МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + \left(2^{64} - 1\right) x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Разложим 3375 на простые $3375 = 5 \cdot 675 = 5^2 \cdot 135 = 5^3 \cdot 27 = 5^3 \cdot 3^3$

В нашем восьмизначном числе есть 3 пятерки, а так же 3 тройки или одна девятка и одна тройка. Просчитаем эти варианты.

$C_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$ (1 вариант)

$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 3} = 10$

Перемножим и получим $10 \cdot 56 = 560$

Остальные места в нашем числе занимают единицы.

$C_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} = 56$ (2 вариант)

$C_5^1 = 5$

$C_4^1 = 4$

$56 \cdot 4 \cdot 5 = 1120$

сложим $1120 + 560 = 1680$

Ответ: 1680

№5

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x|=6 \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a \end{cases}$$

Напишем как раскрываются модули в первом уравнении

$y-x-3\geq 0 \qquad y\geq x+3$ (тогда 1 модуль раскрывается со знаком плюс)

$y-3+x\geq 0 \qquad y\geq 3-x$ (тогда 2 модуль раскрывается со знаком плюс)

Раскроем модули

$++:\ y-3-x+y-3+x=6$

$2y-6=6\ ;\ y=0$

$+-:\ y-3-x-y+3-x=6$

$-2x=6\ ;\ x=-3$

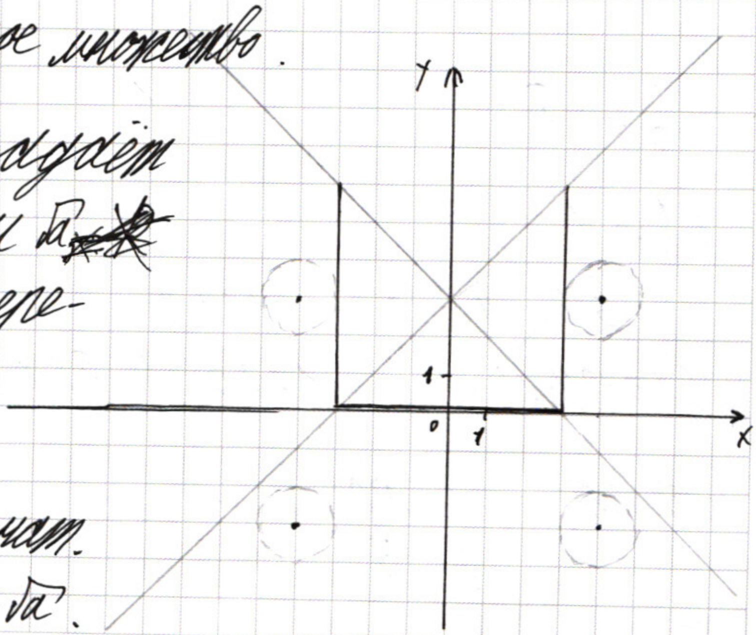
$-+:\ -y+3+x+y-3+x=6$

$2x=6\ ;\ x=3$

$--:\ -y+3+x-y+3-x=6$

$6-2y=6\ ;\ y=0$

Изобразим полученное множество.



Второе уравнение задаёт окружности с радиусом $\sqrt{a}$ ~~...~~ а вследствии того, что переменные в модуле, картина симметрична относительно двух осей координат. Введём радиус окружностей $R=\sqrt{a}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

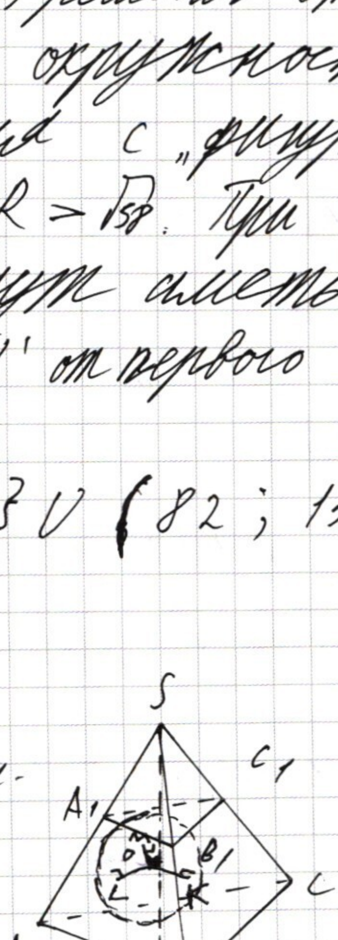
При радиусе окружностей больше единицы и меньше или равным $\sqrt{10}$ верхние (выше $y=0$) окружности имеют 4 пересечения с „фигурой" заданной первым уравнением. А в корне $\sqrt{10}$ также появляются решения от нижних окружностей: $1 < R < \sqrt{10}$ – 4 решения
$\sqrt{10}$ – 4 решения. При $\sqrt{82} > R > \sqrt{10}$ получаем 4 решения только от нижних окружностей, кроме случая $R = 5$, там 3 решения от нижних окружностей. Верхние окружности не будут иметь пересечения с „фигурой" от первого уравнения при $R > \sqrt{58}$. При $\sqrt{82} < R \leq \sqrt{130}$ нижние окружности будут иметь два перепересечения с „фигурой" от первого уравнения.

Таким образом $a \in \{1\} \cup (82; 130]$.

Ответ: $a \in \{1\} \cup (82; 130]$

№4

Обозначим сечения трёхгранного угла ABC и $A_1B_1C_1$



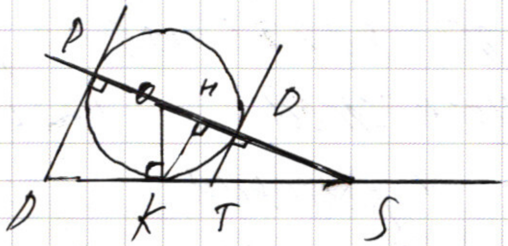
Заметим, что пирамиды $SABC$ и $SA_1B_1C_1$ подобны.

т. к $ABC \parallel A_1B_1C_1$ рёбра пирамид принадлежат тем же прямым.

$S_{ABC} = 4$; $S_{A_1B_1C_1} = 1$. Если пирамиды подобны, то и их основания также.

$S_{ABC} = k^2 S_{A_1B_1C_1}$ $\quad 4 = k^2 \cdot 1 \Rightarrow k=2$

Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью KSO



SK – касательная к окружности, а SO пересекает её. $\overset{(1)}{\Rightarrow}$

(Отметим точки пересечения плоскостей с окружностью D и P, а также точки пересечения плоскостей с прямой SK, как T и R).

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $DS \cdot SP = SK^2$. DS и PS высоты подобных пирамид $\Rightarrow 2DS = SP$ (обозначим $SD = y$)

Тогда $y \cdot 2y = SK^2$ $\quad SK = \sqrt{2}y$

PD – диаметр, т. к SP проходит через O (центр окружности) $\Rightarrow$ $OK = \frac{y}{2}$. Тогда ~~tg~~ $\angle KSO = \frac{(\frac{y}{2})}{\sqrt{2}y} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ $\quad \angle KSO = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

$SO = \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + (\sqrt{2}y)^2} = \sqrt{\frac{y^2}{4} + 2y^2} = \sqrt{\frac{9}{4}y^2} = \frac{3}{2}y$

KH – высота $\triangle SOK$ $\quad S_{SOK} = \frac{(\frac{y}{2})\sqrt{2}y}{2} = \frac{\sqrt{2}y^2}{4}$

$KH = \frac{2S_{SOK}}{OS} = \frac{2\sqrt{2}y^2}{4} \cdot \frac{2}{3y} = \frac{\sqrt{2}}{3}y$

Ответ: $\angle KSO = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2\sin 7x \sin 4x - 2\sin 4x \cos 7x = \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x)$

$-2\sin 4x\,(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$

$\left[\begin{array}{l} \sin 7x + \cos 7x = 0 \\ -2\sin 4x = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x) \end{array}\right.$

$\sin 7x + \cos 7x = 0$ равносильно $\operatorname{tg} 7x = -1$ при $\cos 7x \neq 0$

$7x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7},\ k \in \mathbb{Z}$

$-2\sin 4x = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)$

$-\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x$

введем доп. угол φ $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$-\sin 4x = \sin\frac{\pi}{4}\cos 7x - \cos\frac{\pi}{4}\sin 7x$

$-\sin 4x = \sin(\frac{\pi}{4} - 7x)$, т.к $\sin(\alpha)$ - нечётная функция $-4x + 2\pi t = \frac{\pi}{4} - 7x + 2\pi t,\ t \in \mathbb{Z}$

$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi d,\ d \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}d,\ d \in \mathbb{Z}$

либо $2\pi f - 4x = \pi - (\frac{\pi}{4} - 7x) + 2\pi f,\ f \in \mathbb{Z}$

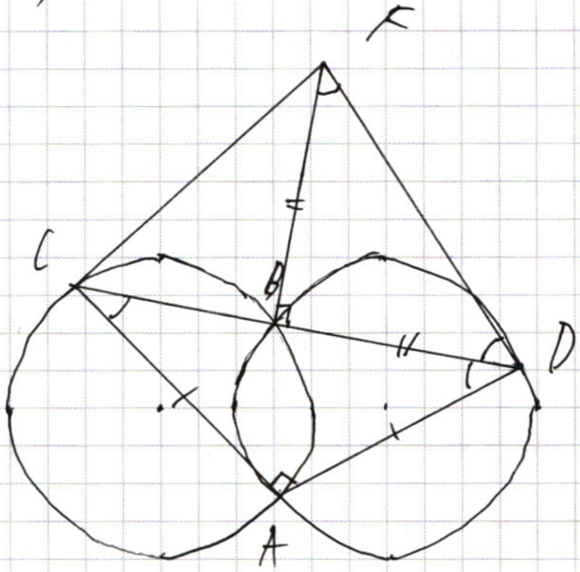
~~$-3x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi f,\ f \in \mathbb{Z};\ x = -\frac{\pi}{4},\ f \in \mathbb{Z}$~~

$\cancel{-11x = \frac{3\pi}{4}}$ $2\pi f - 11x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi f$, $f \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{-3\pi}{44} + 2\pi f$, $f \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$, $k \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi d}{3}$, $d \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{3\pi}{44} + 2\pi f$, $f \in \mathbb{Z}$.

№6



$\angle BCA = \angle BDA$, т.к. они опираются на равные дуги равных окружностей, (дуги равны в силу симметрии) $\Rightarrow \Delta ACD$ - равнобедренный. ΔACD - прямоугольный $\Rightarrow$

$\angle ACD = \angle ADC = 45°$; ΔBDF прямоугольный и равнобедренный $\Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45° \Rightarrow$

$\angle ADF = 90°$

$ACFD$ - прямоугольная трапеция.

$\frac{AB}{\sin\angle ACD} = 2R$ $AB = \frac{\sqrt{2}}{2} 2 \cdot 5 = 5\sqrt{2}$

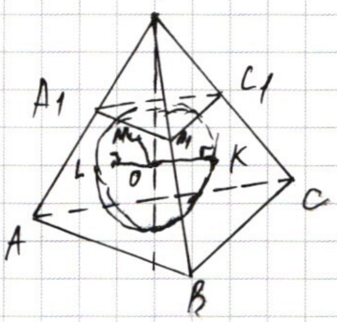
(по теореме синусов.)

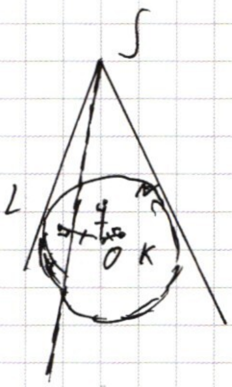
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

$k = 2$

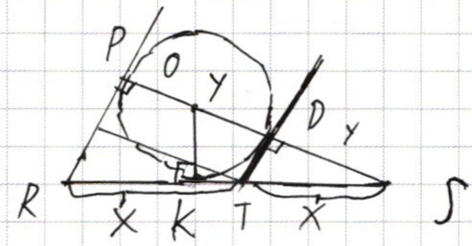




$SK^2 = 2y^2$

$SK = \sqrt{2}y$

$OK = \frac{y}{2}$



$tg\angle KSO = \frac{y_2}{\sqrt{2}y} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

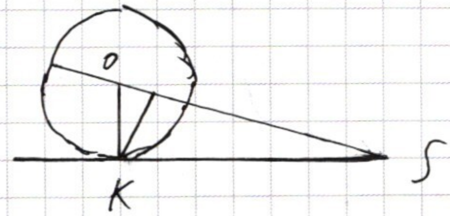
$\frac{TD}{OK} = \frac{x}{OS} = \frac{OD}{SK}$

$\left(\frac{y}{2}\right)^2 + (\sqrt{2}y)^2 = \frac{y}{4}^2 + 2y^2 = \frac{9}{4}y^2$

$\frac{PR}{TD} = 2 =$

$SO = \frac{3}{2}y$

$S_{SOK} = \frac{\frac{y}{2}\sqrt{2}y}{2} = \frac{\sqrt{2}y^2}{4}$



$S = h \cdot OS\,\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{\sqrt{2}y^2}{4} = h\,\frac{3}{2}y\,\frac{1}{2}$

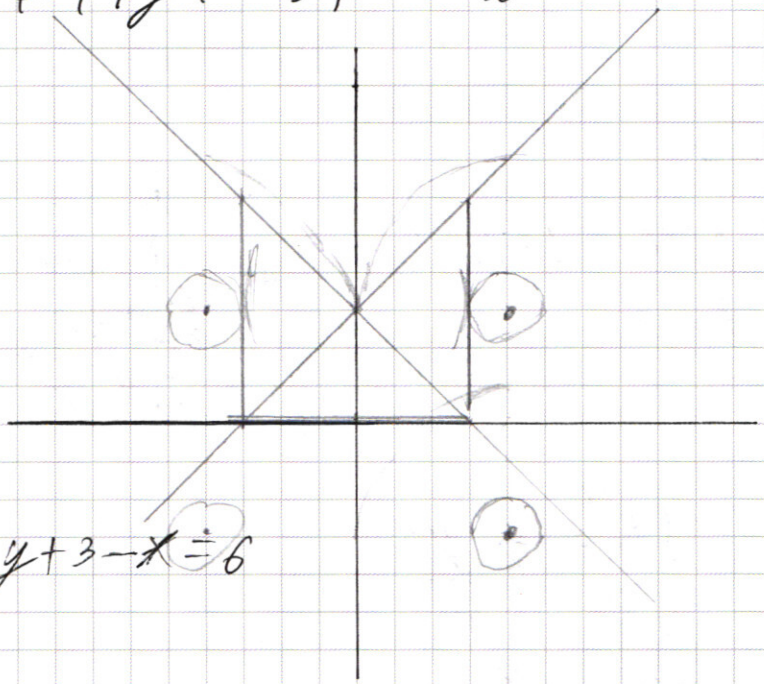
$\sqrt{2}y^2 = 3hy$ $\qquad h = \frac{\sqrt{2}}{3}y$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$



$y - x = 3 \qquad y = x+3$

$y + x = 3 \qquad y = 3 - x$

$++:\ y - 3 - x + y - 3 + x = 6$

$2y - 6 = 6$

$y = 0$

$+-:\ \cancel{y - 3x}\ y - 3 - x - y + 3 - x = 6$

$-2x = 6$

$x = -3$

$-+:\ -y + 3 + x + y - 3 + x = 6$

$2x = 6$

$x = 3$

$--:\ -y + 3 + x - y + 3 - x = 6$

$6 - 2y = 6$

$y = 0$

$\sqrt{10}$

5

7

$\sqrt{49+9} = \sqrt{58}$

$\sqrt{81+49} = \sqrt{130}$

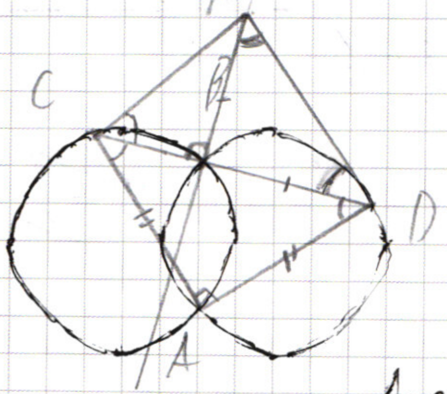
Два случая $d^2 = 1$ и $d^2 = 130$

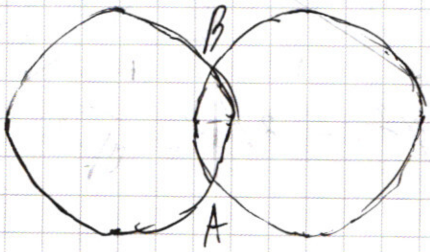
$\sqrt{81+1} = \sqrt{82}$

$\sqrt{58} \le d^2 \le \sqrt{130}$

№6.

а)





~~ACFD — квадрат.~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $3375 = 5 \cdot 675 = 5^3 \cdot 3^3$

$3375 : 5 = 675$, $675 : 5 = 135$, $135 : 5 = 27$

$C_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$

560

$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 3} = 10$

Остальные единицы.

Или

$C_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} = 56$

$C_5^1 = \frac{5!}{4!} = 5$

$C_4^1 = 4$

$56 \cdot 5 \cdot 4 = 1120 = 56 \cdot 20 = 1120$

Ответ: $560 + 1120 = 1680$

№2 $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$

$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$

$\cos 14x = \cos^2 7x - \sin^2 7x$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$

$\sin 7x + \cos 7x = 0$? А пока перенесём в одну сторону.

$\cancel{\sqrt{2}}$ $(\sin 7x + \cos 7x)(\sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x) + 2 \sin 4x) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$-2\sin 4x\,(\sin 7x+\cos 7x)=\sqrt{2}\,(\cos 7x-\sin 7x)(\cos 7x+\sin 7x)$

$\cos(7x+4x)-\cos(7x-4x)=\cos 7x\cos 4x-\sin 7x\sin 4x-$

$-(\cos 7x\cos 4x+\sin 7x\sin 4x)=-2\sin 7x\sin 4x$

$(\sqrt{2}\cos 7x-\sqrt{2}\sin 7x+2\sin 4x)=0$

$-\sin 4x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x=\sin\frac{\pi}{4}\cos 7x-\cos\frac{\pi}{4}\sin 7x$

$-\sin 4x=\sin(\frac{\pi}{4}-7x)$ $\qquad -4x=\frac{\pi}{4}-7x$

$3x=\frac{\pi}{4}$

$\sin(7\alpha-4\alpha)-\sin(7\alpha+4\alpha)=\sin 7\alpha\cos 4\alpha-\cos 7\alpha\sin 4\alpha-\sin 7\alpha\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\cos 7\alpha$

№3

$$\begin{cases}\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}=y^{2\lg xy}\\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0\end{cases}$$

$(x-2)^2-4-\underbrace{(\sqrt{3}y-\sqrt{12})^2}_{3y^2-12y+12}+12-2xy=0$

$x-\sqrt{3}y=u \qquad xy=v$

$u^2=x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2$

$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}=y^{2\lg x}\,y^{2\lg y}$

$y^{5\lg x}=y^{2\lg x}\,y^{2\lg y}\,x^{\lg x}$

$y^{3\lg x}=y^{2\lg y}\,x^{\lg x}$

$y^{3\lg x-2\lg y}=x^{\lg x}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)