

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$n=2$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 20x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos \frac{7x+3x}{2} - \cos \frac{7x-3x}{2} = \sqrt{2}$$

$$2 \cos \frac{7x+3x}{2} \cdot \cos \frac{7x-3x}{2} - \cos \frac{7x-3x}{2} = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin \frac{7x+3x}{2} \cdot \cos \frac{7x-3x}{2}$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cos 2x - \cos^2 5x + \sin^2 5x = \sqrt{2} \sin 5x \cos 2x \quad (*)$$

Если $\cos 5x = 0$, то $x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$\sin 5x = \pm 1$; $\sin^2 5x = 1$; $\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}n)$,

тогда рассмотрим уравнение:

$$1 = \sqrt{2} \cos 2x; \cos 2x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = x_2; \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k; 4+8n = 5+10k$$

(1) $10k - 8n = -1$, -1 не дел. на $\text{НОД}(10, 8) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ уравнение (1) не имеет решений, $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \cos 5x \neq 0$, тогда разделим

уравнение (*) на $\cos^2 5x$ получим:

$$\sqrt{2} \frac{\cos 2x}{\cos 5x} - 1 + \tan^2 5x = \sqrt{2} \tan 5x \frac{\cos 2x}{\cos 5x}$$

$$(\tan 5x - 1)(\tan 5x + 1) - \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\cos 5x} (\tan 5x - 1) = 0$$

$$(\tan 5x - 1)(\tan 5x + 1 - \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\cos 5x}) = 0$$

$$[\tan 5x = 1]$$

$$\tan 5x + 1 - \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\cos 5x} = 0 \quad (2)$$

$$(2) \tan 5x + 1 - \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\cos 5x} = 0 \mid \cdot \cos 5x \neq 0$$

$$\sin 5x + \cos 5x - \sqrt{2} \cos 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos(5x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 2x$$

$$\cos(5x - \frac{\pi}{4}) = \cos 2x; \cos(5x - \frac{\pi}{4}) - \cos 2x = 0$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = 2x + 2\pi n$$

$$-2 \sin \frac{5x - \frac{\pi}{4} + 2x}{2} \cdot \sin \frac{5x - \frac{\pi}{4} - 2x}{2} = 0$$

$$\sin(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\sin(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi n \\ \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi k \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{2}{7}\pi n \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \end{cases}$$

$$(3) \operatorname{tg} 5x = 1 \Rightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + \pi t, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}t$$

Итого, получили:

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k, n, k, t \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}t$$

Ответ: $\frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n; \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k; \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}t.$

~ 1

$$A = 16875 = 5 \cdot 3375 = 25 \cdot 675 = 25^2 \cdot 27 = 5^4 \cdot 3^3$$

x - восьмизначное число

Произведение всех цифр числа x должно равняться A . Т.к. A в своем разложении на простые множители

только 7 цифр: четыре 5 и три 3, то, чтобы выполнялось ум. задание

x должно состоять из четырех 5,

трех 3 и одной 1. Вариантов расстано-

вочной 1 8, т.к. x - восьмизначное. Вариантов

расстановки четырех 5 оставшихся 7

разрядов: C_7^4 . И третий расстановочный

вариант. Значит всего чисел $8 \cdot C_7^4 = \frac{8!}{4! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 =$

$= 280$ Ответ: 280.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad (1) \quad \text{Отз: } \begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases} \\ & [2y^2 - xy - x^2 - 4x + 8y = 0] \quad (2) \\ & (1) \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}; \quad \frac{x^4 \lg y}{y^2 \lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y} \\ & y = 10^{\lg y}; \quad (-x) = 10^{\lg(-x)}; \quad (-x)^3 = +10^{3\lg(-x)} \\ & \frac{x^4 \lg y}{(-x)^{\lg y}} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot y^{2\lg y}; \quad (-x^3)^{\lg y} = 10^{\lg^2(-x)} \cdot 10^{2\lg^2 y} \\ & 10^{3\lg(-x)\lg y} = 10^{\lg^2(-x) + 2\lg^2 y} \\ & 3\lg(-x) \cdot \lg y = \lg^2(-x) + 2\lg^2 y \\ & 2\lg^2 y - 2\lg(-x)\lg y - \lg^2(-x) + \lg^2(-x) = 0 \\ & (\lg y - \lg(-x))(2\lg y - \lg(-x)) = 0 \\ & \begin{cases} \lg y = \lg(-x) & y = -x & (3) \\ \lg y^2 = \lg(-x) & y^2 = -x & (4) \end{cases} \\ & \text{подставим (3) в (2):} \\ & 2x^2 + x^2 - x^2 - 4x + 8x = 0; \quad 2x^2 + 4x = 0; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \\ & \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{не подходит по Отз} \end{aligned}$$

подставим (и) в (2)

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$y(y^3 - y^2 - 6y + 8) = 0 \quad | : y \neq 0$$

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

$y = 2$ - корень, тогда воспользуемся
свойством теоремы Виета для нахождения
остальных корней

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & -6 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

$$(y-2)(y^2+y-4)=0$$

$$\begin{cases} y=2 \\ y^2+y-4=0 \end{cases} \rightarrow (*) \quad y^2+y-4=0$$

$$D=17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}, \quad y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \notin \mathbb{R}_+, \quad \Rightarrow y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ - не корень}$$

то получим:

$$\begin{cases} y=2 \\ x=-4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = -\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (2, 2); (-4, 2); \left(-\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2, \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right).$$

~ 5

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12 \quad (1)$$

$$((x-6)^2 + (y-8)^2 = a \quad (2)$$

при каких a сист. имеет 2 р-ка.

Будем решать графическим методом.
из урав. (2) $\Rightarrow a \geq 0$

(2) ~~на~~ - на п-ти $\mathbb{R}^2$ это урав.

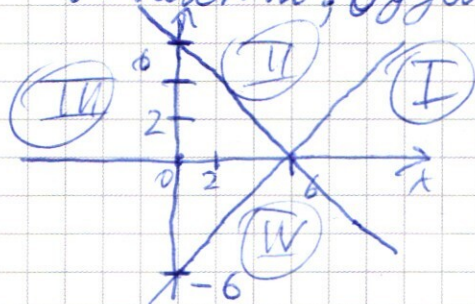
задает 4 окр. с центрами $(6; 8); (-6; 8);$
 $(-6; -8); (6; -8)$ и радиусами $\sqrt{a}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.5 (продолжение)

Для каждого уравн. (1):

$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$, чтобы сгруппировать
работают проведем прямые $y = x-6$
 $y = 6-x$, т.е. по Оху разобьем на 4
области, будем работать в этих областях.



Получены области
обозначены на рисунке.
прям. уравн. (1)

$$|y - (x-6)| + |y - (6-x)| = 12$$

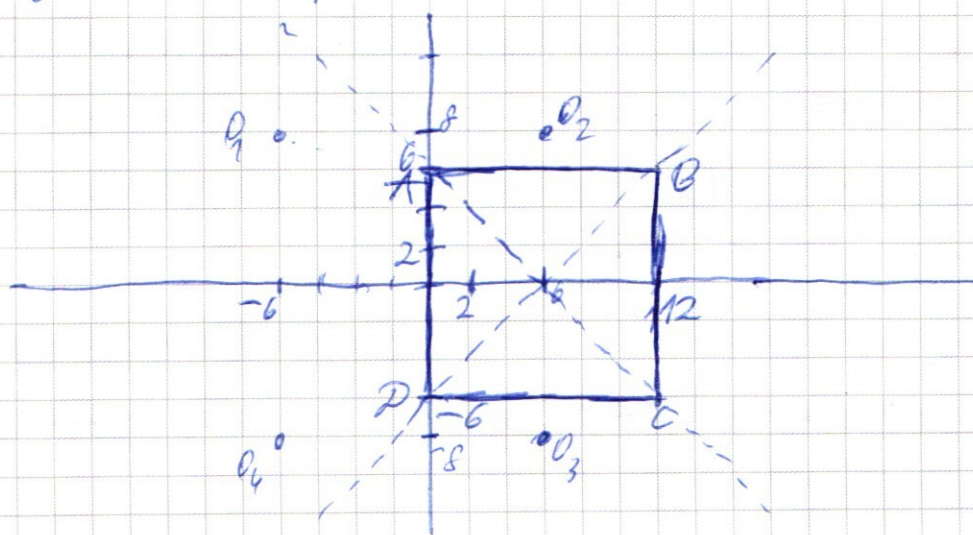
I: $x-6-y+y-6+x=12; x=12$

II: $y-x+6+y-6+x=12; y=6$

III: $6-x-y+y-x+6=12; x=0$

IV: $x-6-y+6-x-y=12; y=-6$

Получим рисунок:



т.о. получим, что упр. (1) задан
 квадратом ~~то есть~~ $ABCD$. O_i - центр
 окр., кот. задан упр. (2).

Данная система ~~окр.~~ W_i - окр. ($O_i; \sqrt{a}$)
~~и W_2, W_3 - симметричны относительно Ox .~~

W_2, W_3 и $ABCD$ - симметричны относ. Ox ,
 значит если W_2 пересек. $ABCD$, то и W_3
 пересекает его столько же раз.

Тогда система будет иметь ровно
 2 р-ма, когда W_2 и W_3 - будут кас. $ABCD$
 соот. Это выполн. при $\sqrt{a} = 2; a = 4$

если $a < 4$, то $R < \sqrt{2}$ и при этом окр. не
 пересекается с $ABCD$. Если
 ~~$a \in (4; 196)$; $R \in (2; 14)$~~ , то W_2 и W_3
 имеют минимум 3 общ. точки.

Кв., значит эта вариация не
 подходит. $R_2 = \sqrt{(6-12)^2 + (6-(-8))^2} = \sqrt{232}$

Теперь рассмотрим окр. W_4 и W_5 ,
 они кас. симм. относ. Ox , значит
~~они кас-ся~~ кас-ся тем же кв. W_4 и кв. W_5
 кас., значит могут касаться, когда W_2
 и кв. имеют 1 общ. точку, это значит.

при $R = 0, C = \sqrt{(-6-12)^2 + (8-(-6))^2} = \sqrt{18^2 + 14^2} =$
 $= \sqrt{520}$, при таком R W_2 и W_3 не пересекают кв., а
 W_4 и W_5 имеют 2 общ. точки. ~~это кв.~~
 значит $a = 520$, подходит.

Ответ: $4; 520$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

no

Darwin

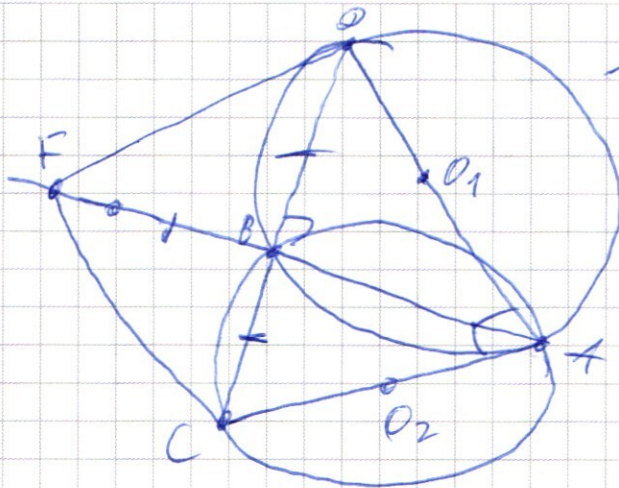
$$R = 73$$

$$\angle C \neq 90^\circ$$

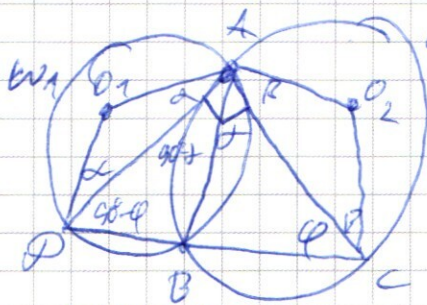
$$BF + CD$$

$$B \in \mathcal{Q}$$

$$BF = C\emptyset$$

$$a) CF = 2$$
$$\oint_{\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \frac{d}{dt} \int_C \rho \, dV = ?$$


— рисунок (1)
основной



функция Φ
вспомогательные
(O_1 и O_2 - центры Okp)

ω_2 а) 1) формула с рик. 2)

(Все ушло на рис.), тогда

$$\therefore AC = -AB + -BC = 24 + 2j$$

$$\angle M_1 C L = \angle A O_2 C = 150^\circ - 2R,$$

T.O. $\varphi + \psi + \beta = 200^\circ$ (в Окр. ω_2)

2) b) $\vec{OK}_2 \cdot \vec{w}_1 : \angle D = \angle A + \angle B = 180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\alpha$

W.M.U. $\sim AD = \angle A O_1 D = 180^\circ - 2\alpha$, T.O. $\angle \theta + \angle \phi - \alpha = 90^\circ$

Находим: $\alpha + \beta = 90^\circ$
 $\alpha + \beta - \alpha = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ$

возможно, если $\alpha = \beta = 0$, т.е. O_1 лежит на

АД в O_2 алюмин MA AC , $T. e.$ ~~АД~~ $ADAC$ - CH_3 .

3/π.o. halghamm, tmo $A (= R = A \rho =)$

$\Rightarrow \varphi = \delta = 45^\circ$, T. l. $\neq DC - (21^\circ) \Rightarrow AB$ -Pincer. T. l.

Вне. и внутр. Т.О. АЕВФ.

~~4) б~~ 4) б. $\triangle FBD$, $BF = BD$ $\Rightarrow \angle D = \angle F = 45^\circ$
 $\angle B = 90^\circ$

5) б $\triangle CFD$, FD — бис. и мед. $\Rightarrow \triangle CFD$ — р.д.,
 $CF = FD$

~~6) М.О. найдем, что $\triangle CFD$ — р.д., т.к.~~

6) из п. 4, 5 $\Rightarrow \triangle CFD$ — р.д. и р.д. $\angle F = 90^\circ$

7) М.О. из $\triangle ACD$ и $\triangle CFD \Rightarrow CF = \frac{DC}{\sqrt{2}} = \frac{AC\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = AC =$
 $= 2R = 26$

8) $S_{ACF} = \frac{1}{2} BC \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot 13\sqrt{2} \cdot 26\sqrt{2} = 169 \cdot 2 =$
 $= 338$

Ответ: 26 и 338.

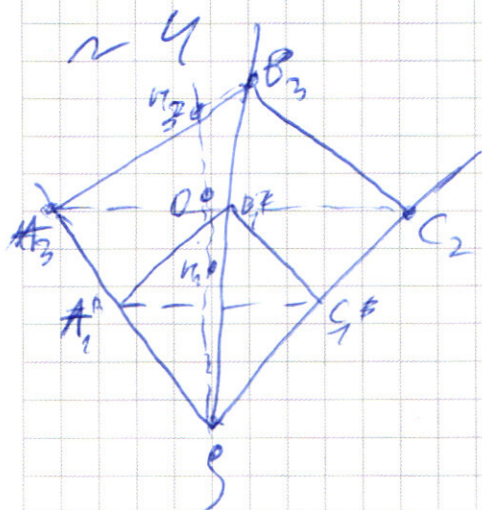
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta + 180^\circ = 180^\circ - \alpha$
 $\alpha + \beta = 90^\circ$
 $\alpha + \beta + \beta = 90^\circ$
 $\alpha = -\beta = 0$

$2\alpha + 2\beta = 180^\circ - 2\beta$
 $\alpha + \beta + \beta = 90^\circ$
 $2\alpha + 2\beta = 180^\circ - 2\beta$

$\alpha + \beta = 90^\circ$
 $\alpha + \beta = 90^\circ$
 $\alpha = -\beta = 0$

$k = \frac{3}{2}$ $\frac{r_{M1}}{r_{M2}} = \frac{2}{3}$ $\frac{r_{M1} + 2R}{r_{M1}} = \frac{3}{2}$
 $1 + \frac{2R}{r_{M1}} = \frac{3}{2}$ $\frac{2R}{r_{M1}} = \frac{1}{2}$
 $r_{M1} = 4R$ $\left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot 4 = \frac{25}{4}$



~~Решение~~

1) $(A_1B_1C_1D_1)$ и $(A_2B_2C_2D_2)$ — параллельные, ком. как центры и перпендикулярны SO , т.е. $SO \perp (A_1B_1C_1D_1) = M_1$ и $SO \perp (A_2B_2C_2D_2) = M_2$, тогда $OM_2 = OM_1 = R$ и $OM_1 \perp (A_1B_1C_1D_1)$ и $OM_2 \perp (A_2B_2C_2D_2)$

2) тогда ~~мы имеем~~ $A_1B_1C_1D_1 \sim A_2B_2C_2D_2$
 ~~$k = \frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \left(\frac{S_{A_2B_2C_2D_2}}{S_{A_1B_1C_1D_1}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{4} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow$~~

$$\Rightarrow \frac{SM_2}{SM_1} = \frac{3}{2} = \frac{SM_1 + 2R}{SM_1} = 1 + \frac{2R}{SM_1}, \text{ т.е. } SM_1 = 4R$$

3) $OK \perp (A_1A_2C_1)$; $OL \perp (A_1A_2B_2)$ и $OM \perp (C_1B_2C_2)$, тогда Т. К, $OM \perp$ плоск. параллельные.

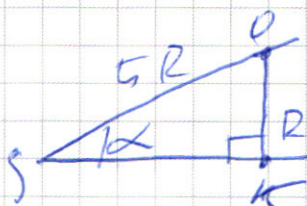
$A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ — параллельные, тогда $A_1B_1C_1D_1 \sim A_2B_2C_2D_2$

$A_1B_1C_1D_1$ — ком. Т. перпендикуляр с сторонами

$$\text{Где } S_{A_2B_2C_2D_2} = S_{A_1B_1C_1D_1} \cdot \left(\frac{A_2B_2}{A_1B_1} \right)^2 =$$

$$= S_{A_1B_1C_1D_1} \cdot \left(\frac{SM_2 + R}{SM_1} \right)^2 = 4 \cdot \left(\frac{5}{4} \right)^2 = \frac{25}{4}$$

Из т. К (КСО):

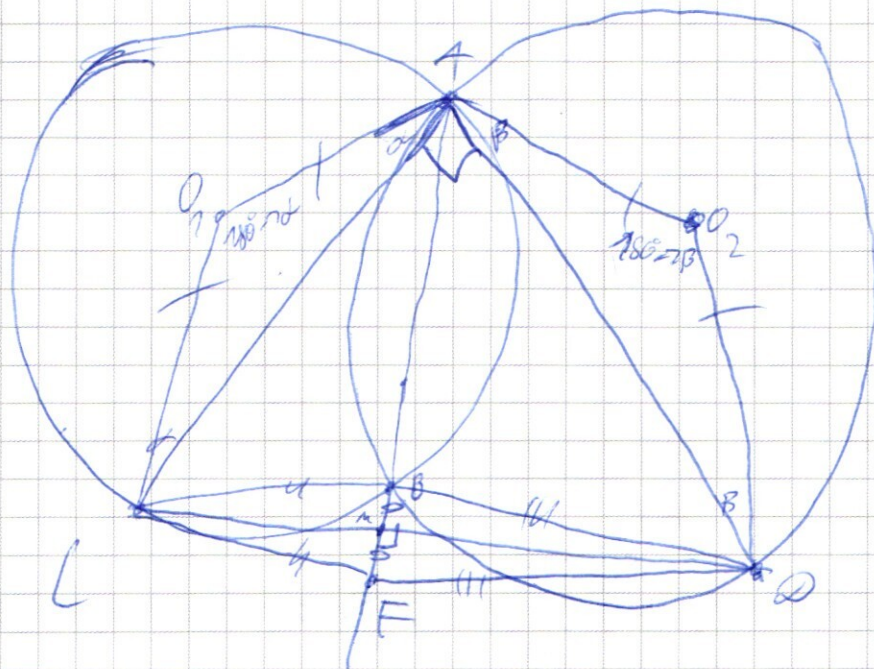


$$\angle KSO = 2 = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$OK = R, \text{ т.к. } K \text{ — Т. К. } C.$$

Ответ: $\frac{25}{4}$ и $\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$.

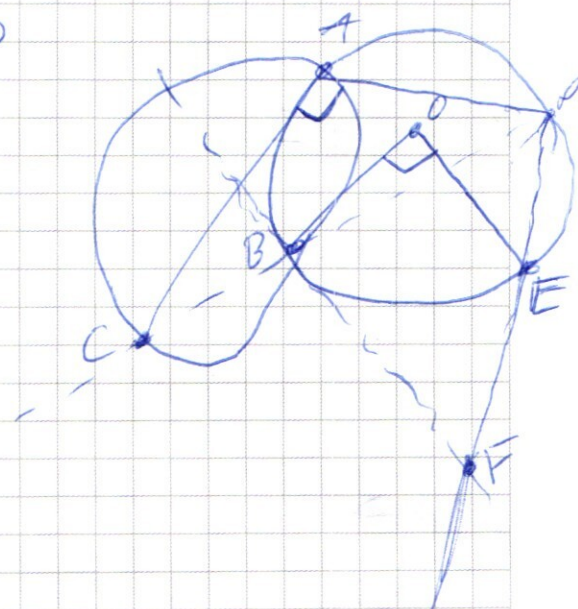
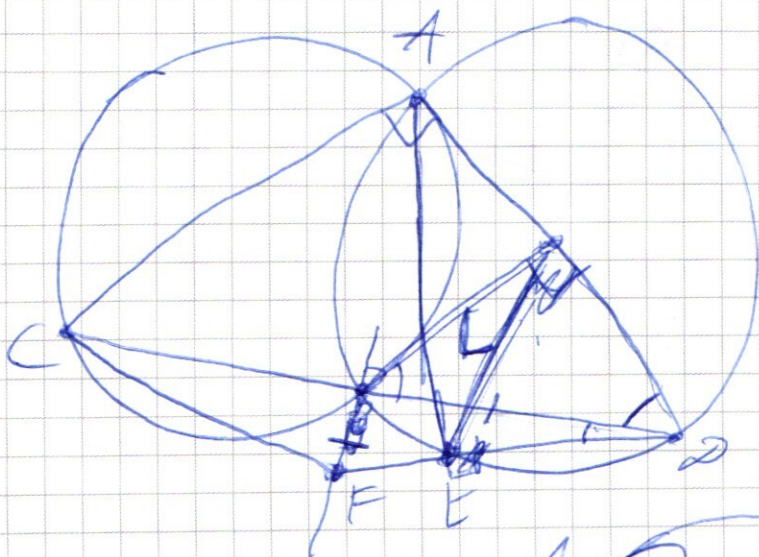
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



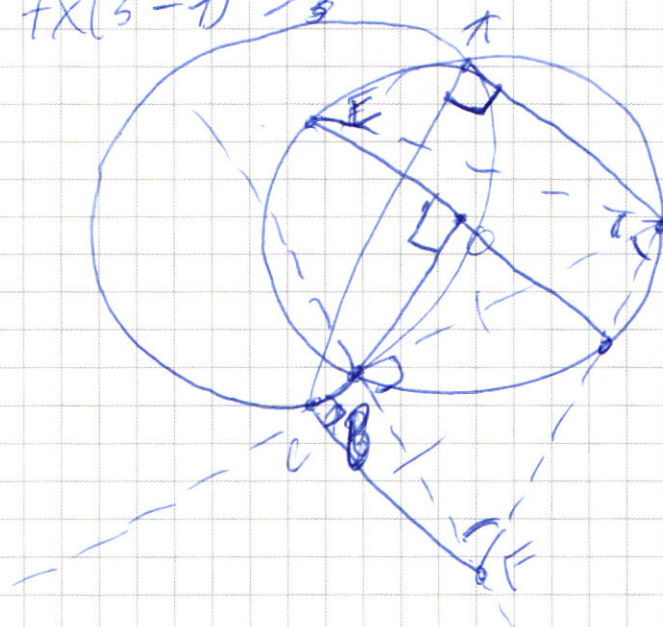
$$AD = R\sqrt{2(1+\cos 2\beta)}$$

$$AC = R\sqrt{2(1+\cos 2\alpha)}$$

$$CD = R\sqrt{2(2+\cos 2\alpha+\cos 2\beta)}$$



$$85 - 4 \cdot 3^{81} + x(3^{81} - 1) > 3^x$$



$$3^{81} - 1 = 3^x \ln 3$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$85 + (3^{81} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

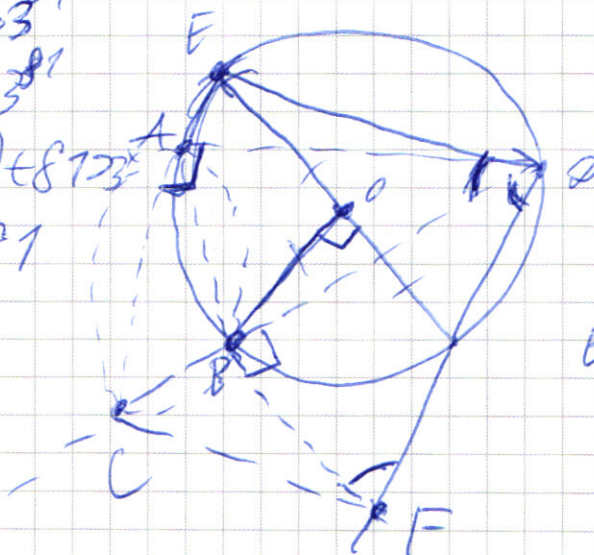
$$85 + 3^{81}x - x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$3^{81}(x - 4) - (x - 4) + 85 > 3^x$$

$$(x - 4)(3^{81} - 1) > 3^x - 85$$

$$L(x) = ?$$

$$R = 13$$



$$BF = BD$$

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

$$y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$85 + (3^{81} - 1)x = 0$$

$$x = \frac{85}{3^{81} - 1}$$

$$85 = 5 \cdot 17$$

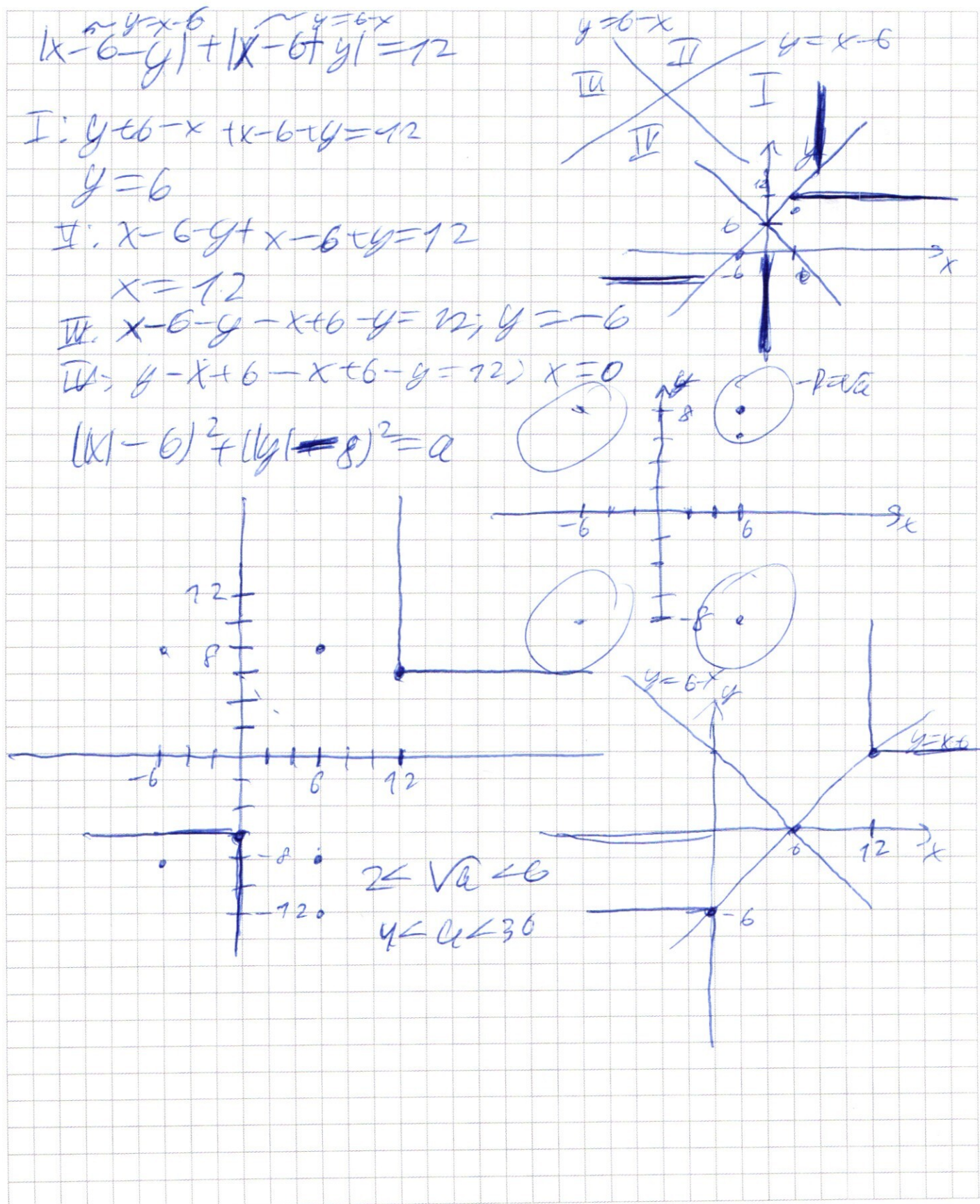
$$3^{81} = 3^{3^4} = 27^4 - 1 = 28 \cdot 26 \cdot 27^2 \cdot 1$$

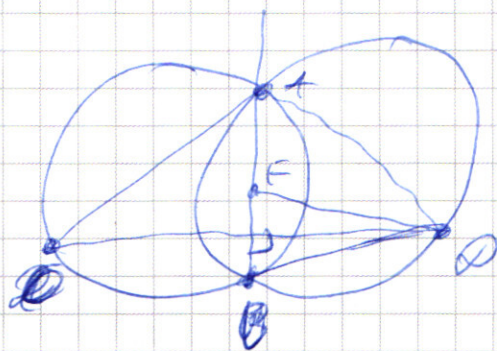
$$\frac{x^4 \ln x}{x^4 \ln x} = \frac{y^2 \ln y}{y^2 \ln y}$$

$$\frac{x^4 \ln x}{x^4 \ln x} = (-x) \ln(-x) \cdot (-x) \ln(-x)$$

$$\frac{x^4 \ln x}{x^4 \ln x} = (-x y^2) \ln(-x y^2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



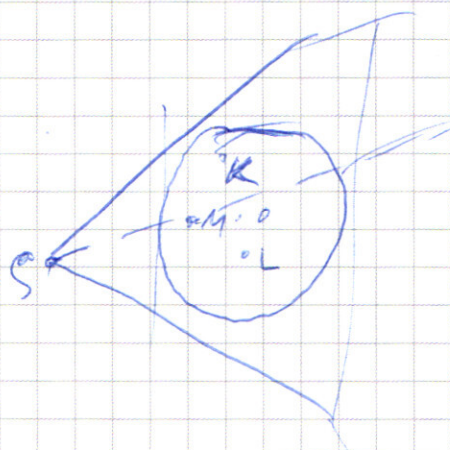
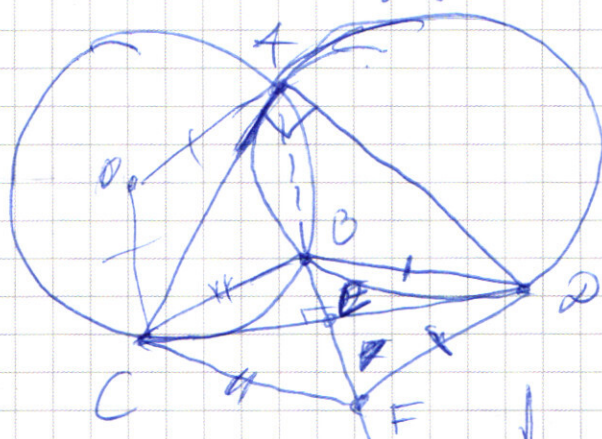
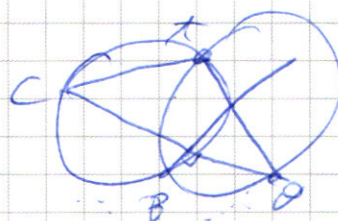


$$\angle C + D = 90^\circ$$

$$BF = BD$$

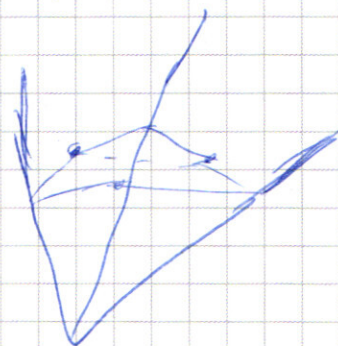
$$R = 13$$

$$CF = ?$$



$$\angle K 90^\circ \rightarrow$$

$$K = ?$$



$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\log y} = (-x)^{\log(-xy)} = (-x)^{\log(x) + \log(-1)} = (-x)^{\log(x)} \cdot (-1)^{\log(-1)}$$

$$\Rightarrow \log(-x)^{\log y} = \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}y - 1\right)^2 =$$

$$= \left(x + \frac{4}{2} - \frac{3}{2}y + 1\right) \left(x + \frac{4}{2} + \frac{3}{2}y - 1\right) =$$

$$2y^2 - 8y - x^2 - 4x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x - y + 1) / (x + y - 1) =$$

$$x^2 - 4x = 2y^2 - 8y - 8y$$

$$= 4x - 5y + 1$$

$$x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2xy + \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4} - 4x = 2y^2 - 8y$$

$$\left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - 4x = \frac{y^2}{4} - 8y + 1 - 1$$

$$\left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - 4x = \left(\frac{3}{2}y - 1 - \frac{1}{2}y\right) \frac{y^2}{4} - \frac{3}{2} \cdot 2y - 5y + 1 - 1 = \left(\frac{3}{2}y - 1\right)^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\int \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\ln y} = (-x)^{\ln y} (-xy)$$

$$x^{\ln x} = \frac{1}{10} \ln x = \frac{1}{10} \ln x$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$\ln y - xy = \ln y - x + \ln y$$

$$2y - x - \frac{x^2}{y} - 4\frac{x}{y} - 8 = 0$$

$$2y - x = \frac{x^2}{y} - 4\frac{x}{y} + 4 + 4 = \left(\frac{x^2}{y} - 2 \right)^2 + 4$$

$$2y - x - 4 = \left(\frac{x^2}{y} - 2 \right)^2$$

$$-(x-2)^2 - 4 + 2(y-2)^2 + 8 - xy = 0$$

$$2(y-2)^2 - (x-2)^2 = xy - 4$$

$$(-x)^{\ln y - xy}$$

$$x^{\frac{\ln x}{\ln 10}} = x^{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{\ln 10} = e \cdot x^{\ln x} = e = e \cdot x^{\ln x}$$

$$(-x)^{\ln y - xy} = -x^{\ln y - xy}$$

$$26875 = 5 \cdot 3375 = 25 \cdot 675 = 25^2 \cdot 27 = 5^4 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r} 26875 \\ \underline{25} \\ 1875 \\ \underline{15} \\ 375 \\ \underline{25} \\ 125 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 4! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$$

$$\cos 7x - \sin 7x - \sqrt{2} \cos 10x = \cos 3x - \sin 2x = 0$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x) + \sqrt{2} (\cos x + \sin x)$$

$$\cos(7x + \frac{\pi}{4}) - \cos 10x + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos x + \cos 3x = 2 \cos \frac{x+3x}{2} \cdot \cos \frac{x-3x}{2}$$

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} =$$

$$2 \cos(\frac{10x + \pi}{2}) \cdot \cos 2x = \cos 10x \quad \sqrt{2} \sin$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$2 \cos(5x + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos 2x = \cos 10x$$

$$\sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) \cdot \cos 2x = \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cos 2x + \sin 5x \cos 2x = \cos 10x$$

н 5

$$|x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12$$

$$x \geq 6$$



$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$\cancel{2} \cos 5x \cdot \cos 2x - \cos^2 5x + \sin^2 5x = \sqrt{2} \sin 5x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \frac{\cos 2x}{\cos 5x} - 1 + \tan^2 5x = \sqrt{2} \tan 5x \cdot \frac{\cos 2x}{\cos 5x}$$

$$\tan^2 5x - \sqrt{2} \tan 5x \cdot \frac{\cos 2x}{\cos 5x} + \sqrt{2} \frac{\cos 2x}{\cos 5x} - 1 = 0$$

$$\cancel{2} (\tan 5x - 1) (\tan 5x + 1) + \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\cos 5x} (1 - \tan 5x) = 0$$

$$(1 - \tan 5x) (\frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\cos 5x} - 1 - \tan 5x) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$\cancel{8} + 16n = 10 + 20k; \quad 20k - 16n = -2$$

$$1 + 2n = \frac{5}{4} + \frac{5}{2}k; \quad 4 + 8n = 5 + 10k$$

$$8n - 10k = 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\ln y} = (-x)^{\ln(-xy)}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\ln y} = (-x)^{\ln(-xy)}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\ln y} = (-x)^{\ln(-xy)}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\ln y} = (-x)^{\ln(-xy)}$$

$$\frac{x^4 \ln y}{y^2 \ln y} = (-x)^{\ln(-xy)}$$

$$(x \ln y)^4 = (y \ln y)^2 \cdot (-x)^{\ln(-xy)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$y(2y - x) - x^2 - 4(2y - x) - 8x = 0$$

$$(2y - x)(y - 4) = x(x - 8)$$

$$x^2 - x(y + 4) + 2y(y - 4) = 0$$

$$D = (y + 4)^2 - 8y(y - 4) = y^2 + 8y + 16 - 8y^2 + 32y = -7y^2 + 40y + 16$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 2y(y - 4) \\ x_1 + x_2 = y + 4 \end{cases}$$

$$\frac{x^4 \lg y}{y^2 \lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$y = 10^{\lg y}$$

$$(10^{\lg y})^2 \lg y = 10^{2 \lg y}$$

$$(-x)^{\lg(-x)} = 10^{\lg^2(-x)}$$

$$x = 10^{\lg x}$$

$$\frac{x^4 \lg y}{(-x)^{\lg y}} = 10^{2 \lg^2 y + \lg^2(-x)}$$

$$-x = 10^{\lg x}$$

$$(-x)^3 = -x^3$$

$$(-x^3)^{\lg y} = 10^{2 \lg^2 y + \lg^2(-x)}$$

$$10^{3 \lg x \cdot \lg y} = 10^{2 \lg^2 y + \lg^2(-x)}$$

$$2 \lg^2 y + \lg^2(-x)$$

$$10^{3 \lg x \cdot \lg y} = 10^{2 \lg^2 y + \lg^2(-x)}$$

$$3 \lg x \cdot \lg y = 2 \lg^2 y + \lg^2(-x)$$

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$a \neq 1$$

$$a =$$

$$2a(a-b) - (a-b)^2 = 0$$

$$\begin{cases} a_1 a_2 = \frac{b^2}{2} \\ a_1 + a_2 = \frac{3}{2} b \end{cases}$$

$$b; \frac{b}{2}$$

$$2a(a-b) - ab + b^2 = 0; \text{ так } a-b \neq b(a-b) \neq 0$$

$$(a-b)(2a-b) = 0$$

$$\lg$$

$$(6; 8)$$

$$\sqrt{6^2 + 14^2} = \sqrt{232}$$

$$(12; -6)$$

$$36 + 196$$

$$4(87 + 119) = 4 \cdot 206 = 824$$

$$130$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 20x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 20x = \cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x$$

$$\cos 4x (1 - \sqrt{2} \cos 3x) + \cos 3x = \sin 7x (1 + \sqrt{2} \sin 3x) + \sin 3x$$

$$1 - \sqrt{2} \cos 3x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \frac{\pi}{4} - \cos 3x)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} =$$

$$= -2 (\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2}) (\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2}) =$$

$$= -2 (\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}) =$$

$$= -2 (\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2})$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}; \quad -2 \left(\frac{1 - \cos \alpha}{2} \cdot \frac{1 + \cos \beta}{2} - \frac{1 + \cos \alpha}{2} \cdot \frac{1 - \cos \beta}{2} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} (1 + \cos \beta - \cos \alpha - \cos \alpha \cos \beta - 1 - \cos \alpha + \cos \beta + \cos \alpha \cos \beta) =$$

$$= \cos \alpha - \cos \beta$$

$$-2 \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi + 3x}{2} \sin \frac{\pi - 3x}{2} \neq \cos 3x = \frac{2 \sin \frac{3x + \pi}{2} \cos \frac{3x - \pi}{2}}{\sqrt{2}} + \sin 3x$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sqrt{2} \sin \frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \sin 7x + \sqrt{2} \cos 7x \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 3x}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} \neq \sqrt{2} \sin (3x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \sin (3x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin (\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2}) \sin (7x + \frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2}) + \sin (3x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sin (\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2}) \cdot 2 \sin (\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}) \cos (\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2})$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 7x + \frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} \quad \text{и } \alpha = 7x + \frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} + \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} =$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{3x + \frac{\pi}{2}}{2} = 7x + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8} + \frac{\beta}{2} = 7x + \frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}; \beta = 4x$$

$$-\frac{1}{2} \left(\cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x \right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{2} \cos 7x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin 7x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 4x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x = 0$$

$$-\cos 7x + \sin 7x + \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 3x - \cos 3x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos\left(10x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos 10x = \sin x \cdot \cos x =$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = \sin x \cdot \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) =$$

$$-\sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} \sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 10x = -\sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \sin\left(\frac{10x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{-4x}{2}\right) = -\cos 10x$$

$$2 \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos 2x = -\cos 10x$$

$$\sqrt{2} (\sin 5x - \cos 5x) \cos 2x + \cos 10x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \cos 10x = \sqrt{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 10x$$

$$-2 \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \sin 2x = \cos 10x$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos 10x + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(\frac{13x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{4x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) =$$

$$= \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)$$