МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра(
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |x-6-y|+|x-6+y|=12 \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases}$$

Рассмотрим первое ур-ие системы; существует 4 случая раскрытия модулей:

1) $x-6\geq y$ и $x-6\geq -y$, тогда:

$x-6-y+x-6+y=12$

$2x=24$ $x=12$, а от y не зависит (только по ограничениям).

$12-6\geq y$ и $12-6\geq -y \Rightarrow 6\geq y$ и $y\geq -6$. То есть здесь решения будут $x=12$ и $y\in[-6;6]$

2) $x-6\geq y$ и $x-6\leq -y$, тогда:

$x-6-y+6-x-y=12$

$-2y=12$

$y=-6$, а x ограничивается только из раскрытия модуля:

$x-6\geq -6$ и $x-6\leq 6 \Rightarrow x\geq 0$ и $x\leq 12$. То есть здесь решения будут: $y=-6$ и $x\in[0;12]$

3) $x-6\leq y$ и $x-6\geq -y$, тогда:

$6+y-x+x-6+y=12$

$2y=12 \Rightarrow y=6$

По x ограничения такие: $x-6\leq 6$ и $x-6\geq -6$

см. на стр. 2

$x \le 12$ и $x \ge 0$. То есть решение $y=6$ и $x \in [0; 12]$

4) $x-6 \le y$ и $x-6 \le -y$, тогда:

$-x+6+y-x+6-y=12$

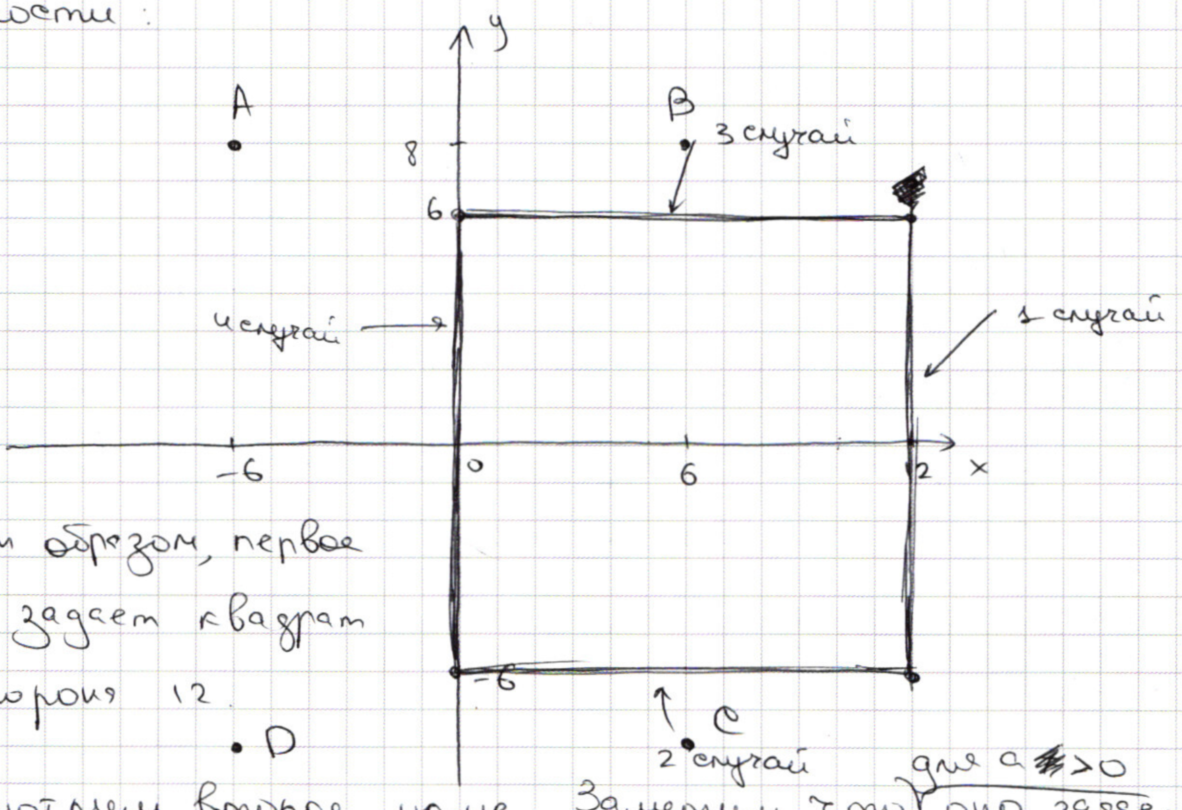
$-2x=0$

$x=0$

По y ограничения такие: $-6 \le y$ и $y \le 6$

То есть решения такие: $x=0$ и $y \in [-6; 6]$

Изобразим множество этих решений в координатной плоскости:



Таким образом, первое ур-ие задает квадрат со стороной 12.

Рассмотрим второе ур-ие. Заметим, что для $a>0$ оно задает окружность с радиусом $\sqrt{a}$, при решениях когда $x \ge 0$ и $y \ge 0$, и центром $(6; 8)$. При $x \le 0$ и $y \ge 0$ оно задает окружность с радиусом $\sqrt{a}$ и центром $(-6; 8)$. При $x \le 0$ и $y \le 0$ оно задает окружность с радиусом $\sqrt{a}$ и центром $(-6; -8)$. При $x \ge 0$ и $y \le 0$ оно задает окружность с радиусом $\sqrt{a}$ и

см. стр. 3

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

центром $(12; -6)$. При $a=0$ оно задаёт точки ~~[illegible]~~; ~~[illegible]~~; $(6; 8)$; $(6; -8)$; $(-6; 8)$; $(-6; -8)$.

Таким образом, случай $a=0$ сразу не подходит, очевидно, т.к. условие про 2 решения не выполняется. При $\sqrt{a}<2$ ни одна из окружностей не касается квадрата.

При $\sqrt{a}=2$ $(a=4)$ окружности с центрами B и C касаются квадрата, а окружности с центрами A и D не имеют общих точек с квадратом. В силу того, что B и C симметрично находятся относительно квадрата, если одна будет касаться/~~[illegible]~~ пересекать квадрат, то и другая будет. При наличии общих точек у окружностей с центрами A и D с квадратом, окружности с центрами B и C тоже пройдут через эти точки $(0;6)$ и $(0;-6)$, т.к. A и B равноудалены от $(0;6)$ и также C и D от $(0;-6)$. То есть стоит рассмотреть случай, когда окружности с центрами B и C пересекают квадрат ровно в 2 точках ~~[illegible]~~. То есть обе окружности проходят через точки $(0;0)$ и $(12;0)$. То есть радиус $\sqrt{a}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100} \Rightarrow a=100$.

Далее если радиус становится меньше, то точек пересечения становится больше, очевидно. ~~[illegible]~~ Таким образом, это будет единственным подходящим случаем.

Ответ: 4; 100.

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим второе ур-ие системы:

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$(x+2y)(y-x-4) = 0 \Rightarrow y = x+4$ или $y = -\frac{x}{2}$

Рассмотрим второе ур-ие системы:

$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$

Ограничения: $\begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$

Прологарифмируем обе части:

$\lg\left(\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y}\right) = \lg\left((-x)^{\lg(-xy)}\right)$

$\lg y \cdot (4\lg(-x) - 2\lg y) = (\lg(-x) + \lg y) \cdot \lg(-x)$

↑ т.к. $x<0$

$4\lg y \cdot \lg(-x) - 2\lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg y \cdot \lg(-x)$

$3\lg y \cdot \lg(-x) - 2\lg^2 y = \lg^2(-x)$

$\lg^2(-x) + 2\lg^2 y - 3\lg y \cdot \lg(-x)$

$(\lg(-x) - 2\lg y)(\lg(-x) - \lg y)$

$\left[\begin{array}{l} \lg(-x) = 2\lg y \\ \lg(-x) = \lg y \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lg(-x) = \lg y^2 \\ \lg(-x) = \lg y \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -x = y^2 \\ -x = y \end{array}\right.$

Существует 4 случая:

1) $\begin{cases} -x = y^2 \\ x+4 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y^2 \\ x+4 = y \end{cases} \Rightarrow -y^2 = y - 4 \longrightarrow$

$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

(с «–» не подходит по ограничению $y>0$)

Тогда $x = y - 4 = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}$

См. продолж. на стр. №5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\begin{cases} -x = y^2 \\ y = -\frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow 2y = y^2 \Rightarrow y = 0$ (не подходит по ограничению)

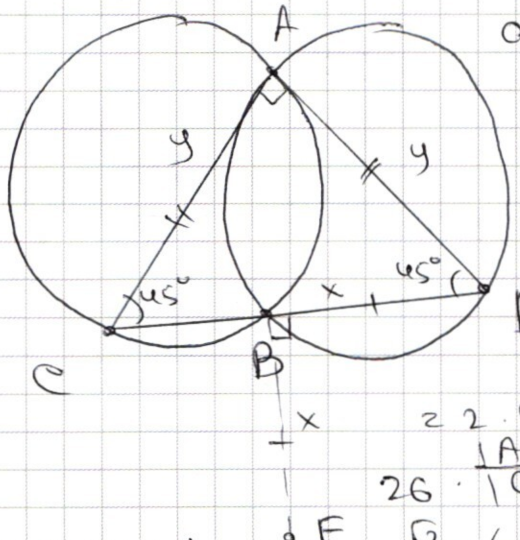
$y = 2 \Rightarrow x = -2y = -4$

3) $\begin{cases} y = x+4 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = -x \\ y = -\frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 = -\frac{x}{2} \Rightarrow x = 0$ (не подходит по ограничению $x < 0$)

Ответ: $\left(\frac{-9+\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right); (-2;2); (-4;2)$

№6



а) По т. синусов в $\triangle ABC$:

$|AB| = 2R \cdot \sin\angle ACB =$

$= 2 \cdot 13 \cdot \frac{|AD|}{|CD|} = 26 \cdot \frac{|AD|}{|CD|}$

По т. синусов в $\triangle ADB$:

$|AB| = 2R \cdot \sin\angle ADB =$

$= 2 \cdot 13 \cdot \frac{|AC|}{|CD|} = 26 \cdot \frac{|AC|}{|CD|}$

$26 \cdot \frac{|AC|}{|CD|} = 26 \cdot \frac{|AD|}{|CD|} \Rightarrow |AC| = |AD|$

$\sin\angle ACD = \sin\angle ADC = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (т.к. углы по $45°$)

$\Downarrow$

$|AB| = 26 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 13\sqrt{2}$

Пусть $|BD| = x$; $|AD| = y$, тогда:

$(|CB| + x)^2 = 2y^2 \Rightarrow |CB| = y\sqrt{2} - x$

$|CF| = \sqrt{|CB|^2 + x^2} = \sqrt{2y^2 + x^2 - 2\sqrt{2}xy + x^2} = \sqrt{2y^2 + 2x^2 - 2\sqrt{2}xy}$

$|CF|^2 = 2y^2 + 2x^2 - 2\sqrt{2}xy$

По т. cos в $\triangle ABD$: $|AB|^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= x^2 + y^2 - xy\sqrt{2} \Rightarrow |CF|^2 = 2|AB|^2 \Rightarrow |CF| = |AB| \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$

$|CF| = \sqrt{2} \cdot 13\sqrt{2} = \underline{26}$

б) $|CB| = 10 = y\sqrt{2} - x$ $\quad |CB|^2 = 2y^2 + x^2 - 2\sqrt{2}xy$ (из предыдущего пункта)

$|CF|^2 = 26^2 = 676 = 2y^2 + 2x^2 - 2\sqrt{2}xy$

$|CF|^2 - |CB|^2 = 2y^2 + 2x^2 - 2\sqrt{2}xy - 2y^2 - x^2 + 2\sqrt{2}xy = x^2 =$

$= 676 - 100 = 576 \Rightarrow x = \sqrt{576} = 24$

$10 = y\sqrt{2} - x = y\sqrt{2} - 24 \Rightarrow y\sqrt{2} = 34 \Rightarrow \underline{y = 17\sqrt{2}}$

~~По т. косинусов в △ABC: |AC|² = |AB|² + |BC|² − 2cos∠ABC · |AB| · |BC| =~~

$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot |CF| \cdot |AC| \cdot \sin\angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot y \cdot$

$\cdot \sin\angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 17\sqrt{2} \cdot \sin\angle ACF$

$\angle ACF = 45^\circ + \angle BCF$

$\sin\angle BCF = \frac{|BF|}{|CF|} = \frac{x}{26} = \frac{24}{26}$, $\cos\angle BCF = \frac{|CB|}{|CF|} = \frac{10}{26}$

$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 17\sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ + \angle BCF) =$

$= 13 \cdot 17\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{10}{26} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{24}{26}\right) = 13 \cdot 17\sqrt{2} \cdot \frac{17\sqrt{2}}{26} =$

$= \frac{13 \cdot 17\sqrt{2} \cdot 17\sqrt{2}}{26} = 17^2 = \underline{289}$

$\Downarrow$

Ответ: а) $|CF| = 26$

б) $S = 289$

продолжение на след. страницах

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x - \sin 7x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 3x - \cos 3x$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x\right) - \sqrt{2}\cos 10x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x\right)$$

$$\sqrt{2}\cos(45^\circ + 7x) - \sqrt{2}\cos 10x = \sqrt{2}\left(-\cos(3x + 45^\circ)\right)$$

$$\cos(45^\circ + 7x) + \cos(3x + 45^\circ) = \cos 10x \quad \text{(поделили на } \sqrt{2})$$

$$\cos(45^\circ + 7x) + \cos(3x + 45^\circ) = \cos(7x + 3x)$$

$$\cos(45^\circ + 7x) + \cos(3x + 45^\circ) = \cos 7x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cdot \sin 7x$$

№1

Т.к. произведение цифр делится на 5, очевидно, одна из цифр – 5. Также не могут участвовать в числе четные цифры, т.к. тогда оно бы заканчивалось на 0. То есть необходимы только нечетные. Заметим, что данное число делится на 3 и на 9 по признаку делимости. (сумма цифр им кратна) Значит в числе есть хотя бы 3 два раза или 9. Число делится на 25, т.к. 16875 : 5 = 3375 => необходима еще одна 5. Также 3375 : 5 = 675 => еще одна 5. Далее 675 : 5 = 135. Далее 135 : 5 = 27. Таким образом в силу того, что только 5 из цифр кратно 5, необходимо, чтобы в этом числе было ~~4~~ четыре пятерки. Произведение оставшихся четырех цифр равно 27. Это

продолж. на след. странице

значит, что из существующих нечетных это может быть 1, 3, 9 (на 7 число 27 не делится). Тогда это комбинация 1, 3, 3, 3 или 1, 1, 3, 9. То есть данное число состоит из одной единицы, четырех 5 и трех троек или 2 единицы, четыре 5, одна 3 и одна 9. Необходимо найти количество таких чисел.

см. продолжение на стр №9

№2

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos(5x+2x) + \cos(5x-2x) - \sqrt{2}\cos(2\cdot 5x) = \sin(5x+2x) +$
$+\sin(5x-2x)$

$\cancel{\cos 5x\cdot\cos 2x - \sin 5x\cdot \sin 2x + \cos 5x\cdot\cos 2x + \sin 5x\cdot\sin 2x -}$
$\cancel{-\sqrt{2}(2\cos^2(5x) - 1) = \cos 5x\cdot\sin 2x + \cos 2x\cdot\sin 5x +}$
$+\sin 5x\cdot\cos 2x - \sin 2x\cdot\cos 5x$

$\cancel{2\cos 5x\cdot\cos 2x - 2\sqrt{2}\cos^2 5x + \sqrt{2} = 2\sin 5x\cdot\cos 2x}$

$\cancel{\cos 5x\cdot\cos 2x - \cos^2 5x\cdot\sqrt{2} = \sin 5x\cdot\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\cancel{\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}\left(\cos^2 5x - \frac{1}{2}\right)}$

$\cos 5x\cdot\cos 2x - \sin 5x\cdot\sin 2x + \cos 5x\cdot\cos 2x + \sin 5x\cdot\sin 2x -$
$-\sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = \cos 5x\cdot\sin 2x + \cos 2x\cdot\sin 5x +$
$+\sin 5x\cdot\cos 2x - \sin 2x\cdot\cos 5x$

$2\cos 5x\cdot\cos 2x - \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2\cdot\cos 2x\cdot\sin 5x$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x)(\cos 5x - \sin 5x)$

$(2\cos 2x - \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x))(\cos 5x - \sin 5x) = 0$

$\sqrt{2}(\sqrt{2}\cos 2x - \cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x - \sin 5x) = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\cos 2x - \cos 5x - \sin 5x = 0\\ \cos 5x - \sin 5x = 0\end{array}\right.$$

продолжение на стр. №9

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим второе ур-ие совокупности:

$\cos 5x - \sin 5x = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x\right) = 0$

$\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in Z$

Рассмотрим первое ур-ие совокупности:

$\sqrt{2}\cos 2x = (\cos 5x + \sin 5x)$

$\sqrt{2}\cos 2x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x\right)$

$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)$

$\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi n, n \in Z \\ 2x = -\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) + 2\pi m, m \in Z \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \\ -3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}, m \in Z \end{array}\right.$

То есть: Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in Z \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}, m \in Z \end{array}\right.$

№ 1 (продолжение)

1) Рассмотрим случай, когда четыре „5", три „3" и одна „1".

Тогда вариантов расстановки единицы существует 8.

Пятерки тут можно расставить таким кол-вом способов: $\frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 35$.

Тройки дальше ставим на незанятые места. То есть таких чисел $8 \cdot 35 = 280$

2) Рассмотрим случай, когда мы расставляем четыре „5", две „1", одну „3", одну „9".

Тогда тройку можно поставить восемью способами, а девятку тогда семью $\Rightarrow$ $8 \cdot 7 = 56$ случаев. Дальше пятерки располагаем $\frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{3\,\cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 15$.

То есть $56 \cdot 15 = 840$ случаев.

Итого: $840 + 280 = 1120$ комбинаций.

В формулах про пятерки пользовались формулой кол-вом перестановок: $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

№7

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Рассмотрим $f_1 = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$; $f_2 = 85 + (3^{81} - 1)x$.

Теперь рассмотрим разность этих ф-ций:

$f_1 - f_2 = 3^x + 4 \cdot 3^{81} - 85 - (3^{81} - 1)x$

$(f_1 - f_2)' = \ln 3 \cdot 3^x - (3^{81} - 1)$ — степенная ф-ия:

Производная $(f_1 - f_2)'$ сначала отрицательная, потом положительная, то есть разность ф-ий сначала убывает, потом возрастает. Рассмотрим три точки

1) $x = 0$ $f_1 = 1 + 4 \cdot 3^{81}$; $f_2 = 85 + (3^{81} - 1) \cdot 0 = 85$.

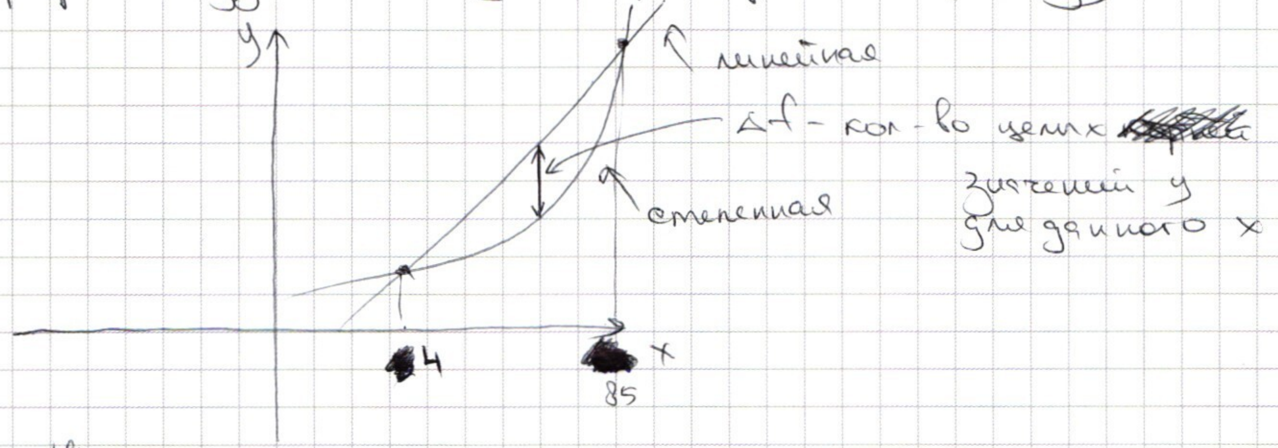
Значит $f_1 > f_2$

2) $x = 5$ $f_1 = 3^5 + 4 \cdot 3^{81}$, $f_2 = 85 + (3^{81} - 1) \cdot 5 =$

$= 80 + 5 \cdot 3^{81}$, то есть $f_2 > f_1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $x=86$ $f_1 = 3^{86} + 4\cdot 3^{81}$; $f_2 = 85 + (3^{81}-1)\cdot 86 = 86\cdot 3^{81} - 1 =$
$= (81+5)3^{81} - 1 = 3^{85} + 5\cdot 3^{81} - 1$. $f_1 > f_2$, то есть
график будет выглядеть примерно так (эскиз):



То есть данные ф-ии имеют 2 точки пересечения.
Точки пересечения:
1) $x_1 = 4$: $f_1 = 3^4 + 4\cdot 3^{81} = 81 + 4\cdot 3^{81}$; $f_2 = 85 + (3^{81}-1)\cdot 4 =$
$= 81 + 3^{81}\cdot 4 \Rightarrow f_1 = f_2$
2) $x_2 = 85$: $f_1 = 3^{85} + 4\cdot 3^{81}$; $f_2 = 85 + (3^{81}-1)\cdot 85 =$
$= 3^{81}\cdot 85 = (81+4)\cdot 3^{81} = 3^4\cdot 3^{81} + 4\cdot 3^{81} = 3^{85} + 4\cdot 3^{81} \Rightarrow$
$f_1 = f_2 \Rightarrow x \in (4;85)$

Δf - кол-во целых значений y для данного x, причём верхняя граница не включается ~~- это будет соответствовать разности~~

Сумма равна $\sum_{n=5}^{84} (f_2(n) - f_1(n)) =$
$= 80\cdot 85 + (3^{81}-1)\cdot\frac{(84+5)\cdot 80}{2} - 80\cdot 4\cdot 3^{81} - 3^5\cdot\frac{1-3^{79}}{1-3} =$
$= 80\cdot 85 + (3^{81}-1)\cdot\frac{89\cdot 80}{2} - 80\cdot 4\cdot 3^{81} - 3^5\cdot\frac{1-3^{79}}{-2} =$
$= 80\cdot 85 + 3^{81}\cdot\frac{89\cdot 80}{2} - \frac{89\cdot 80}{2} - 80\cdot 4\cdot 3^{81} + 3^5\cdot\frac{1-3^{79}}{2} =$

$$= 3^{81}(89\cdot 40 - 80\cdot 4) + 80\cdot 85 - 89\cdot 40 + 3^5\cdot\frac{1-3^{75}}{2} =$$

$$= 3^{81}(89\cdot 40 - 8\cdot 40) + 40(170 - 89) + 3^5\cdot\frac{1-3^{75}}{2} =$$

$$= 3^{81}\cdot 81\cdot 40 + 40\cdot 81 + 3^5\cdot\frac{1-3^{75}}{2} = 3^{81}\cdot 3^4\cdot 40 +$$

$$+ 40\cdot 3^4 + 3^5\,\frac{1-3^{75}}{2} = 40\cdot 3^{85} + 40\cdot 3^4 + 3^5\cdot\frac{1-3^{75}}{2} =$$

$$= 40\cdot 3^4(3^{81}+1) + 3^5\cdot\frac{1-3^{75}}{2}.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} & — f_1 \\ y < 85 + (3^{81}-1)x & — f_2 \end{cases}$$

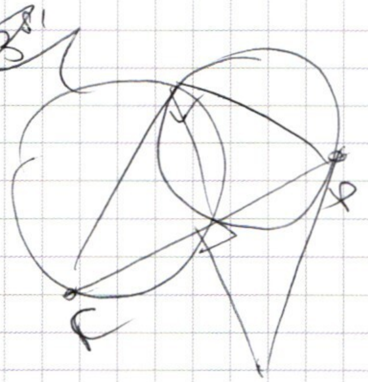
$$85 + (3^{81}-1)x - 3^x - 4\cdot 3^{81} = 85 - 3^{81}$$

$$f' = (3^{81}-1) - 3^x \cdot \ln 3 = 0$$

$$3^x = \frac{3^{81}-1}{\ln 3}$$

$$x_0 = \log_3 \frac{3^{81}-1}{\ln 3} =$$

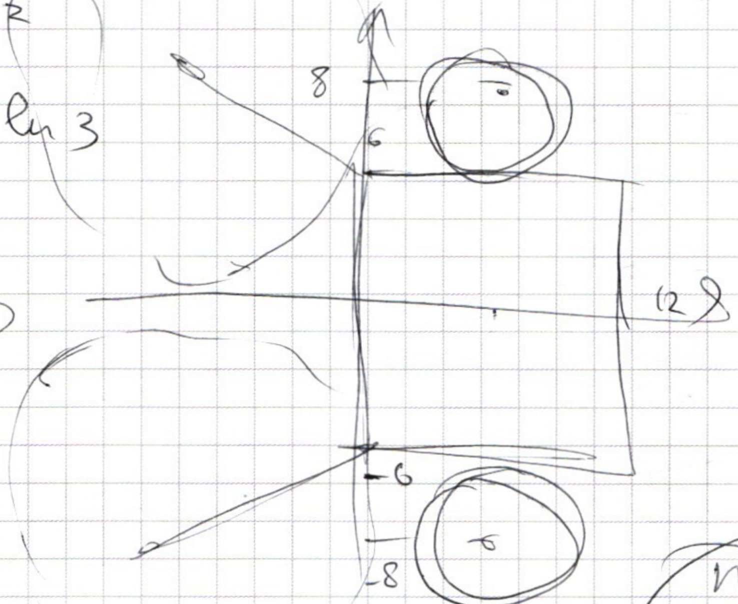
$$= \log_3 (3^{81}-1) - \log_3 \ln 3$$



f

f_2

x_0



$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

5555

1333

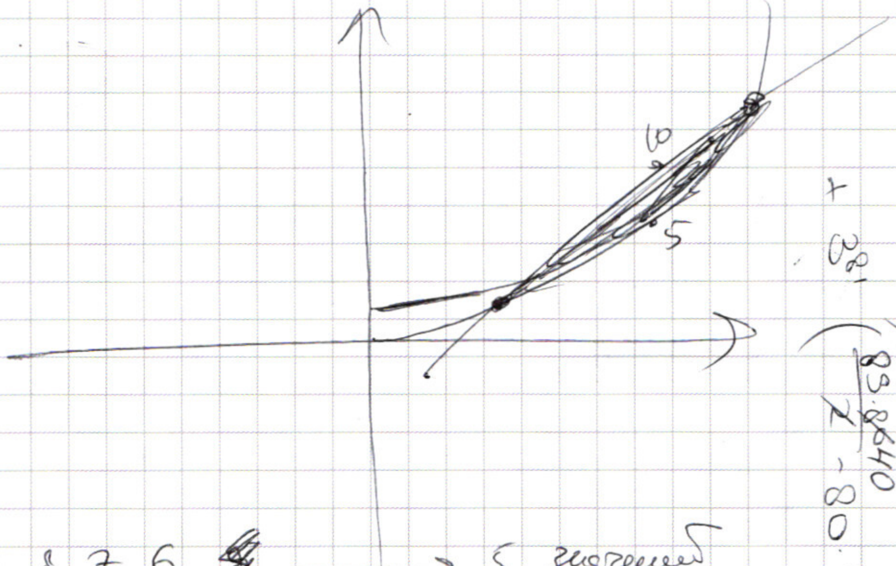
1319

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\lg\left(\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y}\right) = \lg\left((-x)^{\lg(-xy)}\right)$$

$$\cancel{\lg y \cdot 4\lg(-9x) - 2\lg y = (\lg(-x) + \lg y) \cdot \lg(-x)}$$



10 9 8 7 6 → 5 значений

3

$\ln 3 \cdot 3^x$.

$81 + 4 \cdot 3^{81} = 85 + 3^{81} \cdot 4 - 4 = 81 + 3^{81} \cdot 4$

равенство

$\cancel{88} + 3^{81} \cdot 85$

$3^{85} + 4 \cdot 8\, 3^{81}$

$3^{85} + 4 \cdot 8\, 3^{81}$

$3^{81} \cdot (81 + 4)$

$3^{81} \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^{81} = 3^{85} + 4 \cdot 3^{81}$

второе равенство

— 7 —

$80 \cdot 85 - 89 \cdot 40 + 3^5 \cdot 2 \frac{1 - 3^{79}}{\ldots} + 3^{81}$

$80 \cdot 85 + \frac{89 \cdot 80}{2} \cdot 40 + 3^5 \cdot \frac{1 - 3^{79}}{2} - 1 + 3^{81} \left(\frac{89 \cdot 80 \cdot 40}{2} - 80 \cdot 4\right)$

$(3^{81} - 1) \cdot 80$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4 – 5 4 – 5
1 – 1 2 – 1
3 – 3 81 – 3
1 – 9

$\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$

$\frac{1}{2} \cdot \cos 7x = \cos(60^\circ + 7x) + \cancel{\cos(60 - 7x)}$

$\cos x - \sin x = 2 \cdot \cos\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$

$|BD| = 26 \cdot \frac{|AD|}{|CD|}$

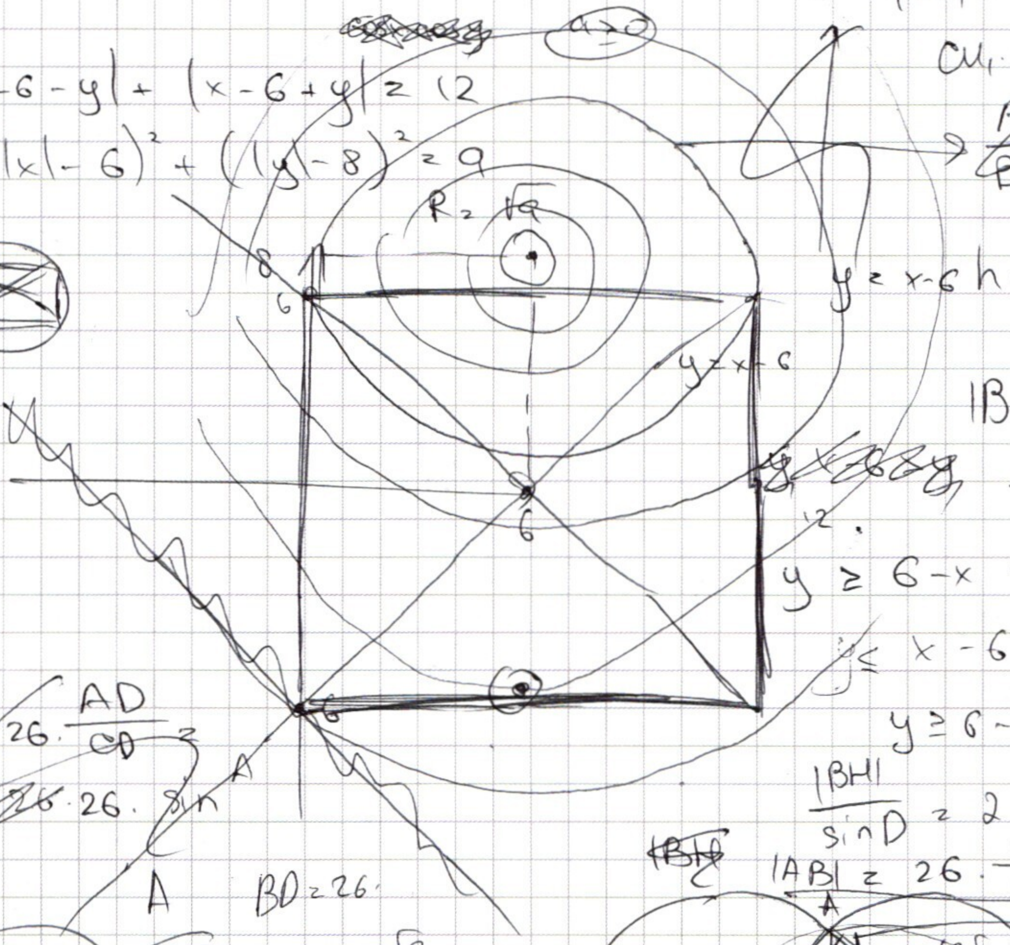
$CH_1 \cdot CA = CB \cdot CD$

$a > 0$

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 9 \end{cases}$$

$\cancel{\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{AD}}$

$h = \frac{AC \cdot AD}{CD}$



$|BH| = 26 \cdot \sin$

$\frac{AC}{CD} =$

$y \geq 6 - x$ $= 26 \cdot \sin$

$y \leq x - 6$

$y \geq 6 - x$

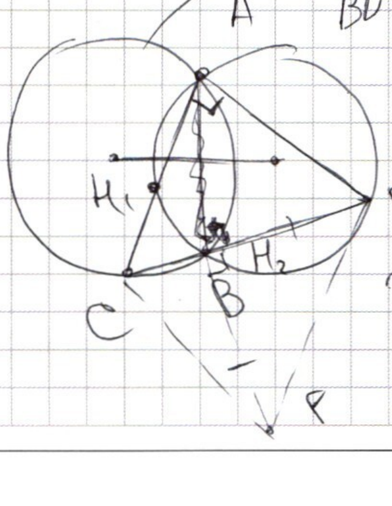
$\frac{|BH|}{\sin D} = 2 \cdot 13$

$|AB| = 26 \cdot \frac{AC}{CD}$

$|BA| = 26 \cdot \frac{AD}{CD} =$

$\cancel{|AC|} = \cancel{26} \cdot 26 \cdot \sin$

$BD = 26$



$26 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 13\sqrt{2}$

$26 \cdot \sin\alpha = 26 \cdot \sin(90^\circ - \alpha) =$

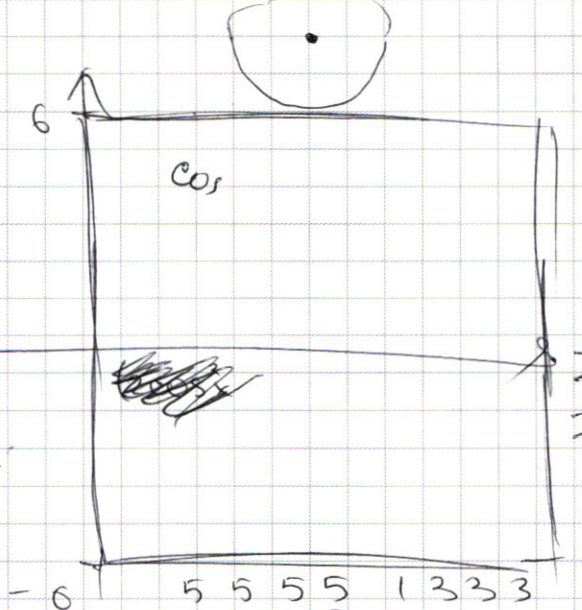
$AC \cdot CH_1 = CH_2 \cdot CD$

$AC^2 + CD^2 = AD^2$

$$14 \times 14 = 56 + 140 = 196$$

$$18 \times 18 = 144 + 180 = 324$$

$$320 + 196 = 520$$



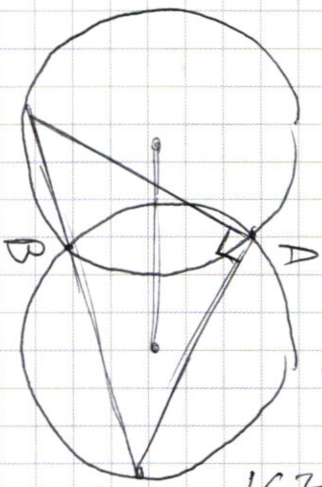
5555 1333

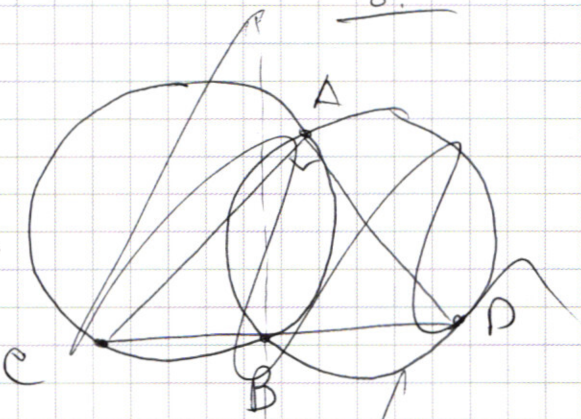
5555 13,15

$675 : 5 = 135$

$135 : 5 = 27$

8!





$y(y-x)$

135679

22 27

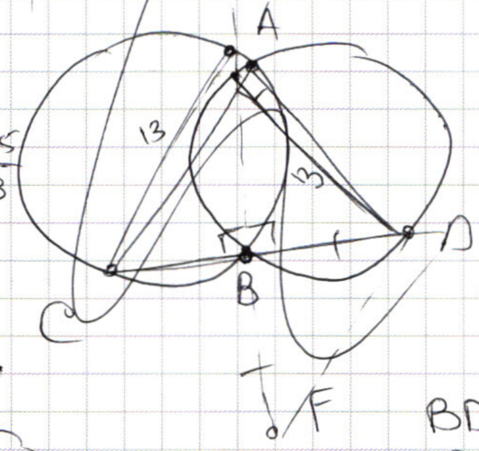
167

cos 4x

$\cos x + \cos y =$

$3375 : 5 = 675$, $675 : 5 = 135$

$16875 : 5 = 3375$



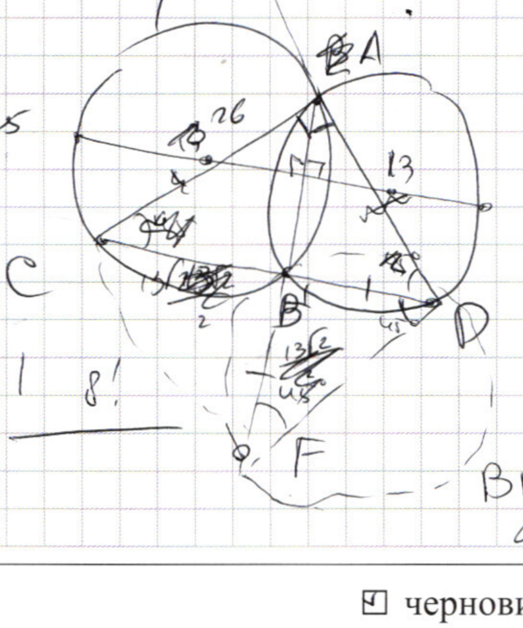
$$\frac{BD}{CB} = \frac{AD^2}{AC^2}$$

$$(BD+CB)^2 = AD^2 + AC^2$$

$$BD + CB = \sqrt{AD^2 + AC^2}$$

$$BD \cdot CD = AD^2$$

$$CB \cdot CD = AC^2$$



~~$BD \cdot CD = AD^2$~~

~~$CB \cdot CD = AC^2$~~

~~$AD^2 = AC^2$~~

1111 8!

~~$BD \cdot CD + CB \cdot CD = BD^2 + CB^2 + 2BDCB$~~

~~$BD(CD - CB) + CB(CB - DB)^2$~~

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

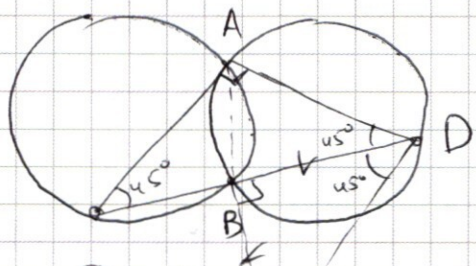
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



а) По т. синусов в $\triangle ABC$:

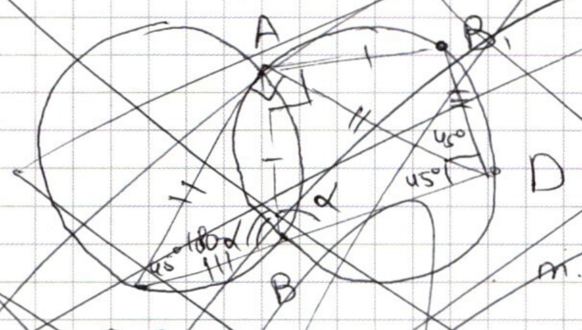
$|AB| = 2R \cdot \sin\angle ACD = 2\cdot 13 \cdot \frac{|AD|}{|CD|} = 26 \cdot \frac{|AD|}{|CD|}$

По т. синусов в $\triangle ABD$: $|AB| = 2R \cdot \sin\angle ADB = 2\cdot 13 \cdot \frac{|AC|}{|CD|} = 26 \cdot \frac{|AC|}{|CD|}$. Очевидно, что $|AB| = |AB|$, значит $26 \cdot \frac{|AD|}{|CD|} = 26 \cdot \frac{|AC|}{|CD|} \Rightarrow |AD| = |AC|$.

То есть $\triangle CAD$ — р/б и п/у $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45°$.

Тогда $|AB| = 26 \cdot \sin 45° = 26 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 13\sqrt{2}$.

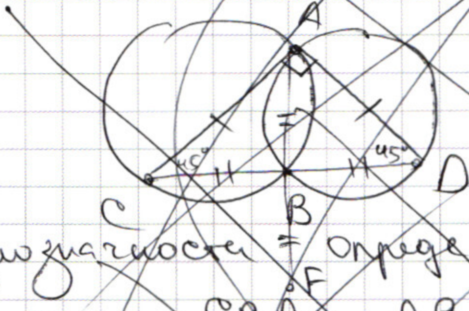
Сделаем некоторые геометрические ~~преобразования~~ движения:



Построим на $[AD]$ $\triangle AB_1D$, равный $\triangle ABC$. Точка B_1 будет лежать на окружности, т.к. по признаку (о сумме противоположных углов) четыр-ник $ABDB_1$ — вписанный ($\angle AB_1D = 180 - \alpha = \angle ABC$; $\angle ABD = \alpha$)

Заметим, что $\angle BAB_1 = 90°$ (как $\angle CBD$), $\angle BDB_1 = 45° + 45° = 90°$. Кроме того, по построению $|AB| = |AB_1|$. То есть $\triangle BAB_1$ — р/б.

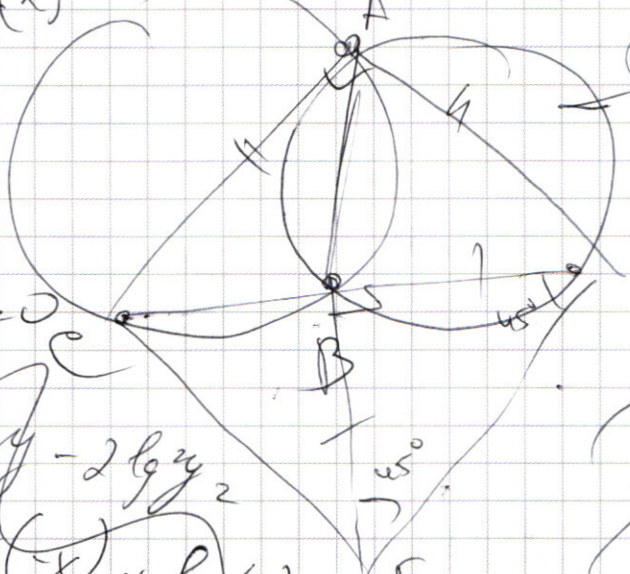
~~В силу того, что $\angle CAD = 90°$, можно описать окружность около $\triangle CAD$, причем $[CD]$ — диаметр окружности. Эта окружность имеет с двумя другими (изначальными) общую точку A и точку C — с первой, точку D — со второй,~~ на др. стороне далее значит её положение определено однозначно, т.к. всегда в таком расположении отрезок [CD] виден из точки A под углом в 90° => лежит на нашей вспомогательной окружности => она однозначна. Данные условия выполняются, когда B — середина отрезка [CD]; т.к. $\triangle CAD$ — р/б => по свойству медиана совпадает с высотой и биссектрисой.



То есть в силу однозначности F определения — это и есть искомая B. Значит $\angle CBA = \angle ABD = 90°$, то есть $|AC| = |AD| = 2R = 26$ (т.к. угол в 90° опирается на диаметр в окружности). $\angle DAB = \angle CAB$ (т.к. [AB] также и биссектриса) и равны $\frac{90°}{2} = 45°$. То есть $|AB| = |BD| = |BF| = 13\sqrt{2}$ $= |BC|$.

Тогда $|CF| = \sqrt{|CB|^2 + |BF|^2} = \sqrt{2\cdot 13^2 + 2\cdot 13^2} = 13\cdot 2 = 26$

$\lg(y)(\lg(-x) - 2\lg(y)) = 0$



$\lg(-x) = \lg(y)$

$-x = y$

$-x = y^2$

$y^2 + y - 4 = 0$

$4\lg(-x)\lg y - 2\lg^2 y =$

$\lg^2(-x) + \lg(y) - \lg(-x)$

$26 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 13\sqrt{2}$

$\left(\frac{x^4}{y^4}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$

$2y^2 - 8y = x^2 - 4x - 8y = 0$

$|AC|$ $|AD|$

$|CD| = |CF|$

$y > 0$

$x < 0$

$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$y = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$

~~см. продолжение~~

☑ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)