

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Разложите 76875 на простые множители.

$$\begin{array}{r}
 76875 : 5 = 15375 \\
 15375 : 5 = 3075 \\
 3075 : 5 = 615 \\
 615 : 5 = 123 \\
 123 : 3 = 41
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 76875 : 3 = 25625 \\
 25625 : 5 = 5125 \\
 5125 : 5 = 1025 \\
 1025 : 5 = 205 \\
 205 : 5 = 41
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 76875 : 7 = 10982.14 \dots \\
 76875 : 11 = 6988.63 \dots \\
 76875 : 13 = 5836.53 \dots \\
 76875 : 17 = 4522.05 \dots \\
 76875 : 19 = 4046.05 \dots \\
 76875 : 23 = 3342.39 \dots \\
 76875 : 29 = 2650.86 \dots \\
 76875 : 31 = 2480 \text{ (остаток 15)} \\
 76875 : 37 = 2075 \text{ (остаток 10)} \\
 76875 : 41 = 1875 \text{ (остаток 15)} \\
 76875 : 43 = 1787.79 \dots \\
 76875 : 47 = 1635.63 \dots \\
 76875 : 53 = 1450.47 \dots \\
 76875 : 59 = 1302.96 \dots \\
 76875 : 67 = 1147.39 \dots \\
 76875 : 71 = 1082.74 \dots \\
 76875 : 73 = 1053.08 \dots \\
 76875 : 79 = 973.10 \dots \\
 76875 : 83 = 926.20 \dots \\
 76875 : 89 = 863.77 \dots \\
 76875 : 97 = 792.52 \dots
 \end{array}$$

$76875 = 3^3 \cdot 5^4 \cdot 41$ В восьмизначном числе три цифры 3, ^{четыре} цифры 5 и цифра 1.

Есть 0 вариантов расставить цифру 1, для каждого случая есть $C_3^3 = 1$ вариант расставить три цифры 3, и для каждого такого случая есть $C_4^4 = 1$ вариант расставить четыре цифры 5.

~~Итого есть 35 · 8 = 280 восьмизначных чисел.~~

Ответ: 280.

2. $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 70x = \sin 7x + \sin 3x$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 70x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 70x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\cos 5x - \sin 5x = 0 \quad \text{или} \quad 2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\cos 5x = \sin 5x$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x$$

$$Sx = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x = \cos 5x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 5x \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\cos 2x = \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} 2x &= 5x - \frac{E}{4} + 28 \\ 2x &= \frac{E}{4} - 5x + 28 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7} \end{cases}$$

Ansatz: $x = \frac{E}{70} + \frac{8n}{5}$
 $x = \frac{E}{12} + \frac{28n}{3}, n \in \mathbb{Z}$
 $x = \frac{E}{28} + \frac{28n}{7}$

6. Dato: $R_1 = R_2 = 13$, ~~... ..~~

$$Q_1 \cap Q_2 = A \cup B,$$
$$C \in \mathcal{O}_1, D \in \mathcal{O}_2,$$

$B \in CD, \angle CAD = 90^\circ$

$$BF \perp CD, BF = BD.$$

Решение: а) $\angle C$; б) $\angle C = 70^\circ$, $\angle ACF = ?$.

Решение: а) $\angle BCA = \angle BOA$, т.к. опираются на равные дуги в одной окружности $\Rightarrow \angle BCA = \angle BOA = 45^\circ \Rightarrow \triangle CAO$ равноб. и $AC = AO$.

Тогда ~~$\angle BMD = 180^\circ - \angle BMD$~~ пусть $BF \cap AD = M$, тогда $\angle BMD = 180^\circ - \angle MBD - \angle BDM = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow BM = BD$ и $\triangle BDM$ - равноб. Тогда $\angle BMA$ - смежный и $\approx 135^\circ$, значит в $\triangle CBM$ сумма углов $\angle \approx 180^\circ \Rightarrow \triangle CBM$ вписан в O_1 и M лежит на O_1 . Тогда CM - ^{диаметр} ~~радиус~~, т.к.

На рис. отпр. $\angle CAM = 90^\circ \Rightarrow CM = 2R = 26$.

$\triangle CBF \cong \triangle CBM$ по 2 катетам $\Rightarrow CF = CM = 26$.

$$d) BF = BD = BM = \sqrt{676 - 700} = \sqrt{576} = 24 \Rightarrow 0 + 70 + 24 = 94$$
$$\textcircled{0} \triangle ACD \quad \text{треугольник} \quad \text{высоту} \quad AH \Rightarrow CH = 17 \Rightarrow AC = \frac{CH}{\cos 45^\circ} = \frac{17}{\cos 45^\circ} =$$

$$= \frac{17 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{34\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{34\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin \angle BCF = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}, \cos \angle BCF = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

$$\sin \angle ACF = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \angle BCF \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \angle BCF + \sin \angle BCF \cos \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot 5}{2 \cdot 13} + \frac{12 \cdot \sqrt{2}}{13 \cdot 2} = \frac{17\sqrt{2}}{26}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{17\sqrt{2} \cdot 28 \cdot 17\sqrt{2}}{2 \cdot 26} = 289.$$

Ответ: а) $CF = 26$; б) $S_{\triangle ACF} = 289$.

5) $|x-6-y| + |x-6+y| = 72$ (1 ур.)

$((|x|-6)^2 + (|y|-6)^2 = 288)$ (2 ур.)

1) $x-6-y \geq 0, x-6+y \geq 0 \Rightarrow x-6-y + x-6+y = 72$

$y \leq x-6, y \geq 6-x$

$2x = 24$
 $x = 12$

2) $x-6-y \geq 0, x-6+y < 0 \Rightarrow x-6-y - (x-6+y) = 72$

$y \leq x-6, y < 6-x$

$-2y = 72$
 $y = -36$

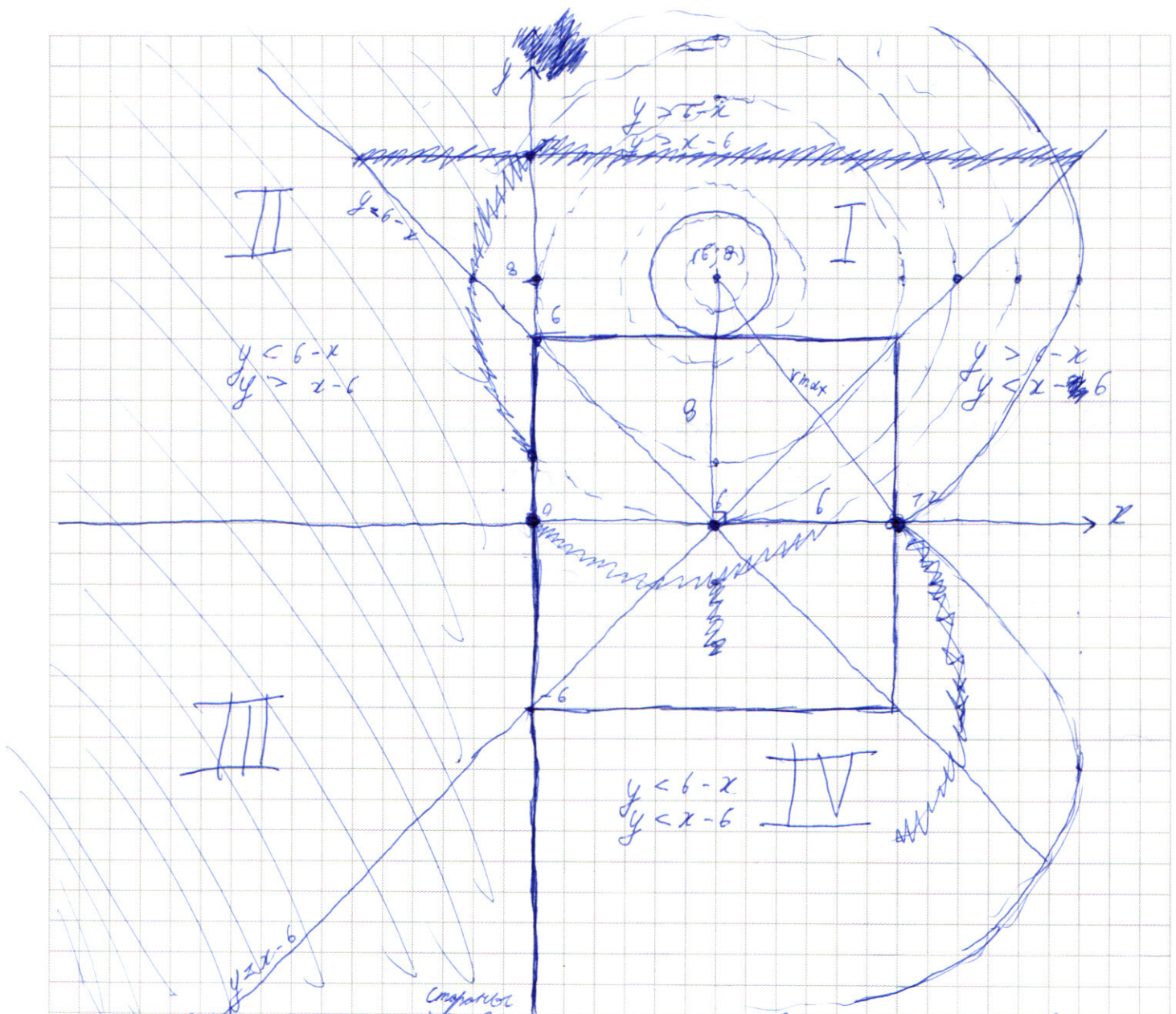
3) $y > x-6, y \geq 6-x \Rightarrow -x+6+y + x-6+y = 72$

$2y = 72 \Rightarrow y = 36$

4) $y > x-6, y < 6-x \Rightarrow -x+6+y - (x-6+y) = 72$

$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$

Изобразим множество решений 1 ур. на координатной плоскости:



1 уравнение задаёт ^{сторону} квадрата с центром в точке $(6; 0)$ и вершинами в точках $(0; 6)$, $(12; 6)$, $(12; -6)$, $(0; -6)$

2 уравнение задаёт окружность, если она лежит в первой координатной четверти, иначе часть окружности, лежащая в первой координатной четверти, отбрасывается симметрично относительно осей координат во всех других четвертях.

Можно не рассматривать часть ~~окружности~~ ^{уравнения} во 2 и 3 квад. четвертях, т.к. квадрат находится в 1 и 4 четвертях, и пересечения возможны только в ~~этих~~ этих четвертях

$d \leq r^2$ (r - радиус окружности)

при увеличении r до того момента

$r > 2 \Rightarrow d > 4$ - 2 пересечения, 2 пересечения будут, когда окружность пройдёт

☐ черновик

☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

через точки $(0; 0)$ и $(72; 0)$, а при дальнейшем увеличении r пересечений вообще не будет.

В максимально возможной окр-ти $\approx r_{\max} = \sqrt{6^2 + 8^2} \approx 10$ (по т. Пифагора)

тогда $\alpha \leq 100$

Ответ: $\alpha \in [4; 100]$.

$$\textcircled{3.} \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{1/2} = (-x)^{1/2} (1-xy)^{1/2} \quad (1)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad (2)$$

$$(1) \quad y > 0 \Rightarrow \begin{matrix} -xy > 0 \\ -x > 0 \\ x < 0 \end{matrix}$$

$$(2) \quad 2y^2 - x^2 - 8y - 4x - 2xy + xy = 0$$

$$\text{Если } x = -2y, \text{ то } \left(\frac{16y^4}{y^2} \right)^{1/2} = (2y)^{1/2} (2y)^{1/2}$$

$$2y(y - 4 - x) + x(y - 4 - x) = 0$$

$$(16y^2)^{1/2} = (2y)^{1/2} (2y)^{1/2}$$

$$(x + 2y)(y - x - 4) = 0$$

$$(4y)^{1/2} = (2y)^{1/2} (2y)^{1/2}$$

$$x = -2y \quad \text{или} \quad y = x + 4$$

$$(4y)^{1/2} = (2y)^{1/2} (2y)^{1/2} + 1/2$$

~~Итого~~

$$2 \cdot 1/2 \cdot 2y^2 = (2y)^{1/2} \cdot 1/2$$

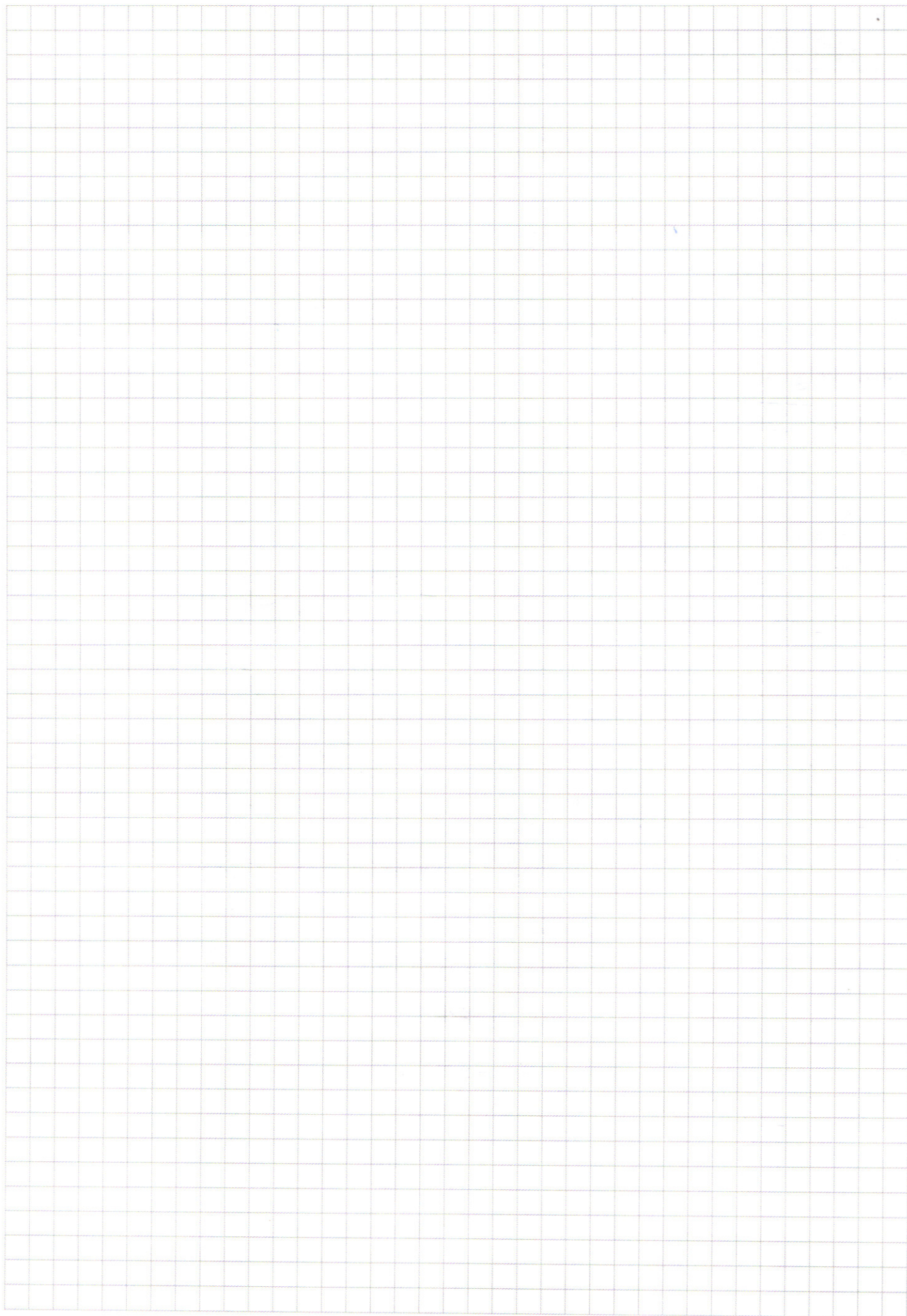
$$(y^2)^{1/2} = (2y)^{1/2} \cdot 1/2$$

$$y^2 = 2y \cdot 1/2$$

$$y^2 = 2y \cdot 1/2$$

$$y = 2 \Rightarrow x = -4$$

Ответ: $[-4; 2]$.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta =$$

$$= 2\sin\alpha \cos\beta$$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin\alpha + \sin\beta$$

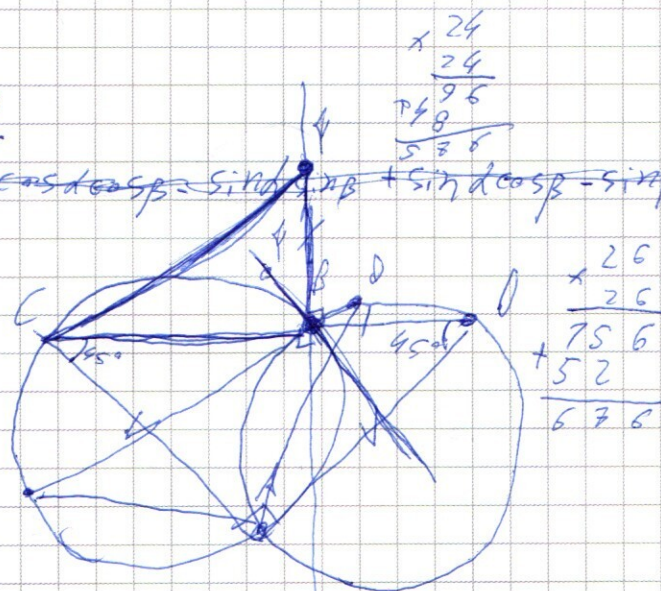
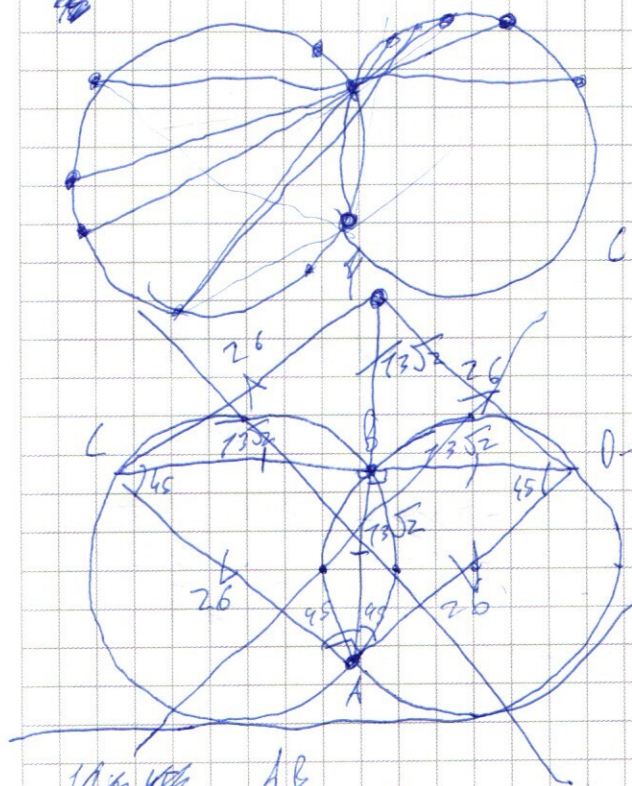
$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta =$$

$$= 2\cos\alpha \cos\beta$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\alpha + \cos\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta - (\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) =$$

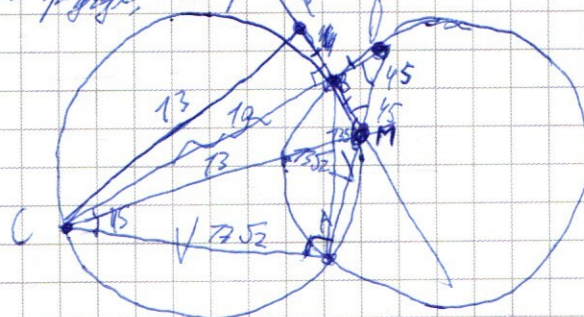
$$= -2\sin\alpha \sin\beta$$



$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$AB = 2R \sin 45^\circ = \sqrt{2} R = 7\sqrt{2}$$

М лежит на окр. с кр. AB
СМ - диаметр, $\angle CMB = 90^\circ$, $CM = 7\sqrt{2}$



$$\triangle CFB \cong \triangle CBM \text{ по 2 катетам } \Rightarrow CF = BM = CM = 7\sqrt{2}$$

$$\delta) BF = DB = BM = \sqrt{69 - 100} = \sqrt{69} \Rightarrow CD = 70 + \sqrt{69} \Rightarrow AC = \frac{70 + \sqrt{69}}{\cos 45^\circ} = \frac{70 + \sqrt{69}}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \angle FCO = \frac{70}{73}, \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \angle FCO = \sqrt{1 - \frac{700}{769}} = \sqrt{\frac{69}{769}} = \frac{\sqrt{69}}{\sqrt{769}} = \sin \angle FCO$$

$$\angle FCO = \arccos \frac{70}{73}$$

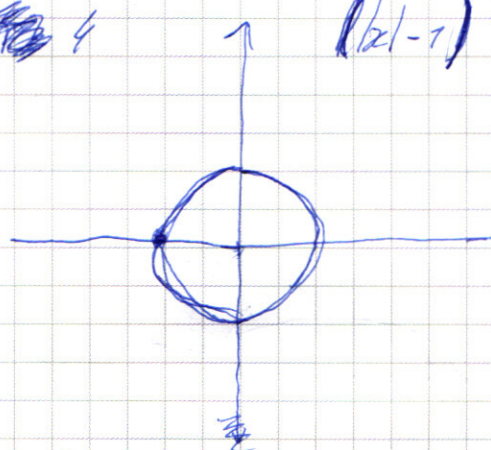
$$\angle = \arccos \frac{70}{73} + \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(\arccos \frac{70}{73} + \frac{\pi}{4}) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{69} \cdot \sqrt{2}}{73 \cdot 2} + \frac{70 \sqrt{2}}{73 \cdot 2}$$

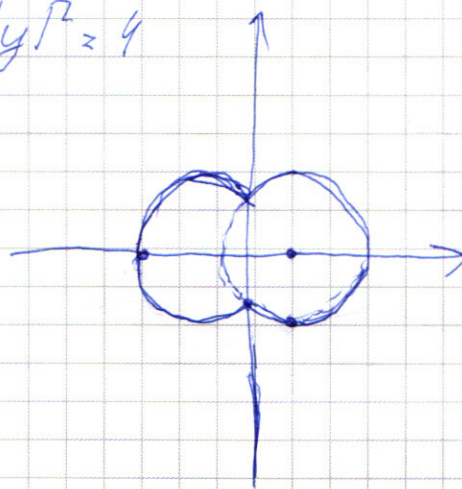
$$= \frac{\sqrt{738} + 70\sqrt{2}}{26}$$

$$S = \frac{ab \sin \alpha}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{738} + 70\sqrt{2}}{26}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{6^2 + 69}}{26} = \frac{(70 + \sqrt{69})^2}{4} = \frac{700 + 20\sqrt{69} + 69}{4} = 42,25 + 5\sqrt{69} = S_{\Delta ACP}$$

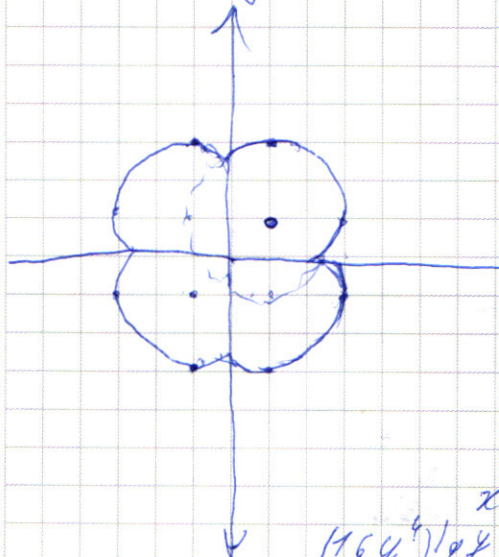
$$|x|^2 + |y|^2 = 4$$



$$(|x|-1)^2 + |y|^2 = 4$$



$$(|x|-1)^2 + (|y|-1)^2 = 4$$



$$3^2 + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x$$

~~$$x \in [4, 5]$$~~
~~$$2y^2 - x^2 - 8y - 4x - 2xy + xy = 0$$~~
~~$$2y(y - 4 - \frac{1}{2}x) + x(\frac{1}{2}x - 4 + y) = 0$$~~

$$2y^2 - x^2 - 8y - 4x - 2xy + xy = 0 \quad \begin{matrix} y > 0 \\ x < 0 \end{matrix}$$

$$2y(y - 4 - \frac{1}{2}x) + x(\frac{1}{2}x - 4 + y) = 0$$

$$(x + 2y)(y - x - 4) = 0$$

$$x = -2y \text{ или } y = x + 4 \text{ (не подходит)}$$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} = (2y)^{\frac{1}{2}}(2y^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow x \neq -4, y \neq 0$$

$$0 < y < 4, x > -4$$

$$(16y^2)^{\frac{1}{2}} = (2y)^{\frac{1}{2}}(2y^3)^{\frac{1}{2}}$$

~~$$(4y)^{\frac{1}{2}} = (2y)^{\frac{1}{2}}(2y^3)^{\frac{1}{2}}$$~~

$$(4y)^{\frac{1}{2}} = (2y)^{\frac{1}{2}}(2y^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{2y^2} = \sqrt{2} + \sqrt{y^2}$$

$$(4y)^{\frac{1}{2}} = (2y)^{\frac{1}{2}}(2y^3)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{4y} = \sqrt{2y} \cdot \sqrt{2y^3} \Rightarrow \sqrt{4y} = \sqrt{2y} \cdot \sqrt{2y^3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(2)^{\lg 4^2} \cdot (2y)^{\lg 4^2} = (2y)^{\lg 4^2} \cdot (2)^{\lg 4^2}$$

$$2^{\lg 4^2} = (2y)^{\lg 2}$$

$$(y^2)^{\lg 2} = (2y)^{\lg 2}$$

$$y^2 = 2y$$

$$y = 2 \Rightarrow x = -4$$

$$\frac{(x+4)^2 \lg x^2}{(x+4)^2 \lg x+1} =$$

$$7 \cdot 6 - 5 = 30 - 7 = 23$$

$$7 - 5 = 2$$

$$y = x+4 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{(x+4)^2} \lg(x+4)^2 = (-x)^{\lg(1-x(x+4))}$$

$$\frac{x^2}{(x+4)^2} \lg(x+4)^2 = (-x)^{\lg(4-x)} + \lg(x+4)$$

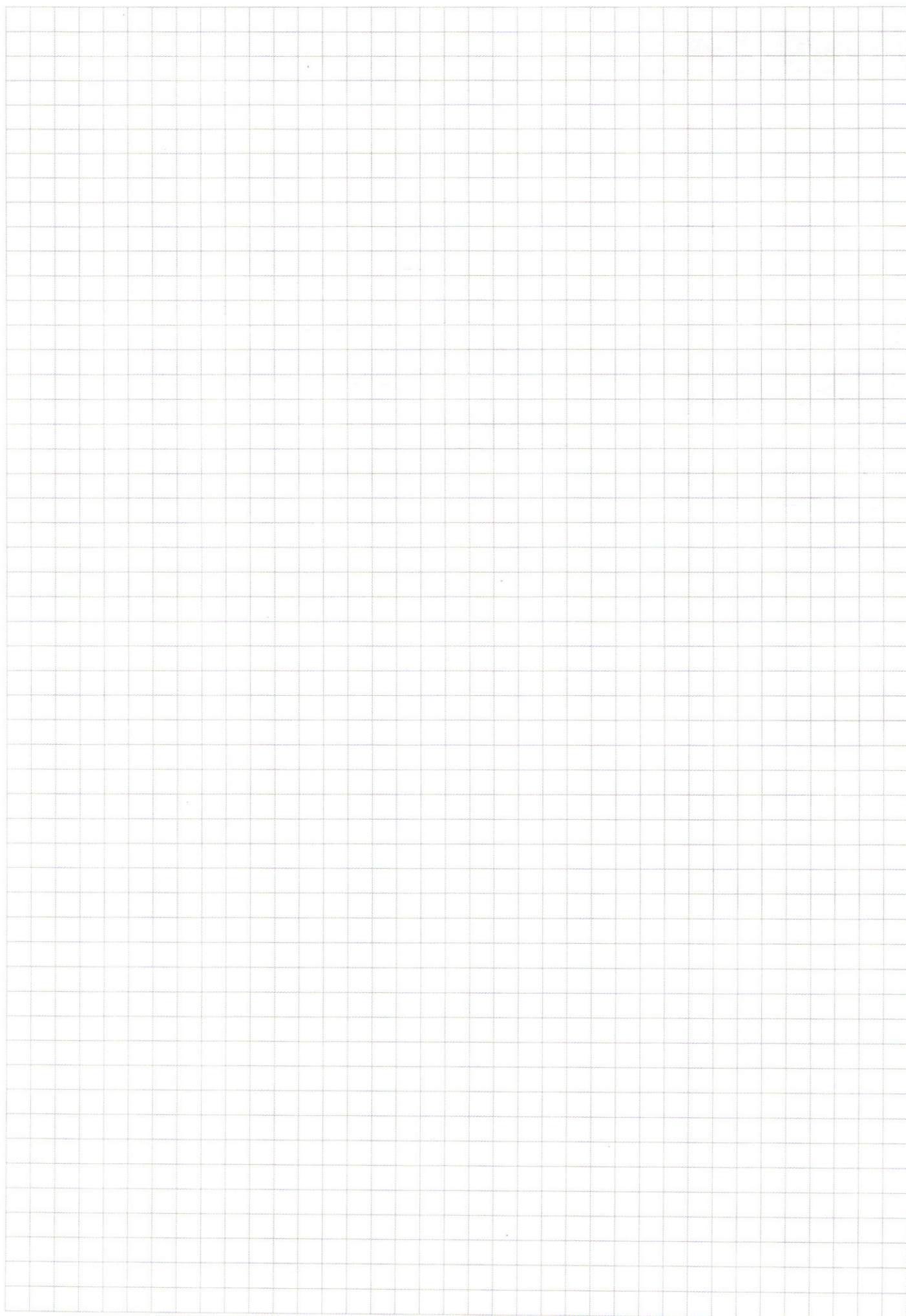
$$\frac{x^2}{(x+4)^2} \lg(x+4)^2 = (-x)^{\lg(4-x)} (-x)^{\lg(x+4)}$$

$$\frac{(x+4)^2 \lg x^2}{(x+4)^2 \lg x+1} =$$

$$2^{\lg 500} =$$

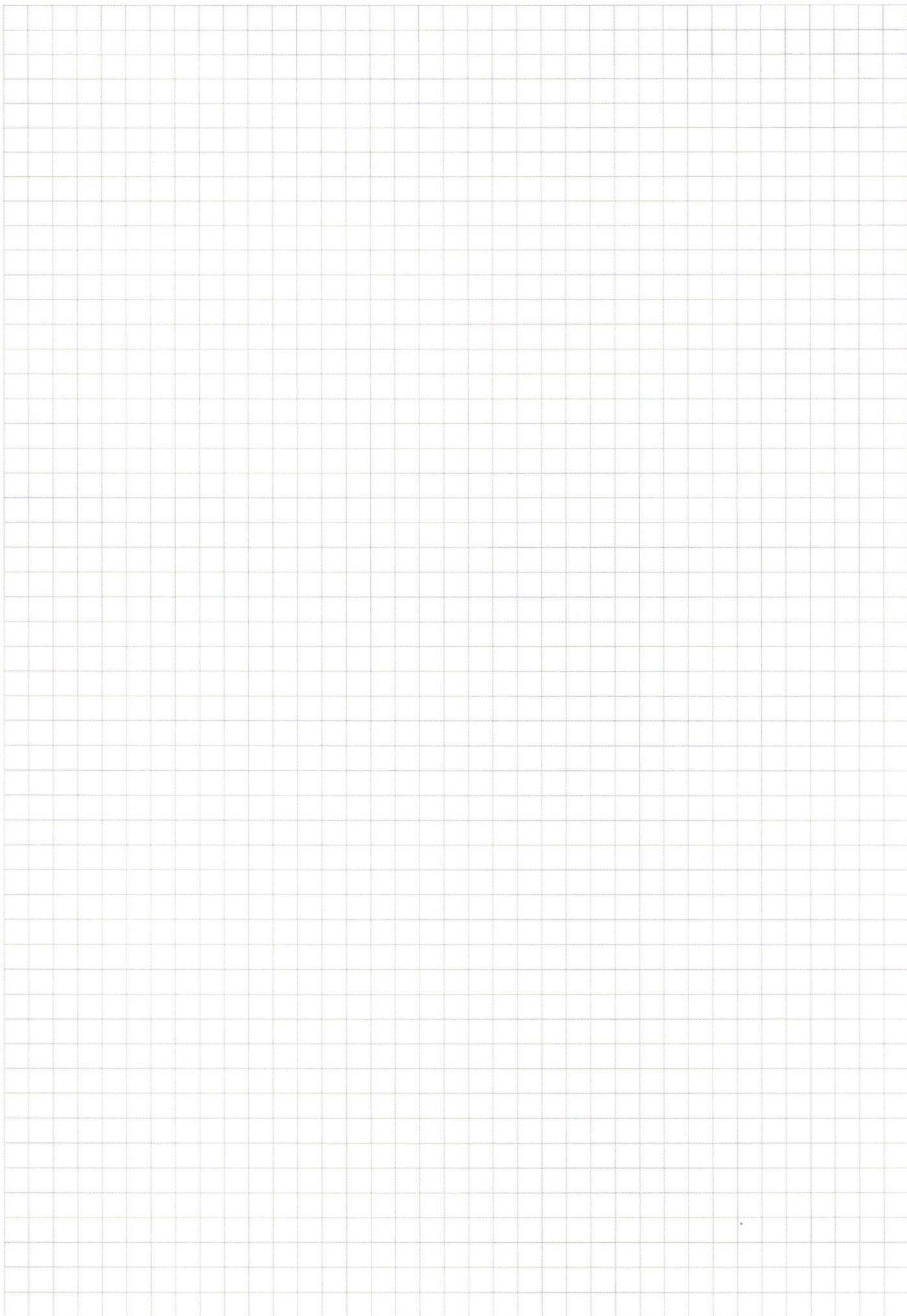
$$2^{\lg 400} = \sqrt{2}$$

$$2^{\lg 80} = 2^{\frac{1}{2}}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

