

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑤
$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

Распишем первое уравнение

①
$$\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \\ x-6-y+x-6+y = 12 \end{cases}$$

②
$$\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y < 0 \\ x-6-y-x+6-y = 12 \end{cases}$$

③
$$\begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y \geq 0 \\ -x+6+y+x-6+y = 12 \end{cases}$$

④
$$\begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y < 0 \\ -x+6+y-x+6-y = 12 \end{cases}$$

①
$$\begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq 6-x \\ 2x-12 = 12 \end{cases}$$

②
$$\begin{cases} y \leq x-6 \\ y < 6-x \\ -2y = 12 \end{cases}$$

③
$$\begin{cases} y > x-6 \\ y \geq 6-x \\ 2y = 12 \end{cases}$$

④
$$\begin{cases} y > x-6 \\ y < 6-x \\ -2x+12 = 12 \end{cases}$$

①
$$\begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq 6-x \\ x = 12 \end{cases}$$

②
$$\begin{cases} y \leq x-6 \\ y < 6-x \\ y = -6 \end{cases}$$

③
$$\begin{cases} y > x-6 \\ y \geq 6-x \\ y = 6 \end{cases}$$

④
$$\begin{cases} y > x-6 \\ y < 6-x \\ x = 0 \end{cases}$$

Распишем второе уравнение

$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

①
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases}$$

②
$$\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \\ (x+6)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases}$$

③
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ (x-6)^2 + (y+8)^2 = a \end{cases}$$

④
$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ (x+6)^2 + (y+8)^2 = a \end{cases}$$

Напишем координаты каждой из окр.

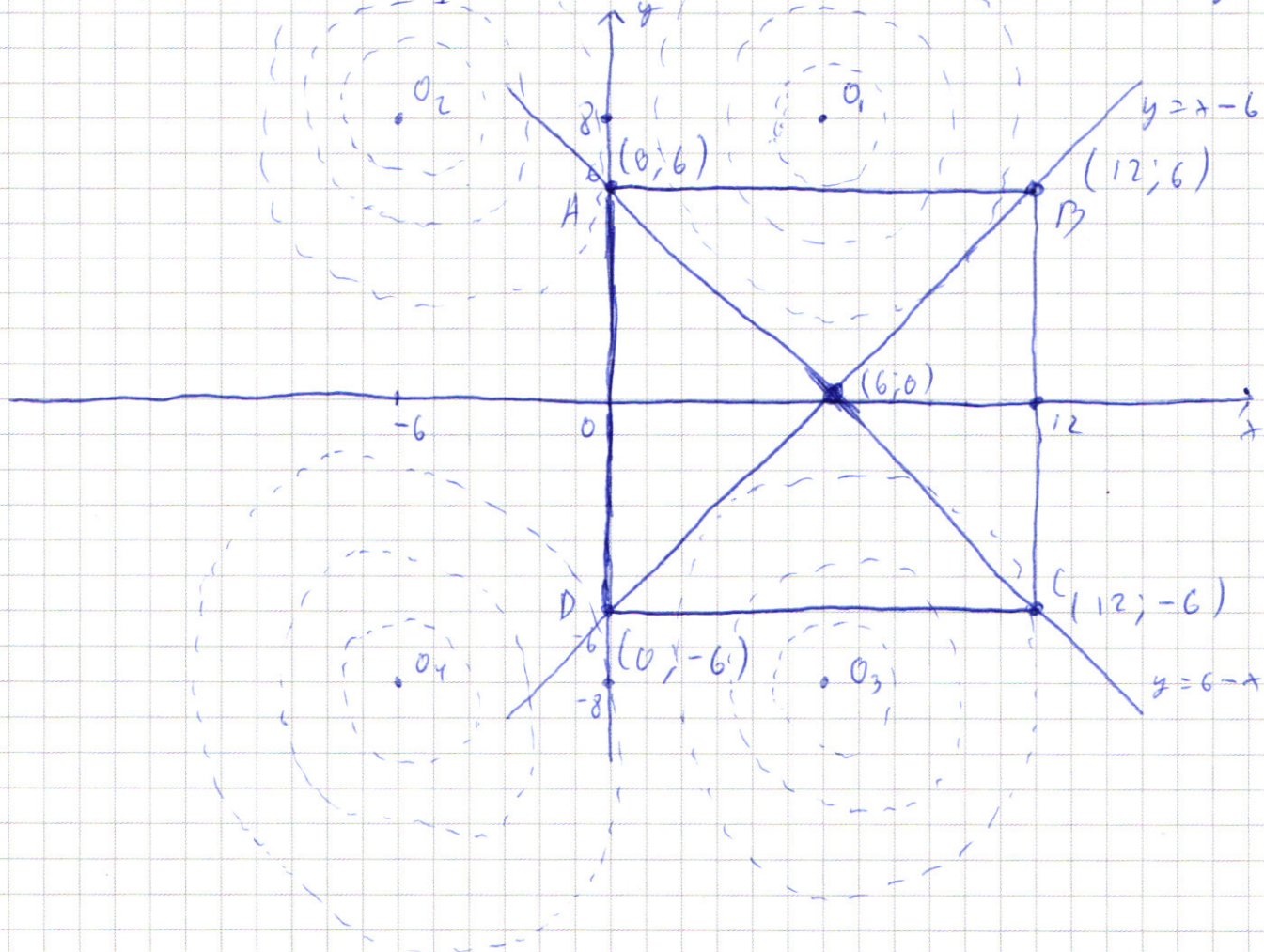
① $(6; 8)$

② $(-6; 8)$

③ $(6; -8)$

④ $(-6; -8)$

Построим графики для первого и второго ур.



2 решения!

1 случай: окружности с центрами O_1 и O_3 касаются прямых $y=6$ и $y=-6$ соотв.

Радиус ок-ти равен $R = 8 - 6 = 2$

$$a_1 = R^2 = 4$$

2 случай: Окружности с центрами O_2 и O_4 проходят через вершины квадрата ABCD в точках A и D соотв.

Радиус ок-ти равен $R = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$

$$a_2 = R^2 = (\sqrt{40})^2 = 40$$

Ответ: $a_1 = 4$; $a_2 = 40$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② $\cos 7x + \cos 3x - \sin 7x - \sin 3x - \sqrt{2} \cos 10x = 0$

$$\frac{\cos 7x - \sin 7x}{\sqrt{2}} + \frac{\cos 3x - \sin 3x}{\sqrt{2}} = \cos 10x$$

$$\cos(7x + \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 10x$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \cos \frac{(7x + \frac{\pi}{4}) + (3x + \frac{\pi}{4})}{2} \cos \frac{(7x + \frac{\pi}{4}) - (3x + \frac{\pi}{4})}{2} = \cos 10x$$

$$2 \cos(5x + \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(2x) = \cos 10x$$

$$2(\cos 5x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 5x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) \cos 2x = \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

$$\sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x) \cos 2x = (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 & \text{①} \\ \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{2} = \frac{\cos 5x + \sin 5x}{\sqrt{2}} & \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{① } \tan 5x = 1 \\ \text{② } \cos 2x = \cos(5x - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

$$\text{① } \tan 5x = 1$$

$$x_1 = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$$

$$\text{② } \cos(2x) = \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos(2x) - \cos(5x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$-2 \sin(\frac{2x + 5x - \frac{\pi}{4}}{2}) \sin(\frac{2x - 5x + \frac{\pi}{4}}{2}) = 0$$

$$\begin{cases} \sin(\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2}) = 0 \\ \sin(\frac{-3x + \frac{\pi}{4}}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k \\ \frac{-3x + \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{2}{7}(\frac{\pi}{8} + \pi k) \\ x_3 = \frac{2}{3}(\frac{\pi}{8} + \pi n) \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$
 $x_2 = \frac{2}{7}(\frac{\pi}{8} + \pi k), k \in \mathbb{Z}$
 $x_3 = \frac{2}{3}(\frac{\pi}{8} + \pi n), n \in \mathbb{Z}.$

$$(3) \quad \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{OD 3: } \begin{cases} -x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

решаем (2) как квадратное отн. y

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - (x+8)y - (x^2+4x) = 0$$

$$D = x^2 + 16x + 64 + 8(x^2+4x) = 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2$$

$$\sqrt{D} = 3x+8$$

$$y_{1,2} = \frac{(x+8) \pm (3x+8)}{4}$$

$$y_1 = x+4$$

$$y_2 = -\frac{x}{2}$$

1 случай $y_1 = x+4$ подстав в (1)

$$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x(x+4))}$$

$$\text{логарифмируем } \lg(x+4) \lg\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right) = \lg(-x(x+4)) \cdot \lg(-x)$$

$$\lg(x+4) (4 \lg(-x) - 2 \lg(x+4)) = (\lg(-x) + \lg(x+4)) \cdot \lg(-x)$$

$$4 \lg(x+4) \lg(-x) - 2 \lg^2(x+4) = \lg^2(-x) + \lg(x+4) \lg(-x)$$

$$2 \lg^2(x+4) - 3 \lg(x+4) \lg(-x) + \lg^2(-x) = 0$$

Реш. как кв. отн. $\lg(x+4)$

$$D = 9 \lg^2(-x) - 2 \cdot 4 \lg^2(-x) = \lg^2(-x)$$

$$\lg(x+4)_{1,2} = \frac{3 \lg(-x) \pm \lg(-x)}{4} \quad \lg(x+4)_1 = \lg(-x)$$

$$\lg(x+4)_2 = \frac{1}{2} \lg(-x)$$

$$(x+4)_1 = -x \quad x_1 = -2; \quad y_1 = x+4 = 2$$

$$(x+4)_2 = \sqrt{-x} \quad \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x^2+8x+16 = -x \\ x^2+9x+16=0 \\ D=81 \\ x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{77}}{2} \end{cases} \quad x_3 = \frac{-9 - \sqrt{77}}{2} \quad \text{отбрасываем}$$

$$x_2 = \frac{-9 + \sqrt{77}}{2} \quad y_2 = \frac{\sqrt{77} - 1}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2 случая $y_2 = -\frac{x}{2}$

Подстав. в (1)

$$\left(\frac{x^4 \cdot 4}{x^2}\right) \lg\left(-\frac{x}{2}\right) = (-x) \lg\left(+\frac{x^2}{2}\right)$$

$$(4x^2) \lg\left(-\frac{x}{2}\right) = (-x) \lg\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

логарифмируем

$$\lg\left(-\frac{x}{2}\right) \cdot \lg(4x^2) = \lg\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot \lg(-x)$$

$$(\lg(-x) - \lg 2)(\lg 4 + 2\lg(-x)) = (2\lg(-x) - \lg 2)(\lg(-x))$$

$$2\lg 2 \lg(-x) - 2\lg 2 \lg(-x) + \lg 2 \lg(-x) = \lg 2 \lg 4$$

$$\lg 2 \lg(-x) = \lg 2 \lg 4$$

$$-x \cdot 4 = 4$$

$$x = -1$$

$$y = -\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $(-1; \frac{1}{2}); (-\frac{1+\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}); (-2; 2)$.

① Число 16875

Разложим его

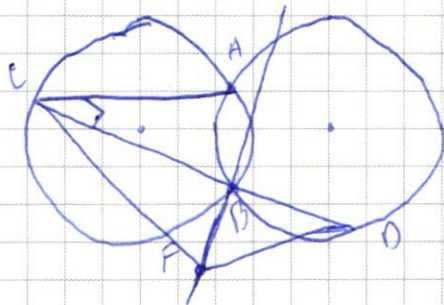
$$\begin{array}{r|l} 16875 & 5 \\ 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{array}$$

Но так как у нас

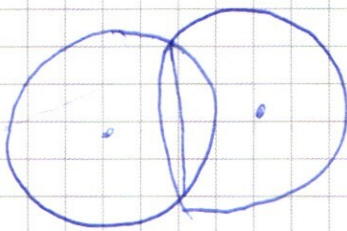
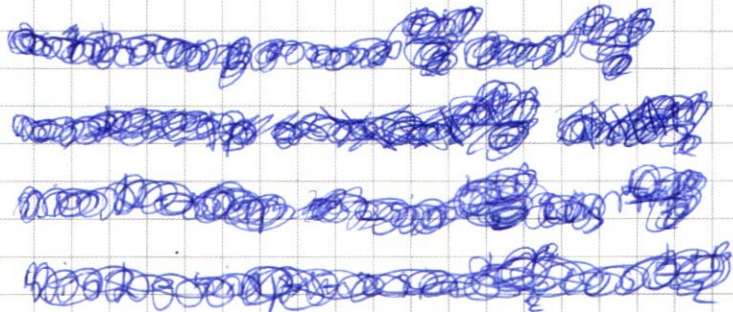
число 8-значное, то цифры в этом числе обязательно будут 15555333

Рассчитаем сколько вариантов расставить эти ~~цифры~~ ^{цифры} $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 280$ Ответ: 280 чисел.

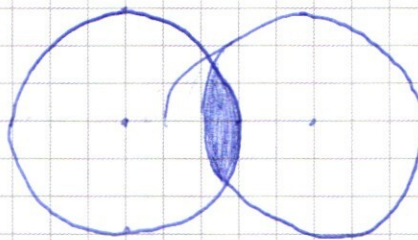
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



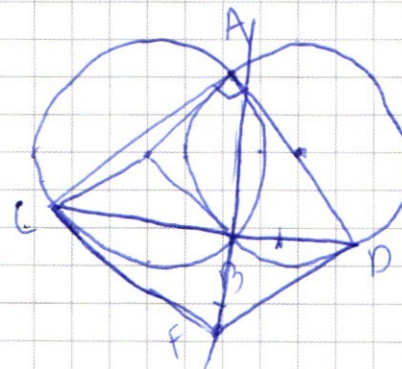
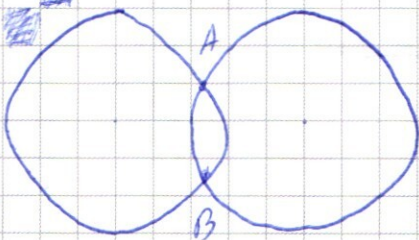
$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$



1+3
2+5
3+5
4+5
5+5
6+6
7



2 ~ ~



$$\begin{array}{r} 16875 \mid 5 \\ - 19 \\ \hline 18 \\ - 15 \\ \hline 37 \\ - 35 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \mid 5 \\ 3375 \mid 5 \\ 675 \mid 5 \\ 135 \mid 5 \\ 27 \mid 3 \\ 9 \mid 3 \\ 3 \mid 3 \end{array}$$

33355551
13335555

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a = R^2$$

$$\begin{array}{r} 135 \mid 5 \\ 10 \mid 27 \\ 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \mid 5 \\ 30 \mid 675 \mid 5 \\ 37 \mid 5 \mid 135 \\ 35 \mid 17 \\ 25 \mid 15 \\ 25 \\ - 25 \\ \hline 0 \end{array}$$

280

1-1
3-3
4-5

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a$$

13335555

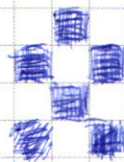
$$169 + 169 = 338$$

56

1352

$$\begin{array}{r} 8.7 \cdot 8.5 \\ \times 8.7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ ((x-6)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases}$$



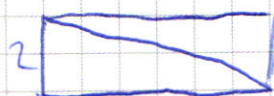
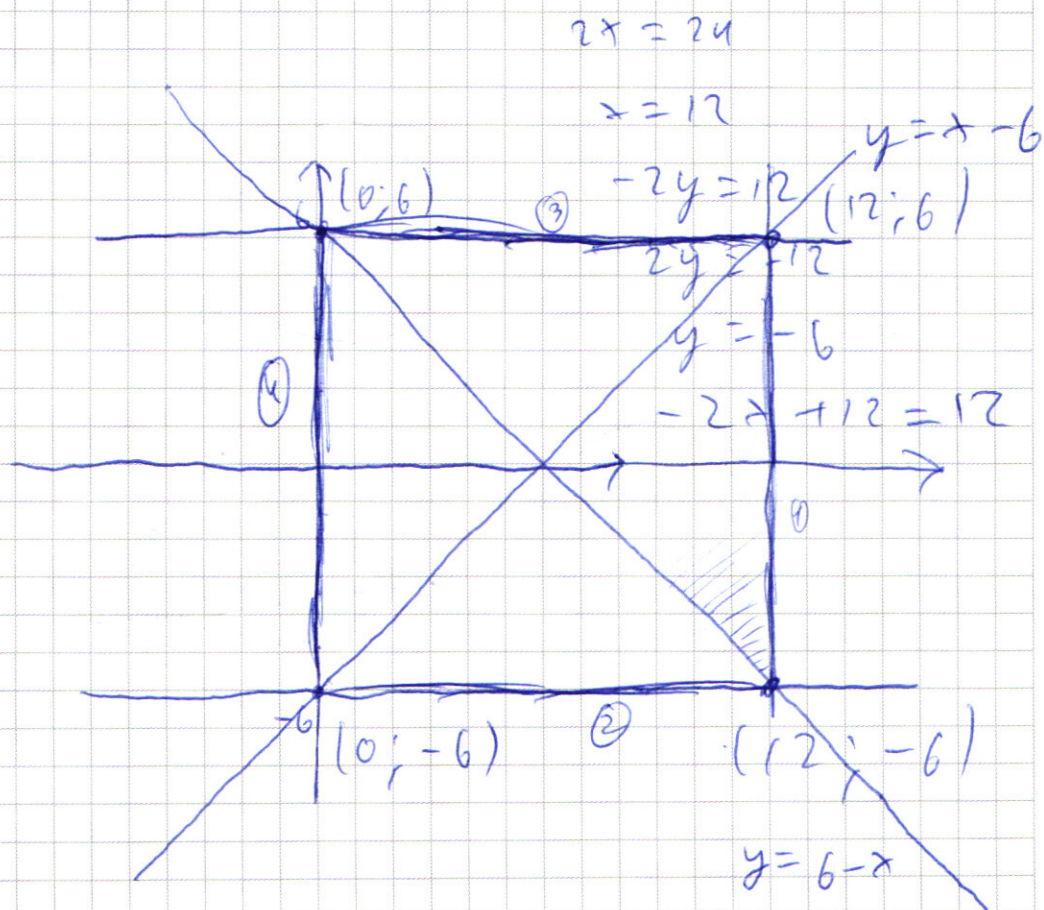
$$\textcircled{1} \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \\ x-6-y + x-6+y = 12 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y < 0 \\ x-6-y - x+6-y = 12 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y \geq 0 \\ -x+6+y + x+6+y = 12 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y < 0 \\ -x+6+y - x+6-y = 12 \end{cases}$$

$\textcircled{1} \{$



$$R^2 = 6^2 + 2^2$$

$$R = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$

