

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

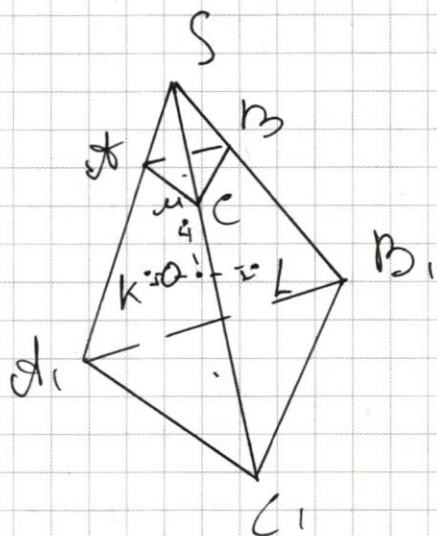
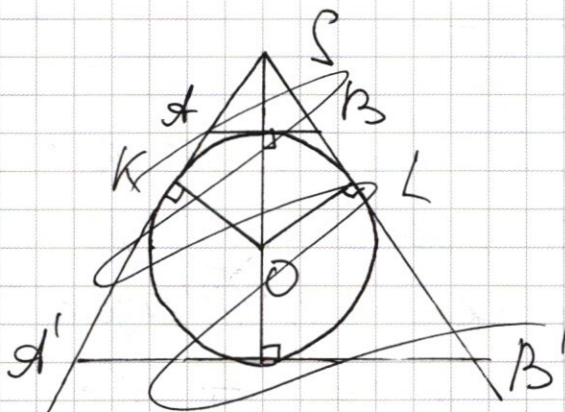
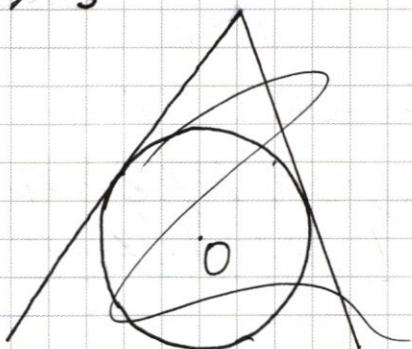
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5



$(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$,
тогда $S_{ABC} \sim S_{A_1B_1C_1}$,
 $k^2 = \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{4}{9}$, $k = \frac{2}{3}$.

У тетраэдра S_{ABC} и $S_{A_1B_1C_1}$ — общий, $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, тогда $S_{ABC} \sim S_{A_1B_1C_1}$. Пусть h и H высоты S_{ABC} и $S_{A_1B_1C_1}$.

$\frac{h}{H} = k$, но $H = h + 2r$, где r — ради-

ус сферы (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ касаются сферы, $(ABC) \perp SO$, $(A_1B_1C_1) \perp SO$

Тогда $\frac{h}{2r+h} = \frac{2}{3}$

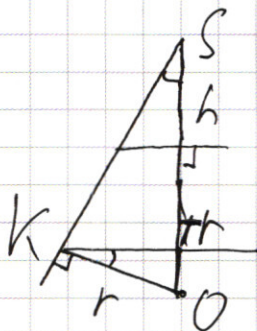
см. обрат

$$3h = 4r + 2h$$

$$h = 4r$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{r}{r+h} =$$

$$= \arcsin \frac{1}{5}$$



$KS = LS = LM$, т.к. явл-я отрез-
ками касат. к сфере, проведен
из одной т. Тогда $(KLM) \parallel (\Delta ABC)$

$(KLM) \cap SO = T$. ST - высота тетра.

$S_2 \Delta B_2 C_2$, где $\Delta_2 B_2 C_2$ - точки пер-я
 (KLM) с ребрами угла.

$$(KLM) \parallel (\Delta ABC) \Rightarrow KT \perp SO, \Rightarrow$$

$$\angle TKO = \angle KSO. TO = KO \sin KSO =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot r.$$

$$R = \frac{ST}{h} = \frac{h+r-\frac{r}{5}}{h} = \frac{4\frac{4}{5}r}{4r} = \frac{6}{5} -$$

коэф-т подобия $S_{\Delta ABC}$ и $S_{\Delta_2 B_2 C_2}$
но тогда $S_{\Delta_2 B_2 C_2} = R^2 \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{36 \cdot 4}{25} =$

$$= \frac{144}{25}$$

Ответ: $\arcsin \frac{1}{5}; \frac{144}{25}.$

И. М. М. М. М. М.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

З1 $16875 = 3^3 \cdot 5^4$ Тогда число состоит
из цифр 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5.
Всего есть C_8^4 разных положений
пятёрок и для каждого из них
 C_4^3 положений трёх троек. Если
мы расставим все тройки и
пятёрки, положение единицы
определяется однозначно.
Тогда всего $C_8^4 \cdot C_4^3 = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{4!}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} =$
 $= 280$ восьмизначных чисел, удо-
влетворяющих усл-ю.

Ответ: 280.

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases} \begin{cases} y > 0 \\ (-xy) > 0 \\ y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

Решим 2-е уравнение системы как
квадратное отн-о y

$$2y^2 - (x+8)y - x^2 - 4x = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (x+8)^2 - 4(-2x^2 - 8x) = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = \\ &= 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2 \\ &\text{им. корни} \end{aligned}$$

$$y = \frac{x+8 \pm (3x+8)}{4}$$

$$\begin{cases} y = x+4 \\ y = -\frac{x}{2} \end{cases}$$

Прим $y = x+2$ $x+4$

$$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right) \log(x+2) = (-x) \log(-x^2-2x)$$

$$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right) \log(x+2) = (-x) \log(-x) \cdot (-x) \log(x+2) / (-x) \log(x+2) \neq 0$$

$$\left(\frac{-x^3}{(x+4)^2}\right) \log(x+2) = (-x) \log(-x)$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{x^3}{(x+4)^2} = -x \\ x+4 = -x \end{cases} \Rightarrow x = -2$$

Прим $y = -\frac{x}{2}$

$$(4x^2) \log(-\frac{x}{2}) = (-x) \log(\frac{x^2}{2})$$

$$(-2x) \log(\frac{x^2}{4}) = (-x) \log(\frac{x^2}{2})$$

$$x \neq 0$$

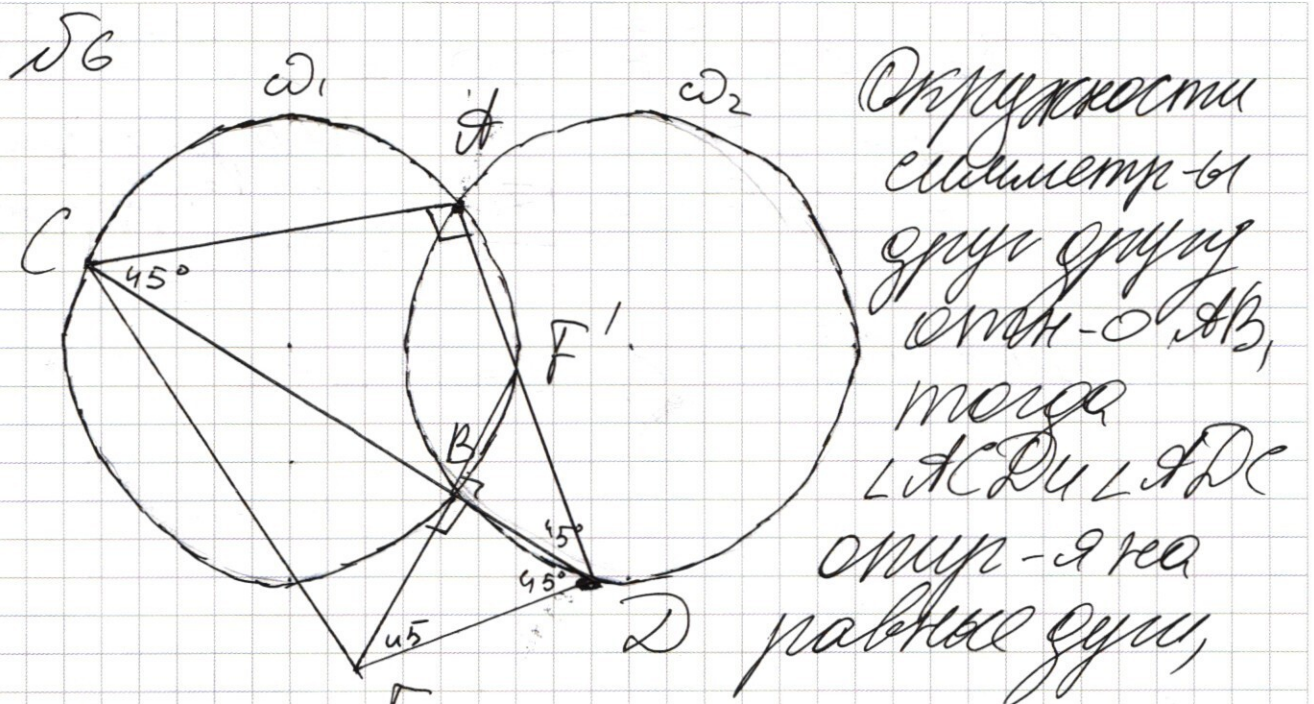
$$\begin{cases} 2x = -x \\ \frac{x}{4} = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$x = 0 - \text{н.к.}, \\ \text{т.к. } x < 0,$$

Ответ: $(-2; 2)$

см. след. лист

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Окружности
симметричны
друг другу
относительно
отн.-о. AB,
тогда
 $\angle ACD = \angle ADC$
отсюда
равные дуги,

тогда $\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$
 $BD = BF \Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$
 симметрично
 Отразим F отн.-о. CD. Тогда
 F сим.-о. F', $F' \in AD$, т.к. CD-
 биссектр. $\angle ADF$. Тогда $\triangle BFD = \triangle BF'D$,
 $\angle BFD = 45^\circ = \angle ACD$. И.о. $\angle CBF'$ вписан,
 Но тогда CF'-диаметр (т.к. $\angle CF'B = 90^\circ$)
 $CF' = 2R = 26$,
 F сим.-о. F' отн.-о. CD, $\Rightarrow \triangle CF'B =$
 $\triangle CF'D$, $CF = CF' = 26$.
 При $BC = 10$ по т. Пифагора
 см. обрат

$$BF = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 = BD$$

$$CD = BC + BD = 10 + 24 = 34$$

$$\text{Потому } AD = AC = \frac{34}{\sqrt{2}} = 17\sqrt{2} \quad (AD = AC,$$

$$\text{т.к. } \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ)$$

$$\angle CAD = \angle ADF = 90^\circ \Rightarrow AC \parallel FD \Rightarrow$$

$$S_{ACF} = \frac{AC \cdot AD}{2} = \frac{17^2 \cdot 2}{2} = 289$$

(AD - расстояние от D до AC, $\Rightarrow$ AD равно высоте $\triangle ACF$ к AC)

$$\text{Ответ: } CF = 26, S_{ACF} = 289$$

см. след. лист



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

$$\sqrt{2} \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 5x \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = \sin 5x \cos 2x = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \cos 2x - (\cos \frac{\pi}{4} \cos 5x + \sin 5x \sin \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \cos 2x - \cos(5x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$-2(\cos 5x - \sin 5x) \sin \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{-3x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x = \sin 5x \\ \sin \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \sin \frac{-3x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n \\ \frac{-3x + \frac{\pi}{4}}{2} = \pi t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5} \\ x = \frac{2\pi n + \frac{\pi}{4}}{7} \\ x = \frac{-2\pi t + \frac{\pi}{4}}{3} \end{cases}$$

$$k, n, t \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$; $x = \frac{2\pi n + \frac{\pi}{4}}{7}$;

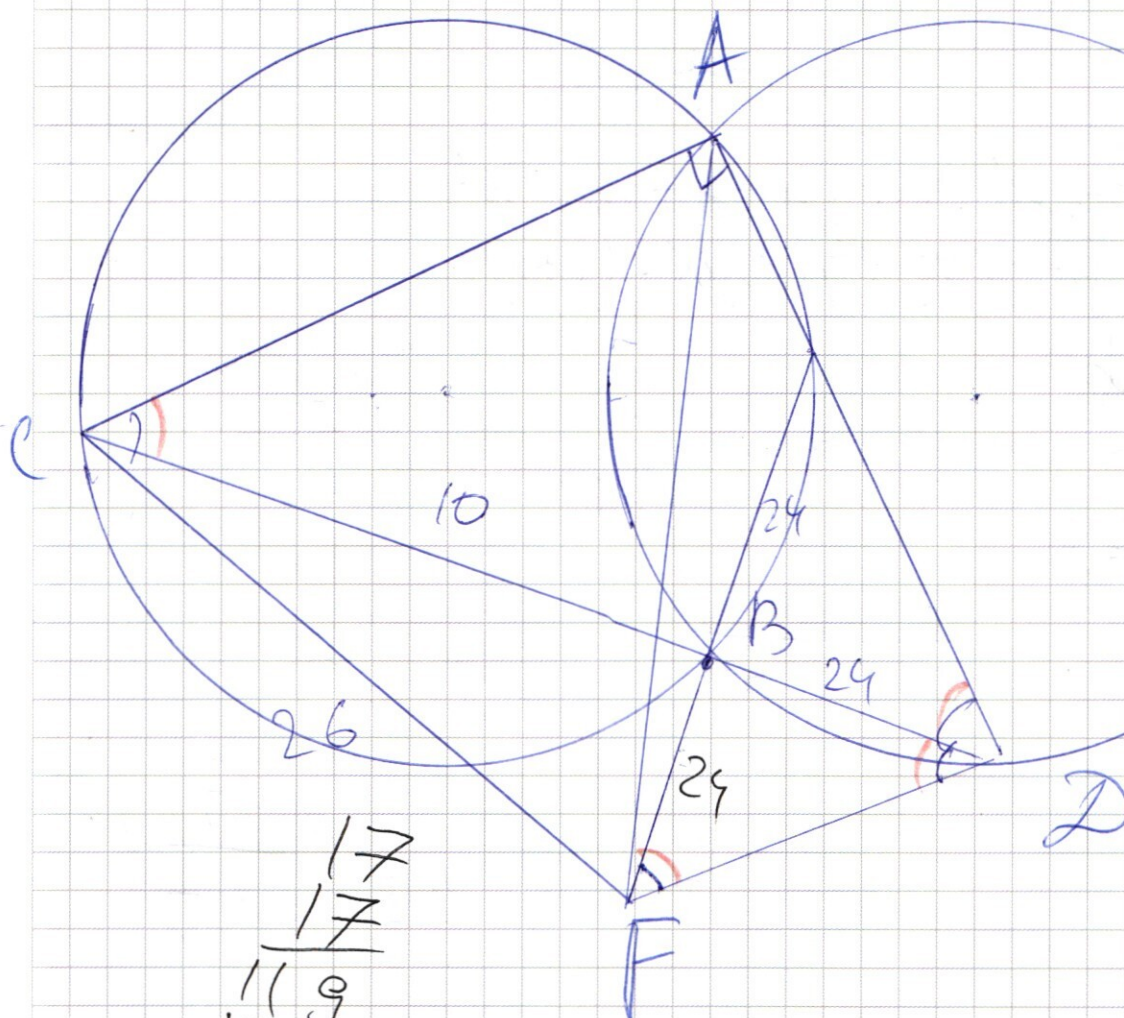
$$x = \frac{-2\pi t + \frac{\pi}{4}}{3}; k, n, t \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

169-225

10-

26/26

$$\begin{array}{r} 26 \\ 26 3 \\ \hline 56 \\ \underline{52} \\ 676 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 480 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \end{array}$$

$$1 = \partial' \mathcal{I} - X$$

$$X - = 2 + X = 8$$

$$X = S$$

~~$$x = \frac{2}{x} - \sqrt{6}$$~~

$$= 9 - x^2 - x^2 - \cancel{x^2} - x^2 - \cancel{x^2} - 8 + x^2 + x^2$$
$$= (2+x)(8-x) - (2+x)(2+x)$$

$$2 = \cancel{8}$$

$$\{ - = X$$

$$b + X = X -$$

$$\sin(x) = \frac{\sin(x-2)}{1}$$

01/10

58 59

$$(x, g(x)) = g_3 \left(\frac{y^2}{-x^3} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{X} + \delta_n \end{pmatrix} (X) = \frac{2}{X} - \delta_n \begin{pmatrix} \frac{2}{X} \end{pmatrix}$$

$$q = q \cdot \sin \theta$$

$$(h \times -) \circ \gamma_1(x-) = h \circ \gamma_1\left(\frac{h}{x}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$+ \begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{cases}$$

$$\underbrace{\cos(\alpha + \beta)}_x + \underbrace{\cos(\alpha - \beta)}_y = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\alpha = \frac{x+y}{2}, \quad \beta = \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{cases}$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 10x = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \left(\cos 2x - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{x}{\alpha} \quad \quad \quad \overset{y}{\beta} \quad \alpha &= \frac{x+y}{2}, \beta = \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

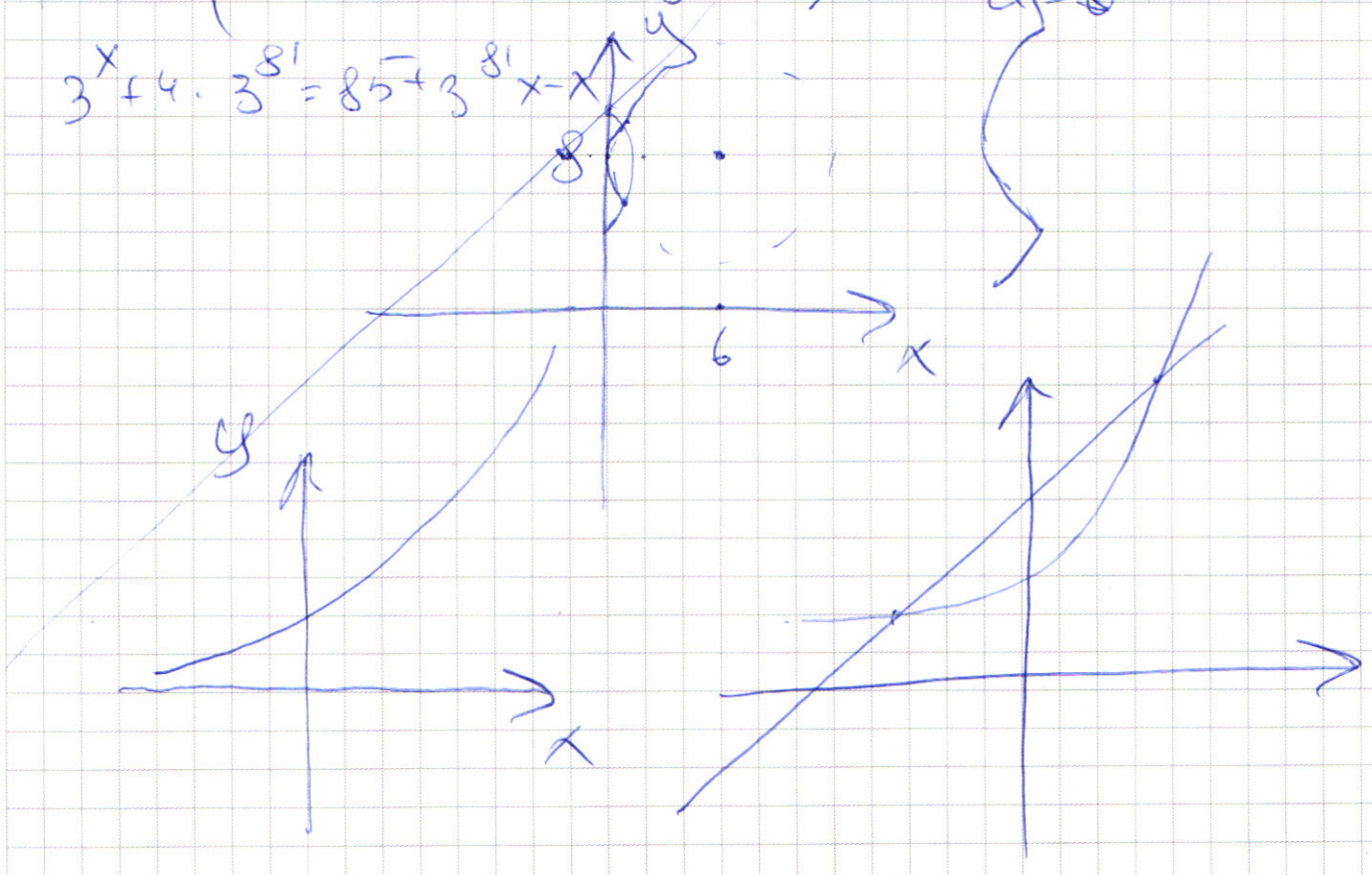
$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{cases}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

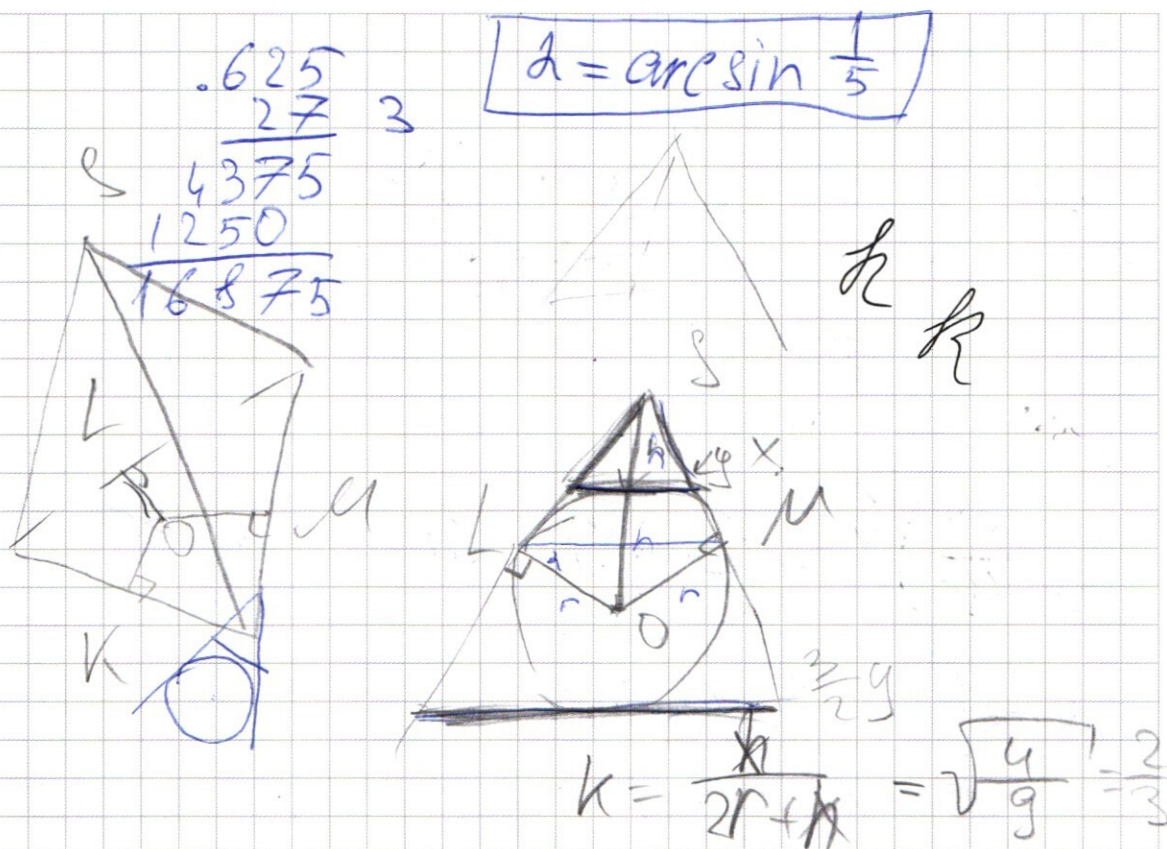
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$(|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 64$$

$$3^x + 4 \cdot 3^y = 85 + 3^y \quad x - y = 1$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{4}{3}r + \frac{2}{3}h = h$$

~~$\frac{4}{3}h - \frac{1}{3}h$~~

$$h = 4r$$

$$\begin{array}{r} 16875 \\ - 125 \\ \hline 437 \\ 425 \\ \hline 125 \end{array}$$

33 55

$$\begin{array}{r} 16875 \quad 5 \\ 16875 \overline{) 25} \\ \underline{750} \\ 187 \\ \underline{175} \\ 125 \\ \underline{36} 2 \\ 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 2 \end{array}$$

1, 3, 3, 3, 5, ..., 5

$$C_8^4 \cdot C_4^3 = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{4!}{3!1!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \boxed{8 \cdot 7 \cdot 5}$$

$$\frac{35}{8} \cdot 4$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & y > 0 \\ & x < 0 \\ 2y^2 - (x+8)y - x^2 - 4x = 0 \end{cases}$$

$$D = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2$$

$$y = \frac{x+8 \pm (3x+8)}{4}$$

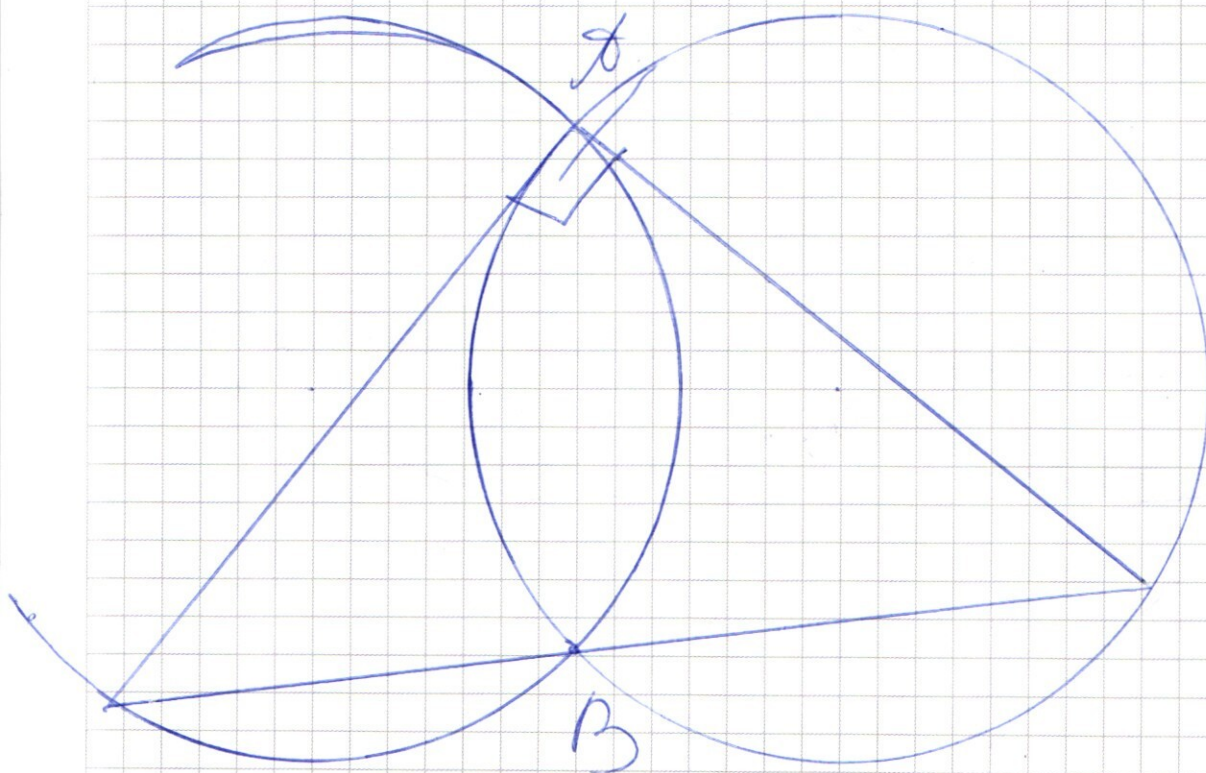
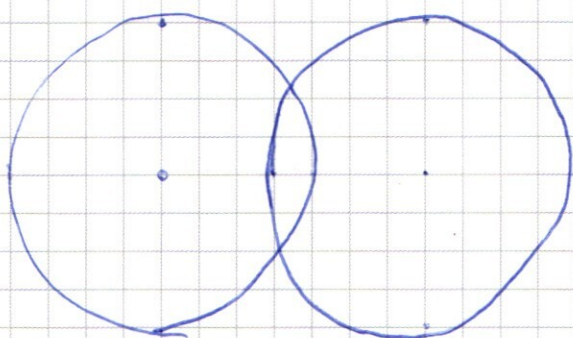
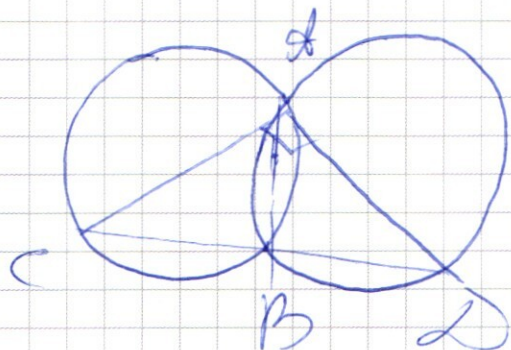
$$\begin{aligned} \log_{10} a^x &= x \\ a^x &= 10^{\log_{10} a^x} \\ a^x &= (10^{\log_{10} a})^x = 10^{x \log_{10} a} \end{aligned}$$

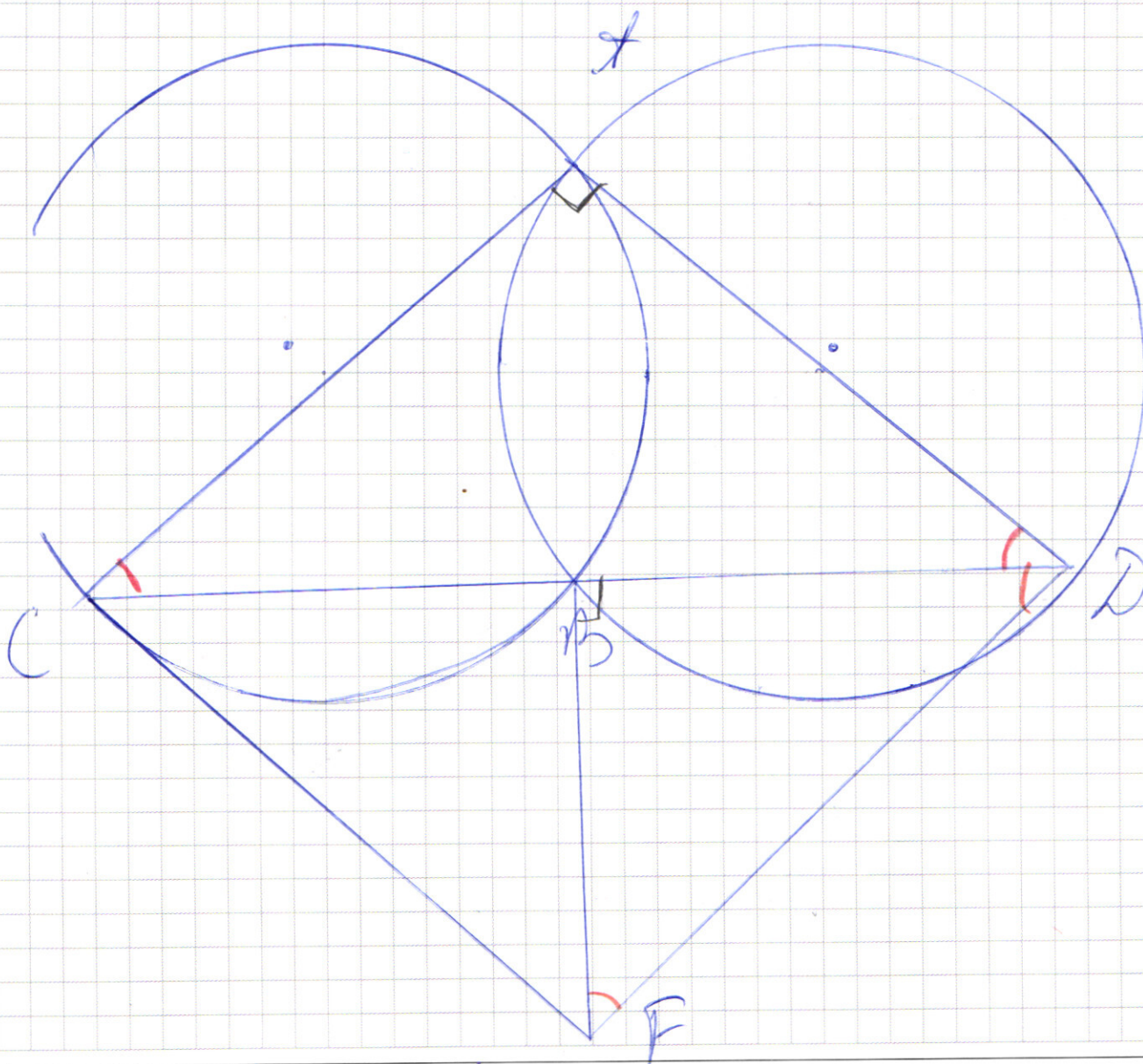
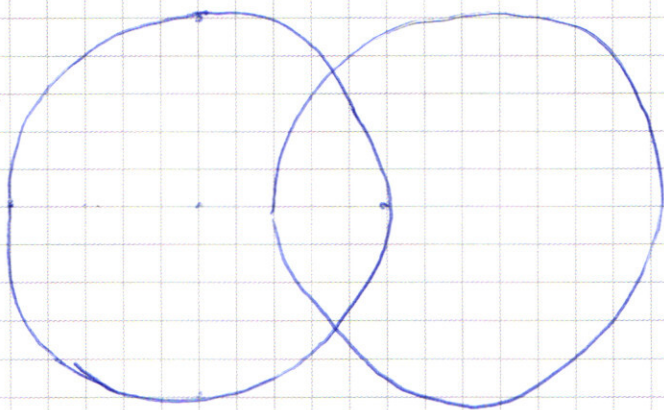
$$\begin{aligned} y &= x+2 & (4x^2)^{\lg -\frac{x}{2}} &= (-x)^{\lg \frac{x^2}{2}} \\ y &= -\frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$\perp \quad \left(\frac{x^2}{y}\right)^{\lg y^2}$$

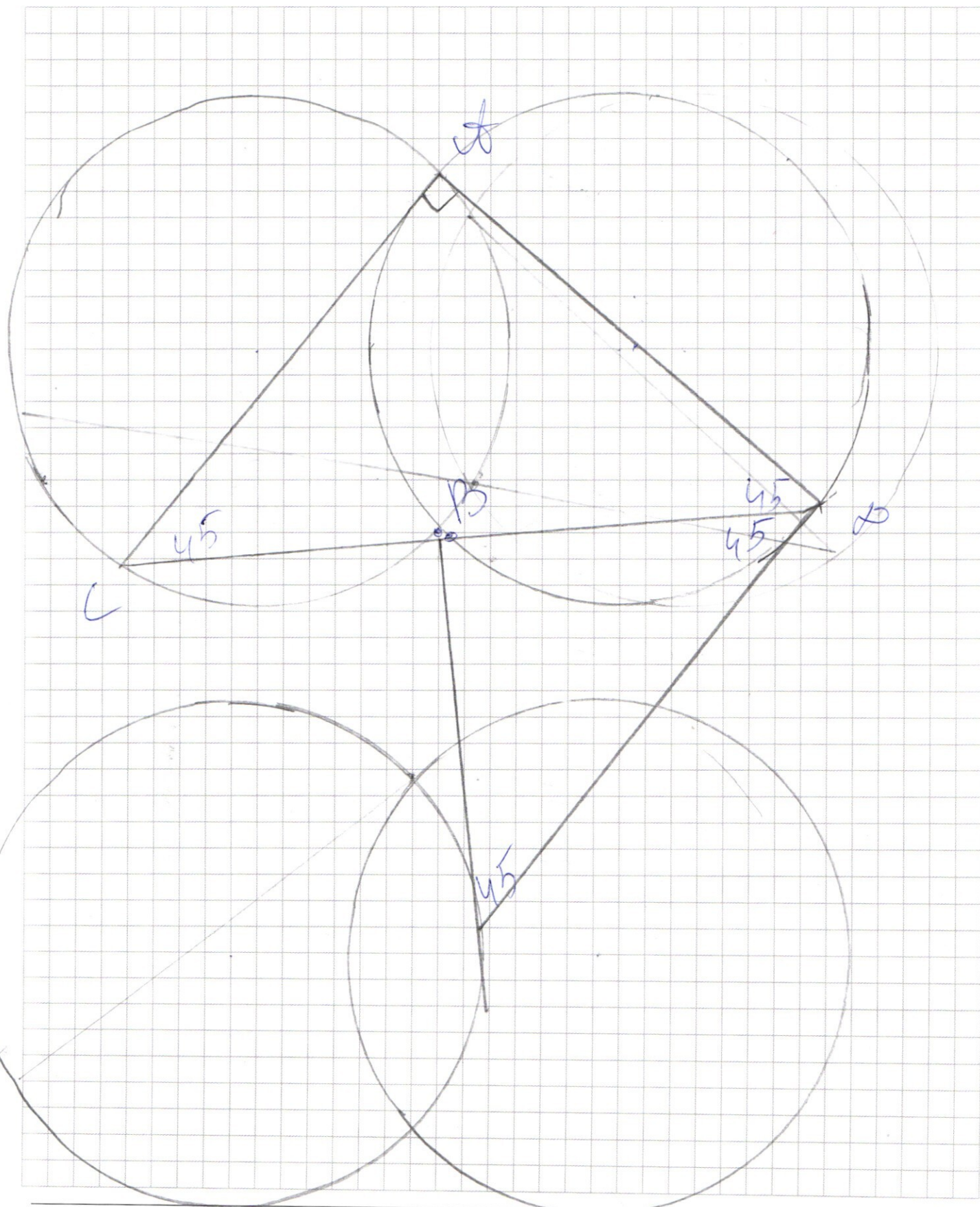
$$\begin{aligned} \left(\frac{b^4}{a^2}\right)^{\lg a} &= b^{\lg a} \cdot b^{\lg a} \\ b^{\lg a} &= a^{\lg a} \cdot b^{\lg b} \cdot b^{\lg a} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$CF = 26$$

