

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$$\begin{array}{r} 3375 \\ -25 \\ \hline 27 \\ -25 \\ \hline 2 \end{array} \quad \frac{15}{5}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \\ -30 \\ \hline 37 \\ -35 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\frac{15}{675}$$

$$\begin{array}{r} 075 \\ -5 \\ \hline 72 \\ -15 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\frac{15}{135}$$

$$\begin{array}{r} 135 \\ -10 \\ \hline 35 \end{array} \quad \frac{15}{125}$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) =$$

$$\cos(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \quad \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}) - \cos(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}) = 2 \sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) \sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$\sin(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}) = \sin$$

$$\alpha + \beta = \frac{2\alpha + 2\beta}{2}$$

$$\alpha = \frac{2\alpha + 2\beta}{2}$$

$$\frac{11+5}{2} = 17 + \frac{\pi}{4} \quad \frac{8}{2} = 4x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $3345 = 5^3 \cdot 3^3$

Возможные комбинации:

1) 3 цифры „5“, 3 цифры „3“, 2 цифры „1“

2) 3 цифры „5“, 1 цифра „9“, 2 цифры „3“, 3 цифры „1“

Комбинации в случае (1):

$$C_1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560 \text{ чисел}$$

Комбинации в случае (2):

$$C_2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 5/1 \cdot 4/1 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4} = 1120 \text{ чисел}$$

Итого: $C_1 + C_2 = 560 + 1120 = 1680$ чисел:

Ответ: 1680 чисел.

②

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \cos 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos 11x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin 11x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos 3x = \cos 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(4x) = \cos 4x$$



$$\cos 4x = \cos(-4x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) = 2\sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(4x) = 2\cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Тогда } \sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = 0: \quad 4x + \frac{\pi}{4} = \pi k \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{4} \mid k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Тогда } \sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0: \quad -\sin(4x) = \cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(x \cdot 4) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) \Leftrightarrow x \cdot 4 = 4x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Leftrightarrow$$

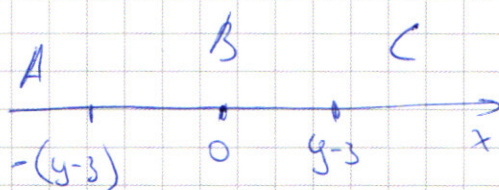
$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{-\pi}{28} + \frac{\pi k}{4}; \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$5) \begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ ((x-4)^2 + (y-3)^2)^2 = a \end{cases} \quad - \text{окр. с центром } 6(4;3) \text{ радиуса } a > 0$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$\boxed{y-3 > 0 \Leftrightarrow y > 3:}$$



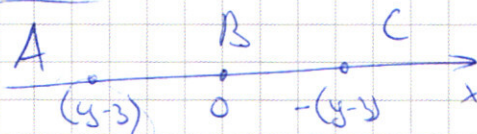
$$A): \quad x < -(y-3) \Rightarrow x < 0$$

$$\cancel{x = y+3} \quad y-3-x-x-y+3=6 \Rightarrow -2x=6 \Rightarrow \underline{x=-3} \quad x < 0$$

$$B): \quad y-3-x+y-3+x=6 \Rightarrow 2y=12 \Rightarrow \underline{y=6}$$

$$C): \quad x=y+3+y-3+x=6 \Rightarrow \underline{x=3} \quad x > 0$$

$$\boxed{y-3 < 0 \Leftrightarrow y < 3:}$$



$$A): \quad \cancel{x = y+3} \quad y-3-x+y-3+x=6 \Rightarrow \underline{x=-3} \quad x < 0$$

$$y-3-x+y+3-x=6 \Rightarrow \underline{x=-3} \quad x < 0$$

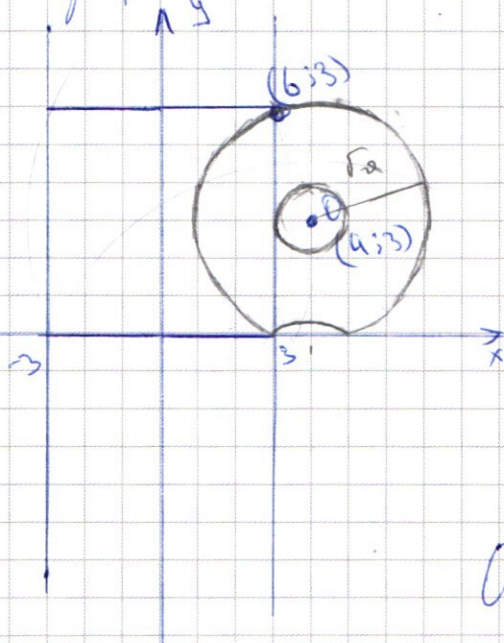
$$B): \quad x-y+3-x-y+3=6 \Rightarrow \underline{y=0}$$

$$C): \quad x-y+3+y-3+x=6 \Rightarrow \underline{x=3} \quad x > 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Итоговый

график:



$$f(x) = |y-3-x| + |y-3+x|$$

$$g(x) = (x-4)^2 + (y-3)^2 = a$$

Или решение при

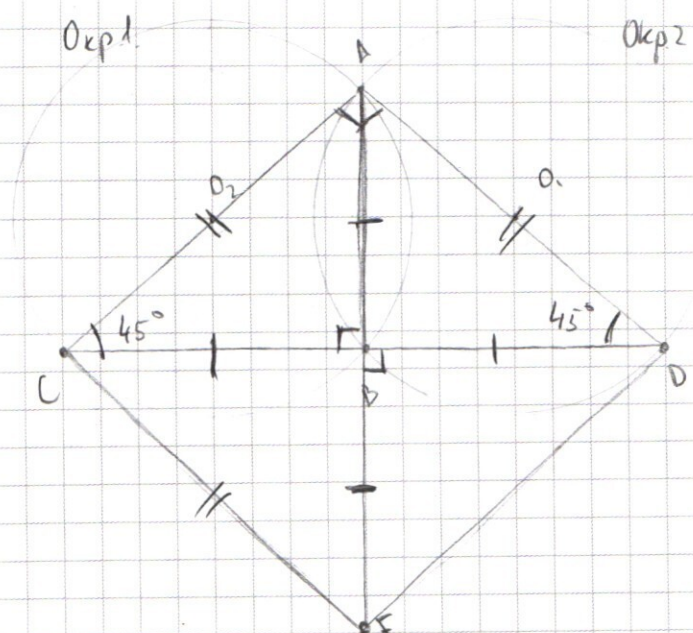
$$5a \in (1; \sqrt{3^2+1}]$$

При $5a \in (0; 1]$ решений нет

При $5a > \sqrt{10}$ решений больше,
или 2

Ответ: $(1; 10]$

6)



- 1) $\angle ACB = \angle ADB$ (отражено на одинаковых дугах в равных окружностях)
- 2) $\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ \Rightarrow \triangle CAD$ - равнобедр.

$$3) \quad \cancel{\angle ABD} \quad \text{Окр } 1 = \text{Окр } 2 \quad \left| \Rightarrow \overset{\vee}{AC} = \overset{\vee}{AD} \right.$$

$$4) \quad \begin{array}{l} \angle ABC - \text{опирается на } \overset{\vee}{AC} \\ \angle ABD - \text{опирается на } \overset{\vee}{AD} \end{array} \quad \left| \Rightarrow \begin{array}{l} \angle ABC = \angle ABD \\ \angle ABC + \angle ABD = 180^\circ \end{array} \right| \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$$

$$5) \quad \angle ABC = 90^\circ \quad \left| \Rightarrow AC - \text{диаметр Окр. 1} \Rightarrow AC = 5 \cdot 2 = 10 \right.$$

$$6) \quad \begin{array}{l} \angle APB = 45^\circ \\ \angle ABD = 90^\circ \end{array} \quad \left| \Rightarrow \angle DAB = 45^\circ \Rightarrow AB = BD = BF \right.$$

$$7) \quad \text{Аналогично для } \underline{BC} \quad \left| \Rightarrow BC = AB. \right.$$

$$8) \quad \begin{array}{l} \angle ABC = \angle FBC = 90^\circ \\ AB = BC = BF \end{array} \quad \left| \Rightarrow \triangle ABC = \triangle BFC \Rightarrow \underline{FC = AC = 10} \right.$$

Ответ: 10

5)

Дано:

$$BC = 6$$

S_{ΔACF} = ?

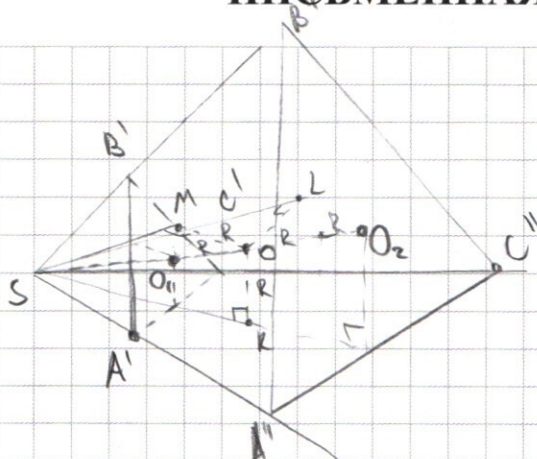
$$\cancel{BC} = 6 \Rightarrow AB = BF = 6$$

$$\Delta S_{ACF} = \frac{BC \cdot AF}{2} = \frac{BC \cdot (AB + BF)}{2} = 6 \cdot 6 = 36$$

Ответ: 36

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4)



Dato: $SA'B'C' = \{$
 $SA''B''C'' = \{$

1) $\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$ по
парам. трех углов $\rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{SA'B'C'}{SA''B''C''} = \left(\frac{A'B'}{A''B''} \right)^2$

2) $\Delta A''B''S$ $\sim \Delta A'B'S$ по 1-му признаку. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{A'B'}{A''B''} = \frac{SA}{SA''}$$

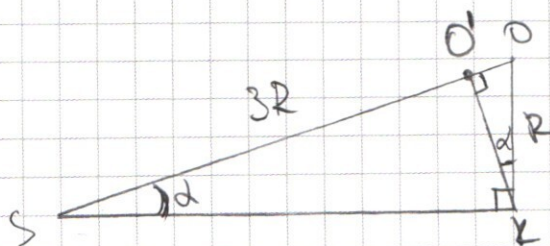
3) $\Delta SO_1A' \sim \Delta SO_2A''$ по парам. трех углов $\Rightarrow$

$$\rightarrow \frac{SA'}{SA''} = \frac{SO_1}{SO_2} \quad | \rightarrow \frac{(SO_1)^2}{(SO_2)^2} = \frac{SA'BC'}{SA''B'C''} = \frac{1}{4} (=)$$

$$\Leftrightarrow \frac{SO_1}{SO_1} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{l} SO_1 = SO - R \\ SO_2 = SO + R \end{array} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{SO = 3R}}$$

Выводный рисунок:



$$\sin \alpha = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\angle KGO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

Дир: (ABC) сечение, проходящее чрез K, M, L

1) $(ABC) \parallel (A'B'C')$ т.к. $(ABC) \perp SO, (A'B'C') \perp SO$.

$$2) \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{(SO')^2}{(SO)^2}$$

$$OO' = R \cdot \sin \alpha = \frac{1}{3} \cdot R \Rightarrow SO' = 3R - \frac{1}{3}R$$

~~$$\left(\frac{SO'}{SO}\right)^2 = \left(\frac{8R}{9R}\right)^2 = \frac{64}{81} \Rightarrow S_{ABC} = S_{A'B'C'} = \frac{64}{81} S_{ABC}$$~~

~~$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{64}{81} S_{ABC}$$~~

~~Ответ:~~

$$\left(\frac{SO'}{SO}\right)^2 = \left(\frac{3R - \frac{1}{3}R}{2R}\right)^2 = \left(\frac{8R}{6R}\right)^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = S_{A'B'C'} \cdot \frac{16}{9} = 16/9$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$

$$S_{ABC} = 16/9$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \cos 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 11x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 11x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x = \cos 4x$$

$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) - \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 4x \Leftrightarrow = \sin(\frac{\pi}{2} - 4x) =$$

$$\Leftrightarrow \cos(11x + \frac{\pi}{4}) - \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 4x - \sin 4x = -\sin(4x - \frac{\pi}{2})$$

$$\cos(7x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 4x + \cos(4x) =$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos 4x =$$

$$= 2 \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) \cdot \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos(7x + \frac{\pi}{4} + 4x) - \cos(7x + \frac{\pi}{4} - 4x) =$$

$$= 2 \cos(7x + \frac{\pi}{4}) \cdot \sin(4x)$$

$$\cos(7x + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos 4x = \sin(7x + \frac{\pi}{4}) \cdot \sin 4x - \cos(7x + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos x - \sin \dots$$

$$= 2 \cos$$

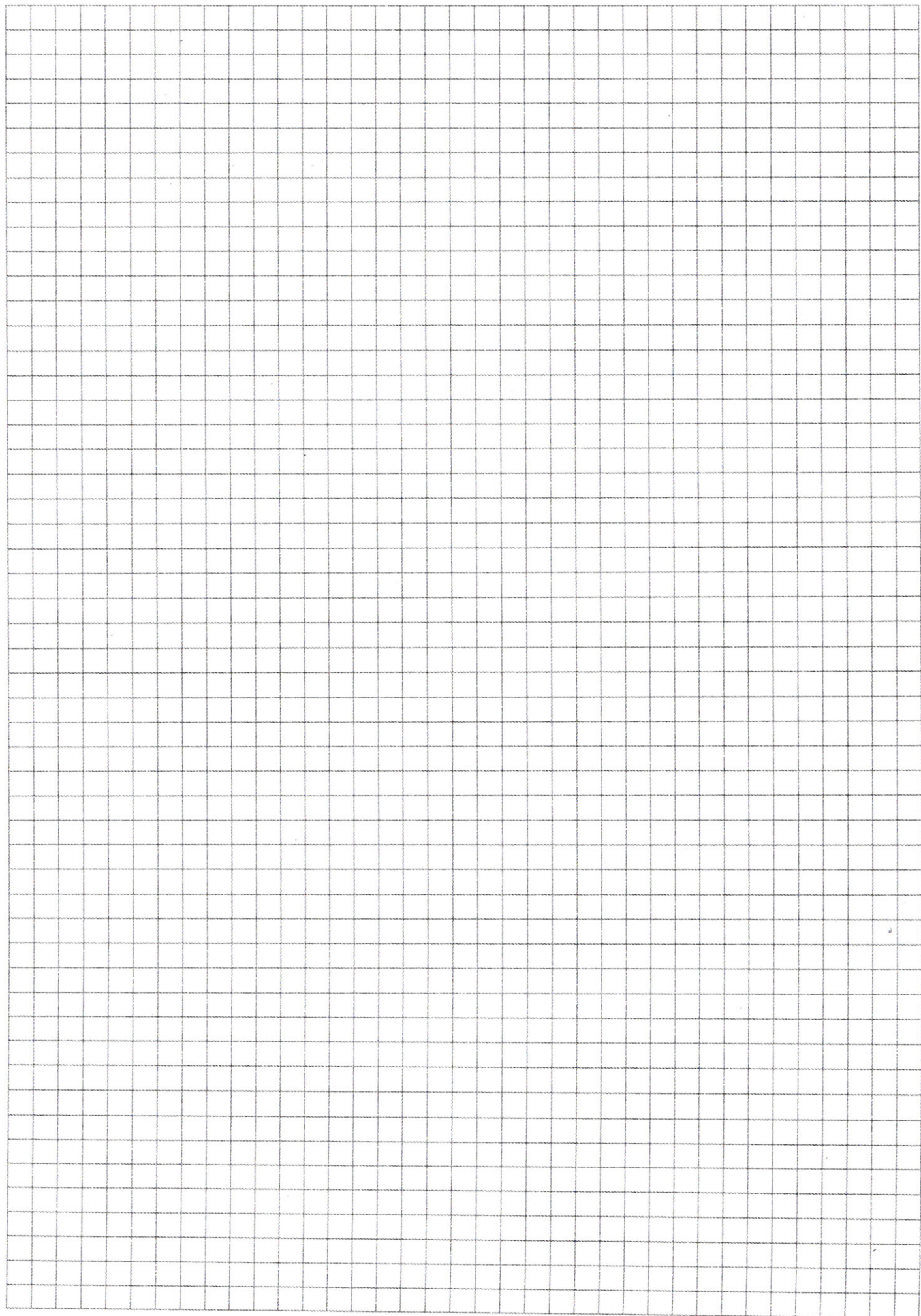
$$- 2 \sin(7x + \frac{\pi}{4}) \cdot \sin 4x = 2 \cos(7x + \frac{\pi}{4}) \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) \neq 0$$

$$\Rightarrow \sin 4x = -\cos(7x + \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \sin 4x = \sin(\frac{\pi}{4} - 7x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{4} - 7x + 2\pi k \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \Leftrightarrow x(x-4) - 3y(y-4) - 2xy = 0$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{1/5} = y^{2/5} \log x \quad \Rightarrow \quad y^{5/5} \cdot x^{-1/5} = y^{2/5} \log x$$

$$\Rightarrow \frac{y^{5/5}}{y^{2/5}} = x^{1/5} \Leftrightarrow$$

$$5/5 \log x - 2/5 \log x = \log \frac{x^3}{y^5} \quad y^{1/5} \frac{x^3}{y^5} = x^{1/5}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{1/5} = y^{2/5} \log x \quad y^{5/5} = y^{2/5} \cdot x^{1/5}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sin\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

$$\sin\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) = \cos 4x$$

$$\left(\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \left(\sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2} =$$

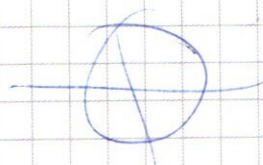
$$= 2 \sin(4x) \cdot \cos(7x + \pi/4) =$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos(7 + \pi/4) = \cos\left(\frac{14 + \pi/2}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi/2 - 14}{2}\right) =$$

$$= \cos(14x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 14x\right) = -\sin\left(14x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \left(\sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos 14x - \sin 14x \cdot \cos \frac{\pi}{2}\right)$$



$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ((y-3)^2 - x^2) = 6 \Leftrightarrow y^2 - 6y + 9 - x^2 = 6 \Leftrightarrow y^2 - x^2 - 6y = -3 \Leftrightarrow \\ \text{окр. } p \in \mathbb{R}, \text{ центр } (4; 3) \Leftrightarrow y(y-6) - x^2 = -3 \end{cases}$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

При $x > y-3$
 $x > 3-y$

$$x > y-3$$

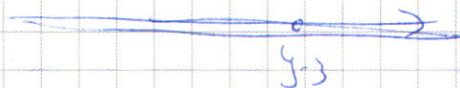
$$x < 3-y$$

$$(y-3)^2 - x^2$$

$$x > y-3$$

~~и~~

$$x - y + 3$$



$$x < y-3$$

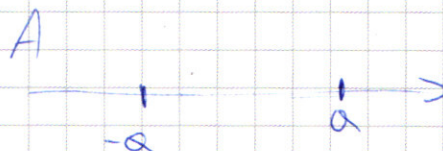
$$y-3 \neq x$$

$$x < 3-y$$

$$x - y + 3$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$|a-b| = |a+b|$$



$$\cancel{b-a = b-a \Leftrightarrow b-b}$$

$$y-3 \geq 0$$

$$x < -y+3$$

$$x - y + 3 \neq x - y + 3 = 6 \Leftrightarrow -2y + 6 = 6 \Leftrightarrow y = 0$$



$$-y+x < y-3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|y-3+x| + |y-3-x| = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x - (y-3)| + |x + (y-3)| = 6$$



A) $x < y-3$:

~~уравнение~~

$y=0$:

$$y-3-x + y+3-x = 0, 0$$

$$-2x = 0, x = 0$$

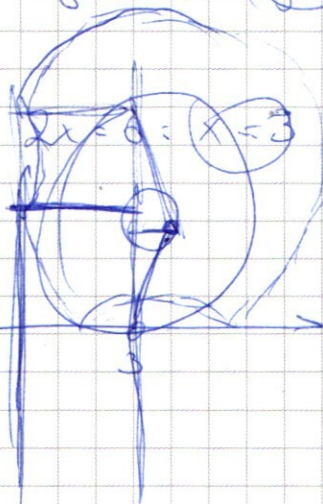
$y=3$:

B) ~~уравнение~~

$$y-3-x + x + (y-3) = 6 \Leftrightarrow 2y-6 = 6 \Leftrightarrow y=6 \Rightarrow x \in [-3; 3]$$

C).

$$x - (y-3) + x + (y+3) = 6 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$



$y < 3$:

A)

B)

$y=3$

$y=3$

$$|x - (y-3)| + |x + (y-3)| = 6 \Leftrightarrow$$

A)

$x=0$

$x < y-3$

B) $(y-3)-x + x + (y+3) = 6 \Leftrightarrow y=6$

C:

