cdot \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2} \cos 14x$$

$70 + 2^{64}x - x = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$. По предположению, если $(70-x)$ является степенью двойки, то x не является степенью двойки, а $(x-3)$ тем более (т.к. число будет нечетным). Но тогда в правой части ур-я останется 2^x , ~~а левая~~ т.е. ур-е не будет решаться в целых числах, что допустимо, но неудобно для нас, если оно решается в целых числах, то $(70-x) = 0$, т.е. $x = 70$. Подставим $x = 70$:
 $70 + 2^{64} \cdot 70 - 70 = 2^{70} + 3 \cdot 2^{65} \Leftrightarrow 35 \cdot 2^{65} - 3 \cdot 2^{65} = 2^{70} \Leftrightarrow 2^5 \cdot 2^{65} = 2^{70} \Leftrightarrow 2^{70} = 2^{70}$ (ист.). Т.о. мы нашли второй и последний корень ур-я. Тогда решением нашего изначального нер-ва $70 \div (2^{64}-1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$ будет $x \in (6; 70)$.

$$70 + (2^{64}-1)x \geq y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \quad \text{имеет } 70 = 6 \neq 63 \text{ решений}$$

~~Ответ:~~ Очевидно, что $70 + (2^{64}-1)x \in (6; 70) \nRightarrow \forall x \in (6; 70)$ для любого целого $x \in (6; 70)$. Найдём все значения y .

Для этого ~~70 + (2^{64}-1)x~~ от $70 + (2^{64}-1)x$ при $x = 70$ вычтем $2^x + 3 \cdot 2^{65}$ при $x = 6$.

$$70 \cdot 2^{64} - 2^6 - 3 \cdot 2^{65} = 35 \cdot 2^{65} - 3 \cdot 2^{65} - 2^6 = 2^{70} - 2^6 \quad \text{и вычтем}$$

y может принимать $2^{70} - 2^6$ значений. Найдём кол-во нар целых чисел слишком долго и слишком сложно для 6 баллов, ведь для каждого целого x $\exists$ будет очень много значений y .

Ответ: кол-во целых $x \neq 63$, кол-во целых $y = (2^{70} - 2^6)$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \cos(14x) - \cos(3x) - \sin(14x) + \sin(3x) &= \sqrt{2} \cdot \cos(4x) \Leftrightarrow \cos(7x+4x) - \cos(7x-4x) = \\
 &= \sin(7x+4x) + \sin(7x-4x) = \sqrt{2} \cos(4x) \Leftrightarrow \cos(7x) \cdot \cos(4x) - \sin(7x) \cdot \sin(4x) = \\
 &= \sin(7x) \cdot \sin(4x) + \sin(7x) \cdot \cos(4x) - \cos(7x) \cdot \sin(4x) + \sin(7x) \cdot \cos(4x) = \sqrt{2} \cos(4x)
 \end{aligned}$$

$$(\Leftrightarrow) \Rightarrow 2 \sin(7x) \cdot \sin(4x) - 2 \cos(7x) \cdot \sin(4x) = \sqrt{2} \cos(4x) \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \Rightarrow 2(\sin(7x) \cdot \sin(4x) + \cos(7x) \cdot \sin(4x)) = \sqrt{2} \sin(4x)(\sin(7x) + \cos(7x)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(4x) \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \sin(4x) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(7x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(7x) \right) = -\frac{1}{2} \cos(4x) \quad (\Leftrightarrow)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x + y = 4$
 $\left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^{\lg xy}$
 $\frac{y^{\lg(4-y)}}{4-y} = y^{\lg(4-y) + \lg y}$
 $\frac{y^{\lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{\lg y}$
 $y^{\lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{\lg y}$
 $y^{\lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{\lg y}$
 $3 \lg \frac{y}{4-y} \cdot \lg y = \lg(4-y) + 2 \lg y \cdot \lg y + \lg 4$
 $3 \lg(4-y) \cdot \lg y = \lg^2(4-y) + 2 \lg^2 y + \lg 4$
 $2 \lg^2 y - 2 \lg(4-y) \lg y - (\lg(4-y) \lg y - \lg^2(4-y)) = 0$
 $2 \lg y / \lg y - \lg(4-y)$
 $y = -1 \pm 1$
 $y = 0$

$y - 3 - x = 0$
 $y - 3 + x = 0$
 $y - 3 - x + y - 3 + x = 0$
 $2y = 6$
 $y = 3$
 $x = 1$

$|y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6$
 $(|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 4$

$y - 3 + x = 20$
 $y - 3 - x = 5$
 $2x = 15$
 $x = 7.5$
 $y = 27.5$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

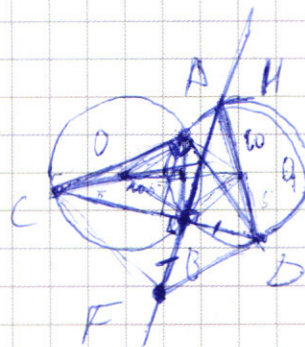
$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)X$$

$$70 + (2^{64} - 1)X > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 + 2^{64}X - X > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$



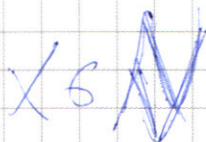
$$\log_2(70 + 2^{64})$$



100

$$(9 + 1)^6 \geq 9 + 1^6$$

(9; 20)



2

18

$$70 + 2^{64}X - X - 2^x - 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 + 2^{64}X > 2^x + X + 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^{48} + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + 2^{64} \cdot 2^{48}$$

$$2^{72} + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + 2^{64} \cdot 2^{72} - 92$$

$$2^{70} + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 35 \cdot 2^{65} - 70$$

$$3 \cdot 2^{65}$$

10 - 8

$$2^6 = 64$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)X$$

$$2^x = 70 + 2^{64}X - X - 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + X \cdot 2^{64} - X$$

$$X \leq 6$$

128 +

$$2^7 + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 7 \cdot 2^{65}$$

$$2^{12} + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 6 \cdot 2^{65} - 92$$

$$2^{16} + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 32 \cdot 2^{65} - 64$$

$$2^{56} = 29 \cdot 2^{65} + 1$$

$$2^{2^{64}} + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 2^{64} \cdot 2^{64} - 2^{64}$$

$$128 - 60 = 68$$

$$198 - 70$$

$$198$$

$$302 - 198$$

$$2^{64} + 3 \cdot 2^{65} \leq 70$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos(14x - 3x) - \cos(14x - 11x)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos \alpha - \cos \beta)$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\sin 60 \cdot \cos 30 = \frac{1}{2} (\sin 90 + \sin 30) = \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2})$$

$$-\sin(\beta - \alpha) = \sin(\alpha - \beta)$$

$$\sin 30 \cdot \cos 30 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos 11x - \cos 3x$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\cos 60 \cdot \cos 30 = \frac{1}{2} (\cos 90 + \cos 30)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos(\alpha + \beta)$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(11x + 3x) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 30 \cdot \cos 30 = \frac{1}{2} (\cos 60 + \cos 0)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta)$$

$$\sin 60 \cdot \sin 30 = \frac{1}{2} (\cos 90 - \cos 30)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos$$

$$\cos 30 \cdot \cos 30$$

$$\sin 45 \cdot \sin 30$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30 \cdot \sin 30$$

$$\cos 60 - \cos 0$$

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\sin 60 \cdot \sin 30 = \frac{1}{2} (\cos 90 + \cos 30)$$

$$-\cos 90$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 60 \cdot \sin 60 = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \cos 11x + \cos 3x - \sqrt{2} \sin 11x \cdot \sin 3x - \cos 11x + \cos 3x + \sin 11x - \sin 3x = 0 \\ & \cos(11-3) - \cos(11-3) = 0 \\ & \cos(7+3) - \cos(7-3) = -2 \sin 7 \cdot \sin 3 \\ & -2 \sin 7x \cdot \sin 3x = -2 \sin 7x \cdot \cos 4x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - 1) = 2 \sin^2 \frac{7x}{2} \\ & \sin(2+\beta) - \sin(\beta-2) = \sin(2+\beta) + \sin(2+\beta) = 2 \sin 2 \cos \beta \\ & \sin 11x - \sin 3x \\ & \sqrt{2} (1 - 2 \sin^2 7x) \\ & 2\sqrt{2} \cos^2 7x - \sqrt{2} + \sqrt{2} \cos^2 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin 7x \cdot \sin 4x + \sin 7x \cdot \cos 4x = 0 \\ & \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \sin 7x \\ & -\sin 7x \cdot \sin 4x - \sin 7x \cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \sin^2 7x \\ & \sqrt{2} \sin^2 7x - \sin 7x (\sin 4x + \cos 4x) - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ & \sin 7x = \frac{\sin 4x + \cos 4x \pm \sqrt{(\sin 4x + \cos 4x)^2 + \frac{2\sqrt{2}}{2}}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = R y^{2 \lg xy}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\frac{y^5 \lg x}{x \lg x}} = y^{2 \lg x + \lg y} y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$$

$$(x-y)^2 - 4(x+y) + 12 = 0$$

$$(x-y)^2 - 4(x+y) + 12 = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$$

$$(x-y)^2 - 4x - 4y + 12 = 0$$

$$2x^2 - 4xy - 2x - 6y^2 + 24y = 0$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + x^2 - 8x - 10y^2 + 24y = 0$$

$$(x-2y)^2 + x^2 =$$

$$y^3 \lg x - 2 \lg y = x^{\lg x}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 3xy + xy - 3y^2 - (4x + 12y) = 0$$

$$x(x-y) + y(x-3y) - 4(x+3y) = 0$$

$$(x-y-4)(x-3y) = 0$$

$$\frac{y^3 \lg 3y}{3y \lg 3y} = y^{\lg 3y}$$

$$y^{2 \lg 3y} \cdot y^{2 \lg 2}$$

$$= \sqrt{2} / \cos 11^\circ$$

$$(\cos(11^\circ - \cos 3^\circ) - (\sin 11^\circ \times \sin 3^\circ)) = \sqrt{2} / (\cos 11^\circ - \cos 3^\circ)$$

$$\cos 11^\circ \cdot \cos 3^\circ - \sin 11^\circ \cdot \sin 3^\circ = \cos 11^\circ \cdot \cos 3^\circ - \cos 11^\circ \cdot \cos 3^\circ$$

$$x^{\lg 10} x^{\lg x} x^{\frac{1}{\lg x 10}}$$

$$x^2 - 8x + 16$$

$$\lg y^2 - 24y + \frac{72}{5}$$

$$5y^2 - 12y + \frac{36}{5}$$

$$y^2 - \frac{12}{5}y + \frac{36}{25}$$

$$\frac{6}{5} \cdot 2$$

$$\frac{36}{25}$$

$$\begin{cases} x=3y \\ x+y=4 \end{cases}$$

$$3 \lg 3y - 2 \lg y$$

$$y^{\frac{1}{\lg 3y}} + 2 \lg 3y - 2 \lg y$$

$$y^{\frac{1}{\lg 3y}}$$

$$2 \lg \frac{3y}{y} = 2$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$x = 68707$$

?

$$70 + 2^{64} \cdot 7 - 7 > 2^7 + 13 \cdot 2^{65}$$

$$70 + 2^{63} -$$

$$63 + 2^{63} > 2^7$$

$$\cos(7x+4x) - \cos(7x-4x)$$

$$6270 + 2^{65} > 2^8$$

$$70 + \left(\frac{x}{2} - 3\right) 2^{65} - x > 2^x$$

$$\cdot \int 2^x - 3 \cdot 2^{65}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

14

8

11

3