МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФ[

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Произведение цифр числа – $16875 = 3^3 \cdot 5^4$. Заметим, что в этом числе не может использоваться цифра 0 (иначе произведение равно 0), все чётные цифры (иначе произведение чётно) и цифра 7 (иначе пр-ие $\vdots$ 7). Можно использовать только цифры 1, 3, 5, 9. При этом цифра 5 встретится ровно 4 раза. (Это единственная цифра, дающая делимость на 5.) Тогда произведение 4 оставшихся цифр равно 3^3, и эти цифры – 1, 3 или 9. Рассмотрим все их расстановки по кол-ву использованных девяток:

1) без 9: $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$ – 4 варианта расстановки,

2) с одной 9: $3^3 = 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$ – $C_4^2 \cdot 2 = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 2 = 12$ вариантов

3) с двумя 9 или более – такие пр-ия $\geqslant 3^4$.

Всего 16 вариантов. А кол-во вариантов выбрать 4 места из 8 для цифр, не равных 5, равно $C_8^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot 7 \cdot 5 = 70$. Итого $16 \cdot 70 = 1120$ вариантов составления такого числа.

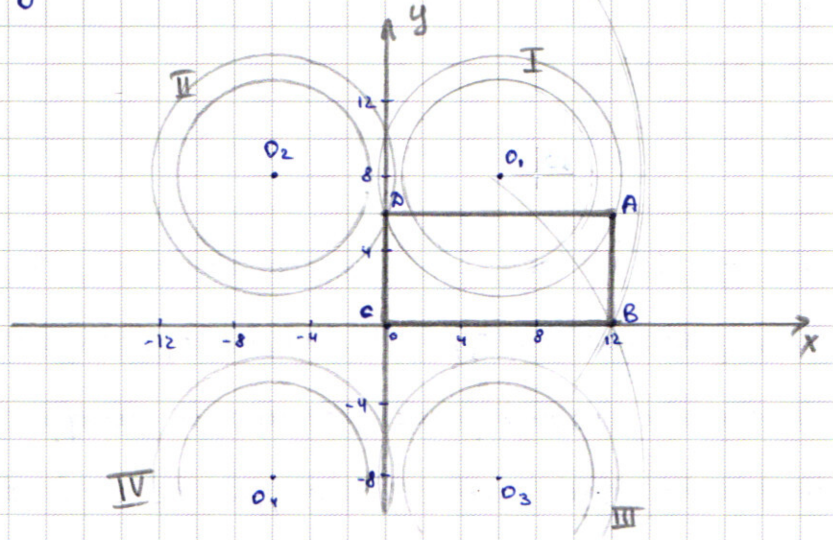
Ответ: 1120.

№5.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a. \end{cases} \qquad a \geqslant 0.$$

Заметим, что первое уравнение – уравнение прямоугольника на коорд. плоскости с вершинами (0;0); (12;0); (12;6); (0;6), а второе уравнение – уравнение совокупности 4 окружностей с центрами (± 6; ± 8)

и равными радиусами $R = \sqrt{a}$. Решим систему графическим методом.



Заметим, что точки пересечения окр-стей и пр-ков могут совпадать.

Для каждой окружности рассмотрим критические значения радиусов, когда они начинают или заканчивают иметь общие точки с пр-ком.

окр-сти	R_{min}	R_{max}
I	2	O_1C
II	O_1A	O_2B
III	8	O_3A
IV	O_1C	O_4A

(здесь и далее имеются в виду именно длины отрезков O_1C, O_1A и др.)

Теперь с помощью метода интервалов рассмотрим кол-во решений (точек) для всех значений R:

R	2	$(2; O_1A)$	O_1A	$(O_1A; 8)$	8	$(8; O_4C)$	O_4C	$(O_1C; O_3A)$	O_3A	$(O_3A; O_2B)$	O_2B	$(O_2B; O_4A)$	O_4A
кол-во точек	1	2	2	3	4	4	3	5	4	3	2	2	1

При $R < 2$ и $R > O_4A$ решений нет. Рассмотрим по-подробнее случаи с 2 точками:

1) при $R \in (2; O_1A]$ окружность с центром O_1 пересекает пр-к 2 раза на отр-ке DA; другие окр-сти с ним общих точек не имеют.
(кроме случая $R = O_1A$, где окр-сть II пер. пр-к в точке D)

2) при $R \in [O_2B; O_4A)$ окружность с центром O_4 пересекает пр-к 2 раза, причём при $R = O_2B$ точка B лежит и на окр-сти с ц. O_2, и на окр-сти с ц. O_4. В других случаях окр-сти I, II, III пр-к не пересекают.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

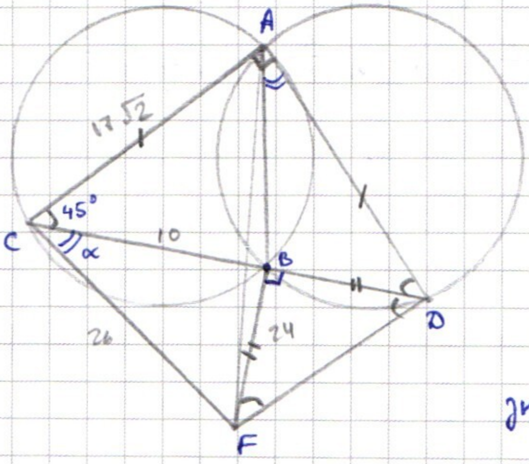
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$O_1A=\sqrt{36+4}=2\sqrt{10}$; $O_2B=\sqrt{64+324}=2\sqrt{97}$; $O_4A=\sqrt{196+324}=2\sqrt{130}$.

$a=R^2$ $\quad R^2\in(2;\,2\sqrt{10}]\cup[2\sqrt{97};\,2\sqrt{130})\Rightarrow a\in(4;\,40]\cup[388;\,520)$

Ответ: $a\in(4;\,40]\cup[388;\,520)$.

№6.



$r=13$
$BF=BD$
$BF\perp CD$
$\angle CAD=90^\circ$
CF – ? $\quad S_{ACF}$ – ?

а) Заметим, что по т. синусов $\dfrac{AC}{\sin\angle CBA}=\dfrac{AD}{\sin\angle ABD}=2r$

Т.к. $\angle CBA+\angle ABD=180^\circ$ $\sin\angle CBA=\sin\angle ABD$,

значит $AC=AD$. $\triangle ACD$ и $\triangle BFD$ – прямоуг. и равноб., их острые углы – по 45°.

$\triangle CAD\sim\triangle FBD\Rightarrow\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{BD}{FD}\Rightarrow\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{CD}{FD}\Rightarrow\triangle ABD\sim\triangle CFD$, ведь $\angle ADB=\angle CDF$.

Значит $\dfrac{CF}{AB}=\dfrac{DF}{DB}=\sqrt{2}$. По т. синусов в $\triangle ABC$: $\dfrac{AB}{\sin 45^\circ}=2r=26\Rightarrow$

$\Rightarrow AB=26\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=13\sqrt{2}$. $\quad CF=\sqrt{2}\cdot AB=13\cdot 2=26$.

б) $BC=10$. Из подобия $\triangle CFD$ и $\triangle ABD$ $\angle FCD=\angle BAD$

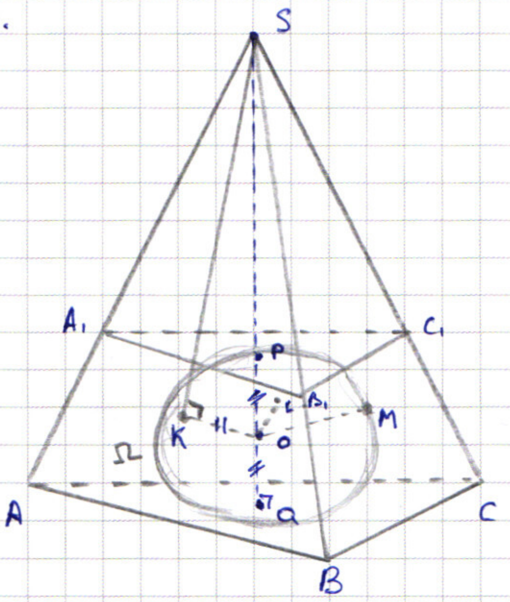
$BF=\sqrt{26^2-10^2}=24\Rightarrow CD=34\Rightarrow AC=\dfrac{CD}{\sqrt{2}}=17\sqrt{2}$. Пусть $\angle BCF=\alpha$.

$\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$, $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$. $\sin(\alpha+45^\circ)=\sin\alpha\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\cos\alpha\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{12+5}{13}\right)=\dfrac{17\sqrt{2}}{26}$.

$S_{ACF}=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot CF\cdot\sin\angle ACF=\dfrac{1}{2}\cdot 17\sqrt{2}\cdot 26\cdot\dfrac{17\sqrt{2}}{26}=\dfrac{17^2\cdot 2}{2}=17^2=189$.

Ответ: 26; 189.

№4.



Пусть P, Q - точки касания сферы с плоскостями, перпендикулярными SO. Тогда $OQ = OP = R$. $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$ $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ т.к. эти тр-ки гомотетичны отн-но точки S. $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = k^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow k = \frac{2}{3}$. SP и SQ - высоты в пирамидах $SA_1B_1C_1$ и $SABC$. При той же гомотетии с центром S P переходит в Q. Значит, $\frac{SP}{SQ} = \frac{2}{3} = \frac{SP}{SP+2R} \Rightarrow SP = 4R$.

$SO = 5R$; $\angle OKS = 90^\circ \Rightarrow \angle OSK = \arcsin\frac{OK}{OS} = \arcsin\frac{R}{5R} = \arcsin\frac{1}{5}$.

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\frac{1}{5}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① a b c d e f g h $abcdefgh = 16875 = 3^3 \cdot 5^4$

16875	5
3375	5
675	5
135	5
27	3^3

Нельзя исп. цифры: 0, 2, 4, 6, 7, 8.

Можно исп.: 1, 3, 5, 9.

Пятёрок ровно 4.

625×27: 4375, 1250, 16875

Рассм. ост 4 цифры. Их произв - 3^3 — — — — → 4 + 12 + 6 = 22 вар.

$16 \times 70 = 1120$

1) без 9: 3·3·3·1 — 4 вар.

2) с одной 9: 9 3 1 1 $C_4^2 \cdot 2 = \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot2} = 6\cdot2 = 12$ вар

3) с двумя 9: 9 9 1 1 $C_4^2 = 6$ вар

Кол-во вар. выбрать 4 места для цифр, не равных 5, из 8:

$C_8^4 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1} = 2\cdot7\cdot5 = 70$. Итого $70\cdot22 = 1540$ вар.

$22 \times 70 = 1540$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt2 \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\oplus\cos\ominus$

$\sin\alpha + \sin\beta = -2\sin\oplus\sin\ominus$

$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt2\cos 10x = -2\sin 5x\sin 2x$

$2\cos 5x\cos 2x + 2\sin 5x\sin 2x = \sqrt2(\cos^2 5x - \sin^2 5x)$

$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt2\cos^2 5x + 2\sin 5x\sin 2x + \sqrt2\sin^2 5x = 0$

$\cos 5x(2\cos 2x - \sqrt2\cos 5x) + \sin 5x(2\sin 2x + \sqrt2\sin 5x) = 0$

$2(\cos 5x\cos 2x + \sin 5x\sin 2x) + \sqrt2(\sin^2 5x - \cos^2 5x) = 0$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$2\cos 3x + \sqrt2$

$2(\cos 5x\cos 2x + \sin 5x\sin 2x) = \sqrt2\cos 10x$

$2\cos 3x = \sqrt2\cos 10x$

$2\cos 3x = \sqrt2(2\cos^2 5x - 1)$

$2\cos 3x = 2\sqrt2\cos^2 5x - \sqrt2$

$\boxed{\cos 3x = \frac{\sqrt2}{2}\cos 10x}$

$\sin 3x = \sqrt{1 - \frac12\cos 10x}$

$\cos 7x + \frac{\sqrt2}{2}\cos 10x - \sqrt2\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos 7x - \frac{\sqrt2}{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos 7x - \frac{\sqrt2}{2}\cos(7x + 3x) = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos 7x - \frac{\sqrt2}{2}(\cos 7x\cos 3x - \sin 7x\sin 3x) = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos 7x - \frac{\sqrt2}{2}\cos 7x\cos 3x + \frac{\sqrt2}{2}\sin 7x\sin 3x = \sin 7x + \sin 3x$

a b c d

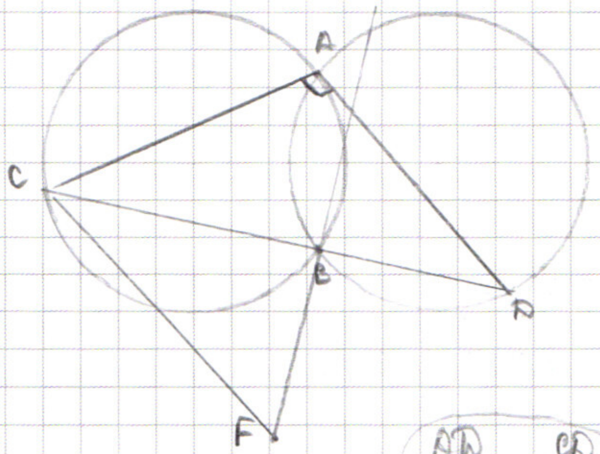
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

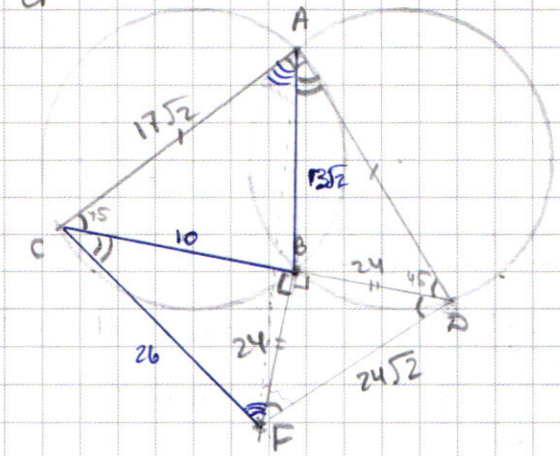
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$r = 13$

$BF = BA$

$CF - ?$





$B \in CD \Rightarrow$

$\Rightarrow \smile AC = \smile AD \Rightarrow AC = AD$

$\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{CD}{FD}$

Поворот D, $\angle CDA \Rightarrow$ $DA \to DB$; $AC \to BF$; $CD \to FD$

точки: $A \to B$; $C \to F$ $\Rightarrow \angle ADC = \angle CDF$

$\triangle ABD \sim \triangle CFD$

$FD = BD \cdot \sqrt{2}$

$CF = AB\sqrt{2}$

$\angle AH = 90°$

$AC \parallel FD$

$AB - ?$

по т. син $\dfrac{AB}{\sin 45} = 2 \cdot 13$ $AB = 26 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 13\sqrt{2}$

$\angle ACF = \angle ABC$

$CF = 26$

$\boxed{BC = 10}$ $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{CF}$ $\triangle ACF \sim \triangle ABC$

$AC = \sqrt{AB \cdot CF} = \sqrt{13 \cdot 13 \cdot 2\sqrt{2}}$

$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AC}{CF}$ $AC = \dfrac{26 \cdot 13\sqrt{2}}{10} = \dfrac{13^2\sqrt{2}}{5}$

$CD = \dfrac{13^2 \cdot 2}{5}$

$S_{ABC} = \dfrac{\frac{13^2\sqrt{2}}{5} \cdot 13\sqrt{2} \cdot 10}{4 \cdot 13} = \dfrac{13^2 \cdot 2 \cdot 10}{20} = 13^2$

$\dfrac{S_{ABC}}{S_{FAC}} = k^2 = \left(\dfrac{BC}{CF}\right)^2 = \left(\dfrac{10}{26}\right)^2 = \left(\dfrac{5}{13}\right)^2 \Rightarrow S_{FAC} = S_{ABC} \cdot 13^2 / 5^2 = \dfrac{13^4}{5^2}$

$\alpha + \beta + \gamma + \alpha = 180$

$BC = 10$ $AB = 13\sqrt{2}$ $CF = 26$

$\dfrac{10}{\sin \angle CAB} = \dfrac{13\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{2}} = 26$

$\sin \angle CAB = \dfrac{5}{13}$

$BF = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$

$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$

$576 = 24^2$

$CD = 34$ $AC = \dfrac{34}{\sqrt{2}} = 17\sqrt{2}$

$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$

$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$ $\sin \alpha = \dfrac{24}{26}$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a - \frac{\sqrt{2}}{2} ab + \frac{\sqrt{2}}{2} cd - c - d = 0$ $\qquad a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$

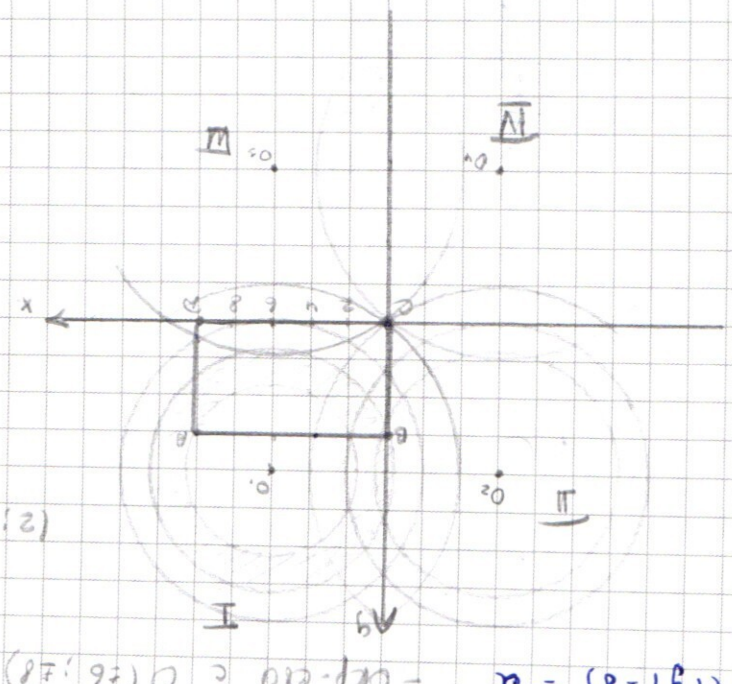
$(\cos 7x - \sin 7x) + (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 10x$

$a - b + c - d = \sqrt{2} (ac - bd)$

$a - b + c - d - \sqrt{2} ac + \sqrt{2} bd = 0$

$a - \sqrt{2} ac + c = b - \sqrt{2} bd + d$

$\cos 7x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x + \cos 3x = \sin 7x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x + \sin 3x$



5. $\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & \text{— прям-к} \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & \text{— окр-сти с } O(\pm 6; \pm 8) \end{cases}$

ровно 2 реш.

$R = \sqrt{a}$

R	реш.
<2	0
2	1
$[2; OA] \cup (OA, OB)$	2
$[OB; 4)$	2 (совп.)
8	3
...	
O_1C	3

(12;0)
(0;6)
(12;6)

min R

I 2
II O_2B
III 4
IV O_4C

$|-6| + |-6|$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - 8y + 8 - x^2 - 4x - 4 = 4$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$x = 1$ $\qquad y \geqslant 3 + 4\cdot 3^{81}$

$$y < 85 + (3^{81} - 1) = 84 + 3^{81}$$

Решим нер-во: $3^x + 4\cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x$

$$3^x + 4\cdot 3^{81} - 3^{81}x + x - 85 < 0$$

$$3^x + 3^{81}(4 - x) + x - 85 < 0$$

$x = 81$ $\qquad 3^{81}(5 - x) + 81 - 85 = 3^{81}(-\ldots) - 4 < 0$

целые пары (x, y)

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

$$O_1A = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$O_2B = \sqrt{64 + 18^2}$$

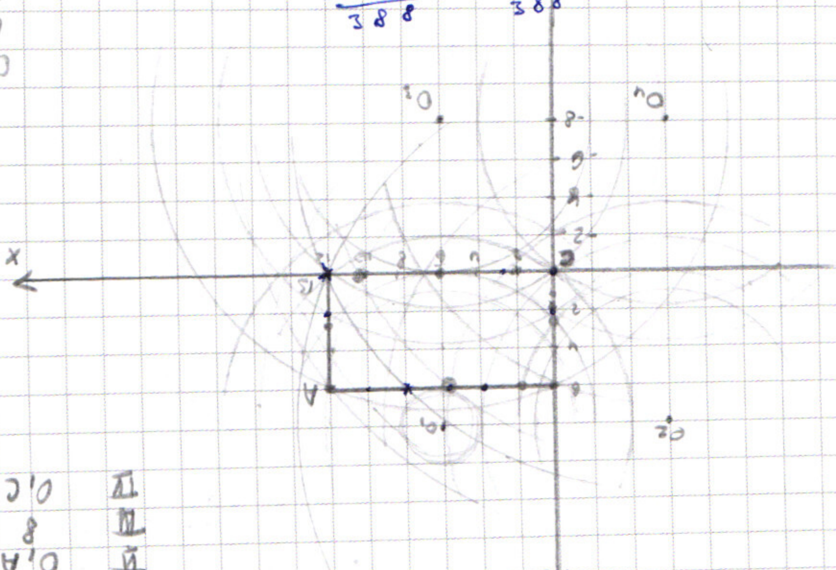
$18 \cdot 18 = 324$, $324 + 64 = 388$

$18^2 + 14^2$

$14 \cdot 14 = 196$, $196 + 324 = 520$

$388 \,|\, 4$: 97

$520 \,|\, 4$: 130



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

всего: 35

$\cos 3x = \cos\frac{\pi}{4}\cos 10x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 10x$

$\cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 10x = 2\sin 5x \sin 2x$

$\cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 2\sin^2 5x) = 2\sin 5x \sin 2x$

$\cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sin 5x \sin 2x - \sqrt{2}\sin^2 5x = \sin 5x\,(2\sin 2x - \sqrt{2}\sin 5x)$

$\sin 3x = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\cos 10x}$

$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$

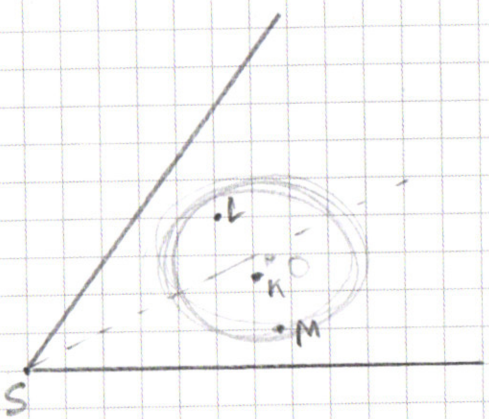
$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{2\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$

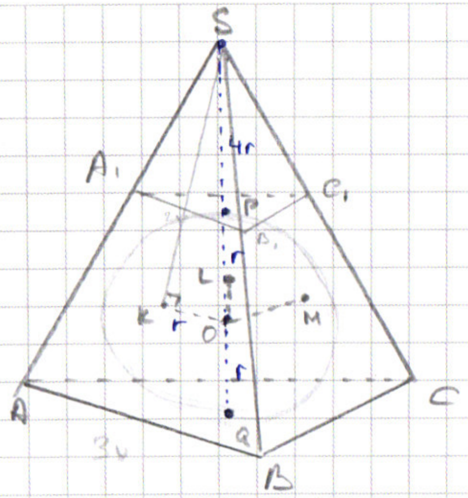
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)





$S_{ABC} = 9 \quad S_{A_1B_1C_1} = 4$

$SQ \perp ABC$

$PQ = 2r \quad SP = 4r$

$\angle OSK: \frac{OK}{OS} = \sin\alpha = \frac{r}{OP+PS} = \frac{r}{5r} = \frac{1}{5}$

$\arcsin\frac{1}{5}$

черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)