

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1 = 5^4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1^2$$

$$1) C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

$$2) C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$C_2^1 = \frac{2!}{1!1!} = 2$$

~~2~~ $\downarrow$

n - кол-во в первом случае

m - кол-во во втором случае

~~когда~~
 $n = 70 \cdot 4 = 280$

$$m = 70 \cdot 6 \cdot 2 = 840$$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

z - кол-во

$$z = m + n = 280 + 840 = 1120$$

Ответ: $z = 1120$ чисел

N2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$\cos 5x = \sin 5x$$

$$\begin{cases} 2\cos 2x - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = 0 \Rightarrow (-2) \cdot 2 \sin\left(\frac{2x + \frac{\pi}{4} - 5x}{2}\right) \sin\left(\frac{2x + 5x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} 5x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \sin\left(\frac{12x - \pi}{8}\right) \sin\left(\frac{28x - \pi}{8}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ \frac{12x - \pi}{8} = \pi n \\ \frac{28x - \pi}{8} = \pi n \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5} \\ x = \frac{8\pi n + \pi}{12} = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{8\pi n + \pi}{28} = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(xy)} \\ 4y^2 - x^2 - 2y^2 - xy - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$-(x-2y)(x+2y) - y(x+2y) - 4(x+2y) = 0$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(xy)}$$

$$\begin{cases} (x+2y)(y-x-4) = 0 \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(xy)} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2y \\ (16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2} \\ x = y-4 \\ \left(\frac{y-4}{y}\right)^{2\lg y} = (4-y)^{\lg y(4-y)} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2y \\ 4^{\lg y} = (2y)^{\lg 2} \\ \lg y = \lg 2y \\ \lg y = \lg 2y \\ x = y-4 \\ 3\lg y - \lg 4 - y = 2\lg y \frac{\lg y}{\lg(4-y)} \end{cases}$$

$$(y-4)^{2\lg y} = y^{\lg y} \cdot (4-y)^{\lg y(4-y)} \Rightarrow (4-y)^{\frac{\lg y^3}{\lg(4-y)}} = y^{\lg y^2} \Rightarrow \lg \frac{y^3}{4-y} = \lg y^2 \lg(4-y)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x = -2y \\ y(y-2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y-4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\lg^2(4-y) - 3\lg y \lg(4-y) + 2\lg^2 y = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \lg(4-y) = \lg y \\ \lg(4-y) = \lg y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ y^2 + y - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = -9 - \sqrt{17} \\ y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $x = 0, y = 0$;

$$x = -4, y = 2;$$

$$x = -2, y = 2;$$

$$x = \frac{-9 - \sqrt{17}}{2}, y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2};$$

$$x = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2}; y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2};$$

$$\begin{cases} y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 6

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

$$x^2 - 6x - yx + 6x + 36 + 6y - yx + 6y + y^2 + x^2 - 6x + xy - 6x + 36 - 6y + yx - 6y + y^2 = 144$$

$$2x^2 - 24x + 72 + 2y^2 + 2|x^2 - 6x + xy - 6x + 36 - 6y - yx + yx - y^2| = 144$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 + |x^2 - 6x + xy - 6x + 36 - 6y - yx + 6y - y^2| = 72$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 + |x^2 - 12x - y^2 + 36| = 72 \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 12 \end{cases}$$

$$x^2 - 12|x| + 36 + y^2 + 64 - 16|y| = a$$

$$y = \pm 6$$



$$\begin{cases} y \geq 3 \\ y \leq 85 + (3-1)x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 85 + (3-1)y \end{cases}$$

$$y^2 - 16|y| + 100 = a$$

$$3 \leq x \leq 85 + 2x$$

$$3 + 4 \cdot 3 \leq 85 + 3x - x$$

$$x^2 - 12|x| + 36 + 36 + 64 - 96 = a$$

$$3 + 4 \cdot 3 \leq 85 + 2x$$

$$3 + 3x + x \leq 85 - 4 \cdot 3$$

$$x^2 - 12|x| + 40 - a = 0$$

$$3 + 4 \cdot 3 \leq 85 + (3-1)x$$

$$3 \leq x(3-1) + 85 - 4 \cdot 3$$

$$144 - 160 + 4a$$

$$12 \pm \sqrt{4a-16}$$

$$2$$

$$x = 6 \pm \sqrt{a-196}$$

$$x = 6 \pm \sqrt{a-4}$$

$$y = 8 \pm \sqrt{a-36}$$

$$y = 8$$

$$x \leq \log_3 (x(3-1) + 85 - 4 \cdot 3)$$



$$a = 232$$

$$a \in$$

$$64 \leq$$

$$196 \leq a - 36$$

$$a \geq 196$$

$$y = \pm 6$$

$$x^2 - 12|x| + 232 - a = 0$$

$$36 + a - 232 = a - 196$$

$$12 \pm \sqrt{a-196}$$

Ответ: $a = 40$ $a = 232$

☒ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 + 4x + xy - 2y^2 + 8y = 0$$

$$1 + y^2 + 8y + 8y^2 - 32y = 0 \quad 9y^2 = 24y + 16$$

$$x = \frac{-4 - y \pm \sqrt{9y^2 - 24y + 16}}{2}$$

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(xy)} \quad \left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg(x^2 + 4x + 8y - 2y^2)$$

$$\lg y \lg(-x) - (-x)^{\lg(xy)} \quad \lg y \lg(-x) - (-x)^{\lg(xy)}$$

$$\lg y = \frac{\lg(-xy)}{\lg(-x) - \lg(-y)} = \frac{\lg(-x) + \lg y}{\lg(-x) - \lg(-y)}$$

$$\lg y = \lg \frac{4+y-\sqrt{9y^2-24y+16}}{2}$$

$$(y-4)^2 \lg y^2 = y \lg y^2 (y-4)^{\lg(y-4)} \cdot (y-4)^{\lg y}$$

$$4y^2 - 2y^2 - xy - x - 4x - 8y = 0$$

$$(x-2y)(x+2y) - y(x+2y) - 4(x-2y) = 0$$

$$(x-2y)(x+2y-y-4) = 0$$

$$(x-2y)(x+y-4) = 0$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ x = 4-y \end{cases}$$

$$(16y)^{\lg y} = (-2y)^{\lg(-2y)}$$

$$4 \lg(-2y) \lg y^2 = (-2y)^{\lg(-2y)}$$

$$\lg(-2y) = 2 \lg y$$

$$-2y = y^2$$

$$y(y+2) = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -2 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$\left(\frac{(y-4)^2}{y}\right)^{2\lg y} = \cancel{(y-4)^{\lg y}} y^{\lg(y-4)} \cdot y^{\lg(y-4)}$$

$$(y-4)^2 \lg y^2$$

$$(y-4)^2 \lg y^2 = y^{\lg(y-4) + \lg y^2} \cdot (y-4)^{\lg(y-4)}$$

$$(y-4)^{\lg y^4 - \lg(y-4)} = y^{\lg y^2 (y-4)}$$

$$(y-4)^{\lg \frac{y^4}{y-4}} = y^{\lg y^2 (y-4)}$$

$$(y-4)^2 \lg y^2 = y^{\lg y^2} \cdot (y-4)^{\lg y (4-y)}$$

$$(y-4)^{\lg \frac{y^4}{y(4-y)}} = y^{\lg y^2}$$

$$\lg \frac{y^3}{y(4-y)} = \lg y^2 \lg(4-y) y$$

$$\lg y (3 - 2 \lg(4-y) y) = \lg(4-y)$$

$$\lg y (3 \lg(4-y) - 2 \lg y) = \lg^2(4-y)$$

$$1 + 16 \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{aligned} \lg^2(4-y) &= 3 \lg(4-y) \lg y + 2 \lg^2 y = 0 \\ \lg(4-y) &= 2 \lg y \quad \begin{cases} 4-y-y^2=0 \\ 4-y=y \\ y+y-4=0 \\ 2y=4 \end{cases} \\ \lg(4-y) &= 1 \lg y \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \cos 2x \sin 5x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \cos 2x \sin 5x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{2} \sin 5x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x = \sin 5x \\ 2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{2} \sin 5x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{ctg} 5x = 1 \\ \sin\left(\frac{12x - \pi}{8}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{28x - \pi}{8}\right) = 0 \end{cases}$$

$$2 \cos 2x - 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) = 0$$

$$2 \cos 2x - 2 \left(\cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$$

$$2 \left(\cos 2x - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$$

$$2 \cdot (-2) \sin \left(\frac{2x - 5x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \sin \left(\frac{2x + 5x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$+ 4 \sin \left(\frac{12x - \pi}{8} \right) \sin \left(\frac{28x - \pi}{8} \right) = 0 \Rightarrow$$

N1

16875 | 5
 3375 | 5
 675 | 5
 135 | 5
 27 | 9
 9 | 3
 3 | 3

$$16875 = 5^5 \cdot 3^4 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3$$

$$\Rightarrow \text{1 вар)} C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

$$C_8^1 = \frac{8!}{7!1!} = 8$$

$$\text{2 вар)} C_8^4 = 70$$

$$C_8^2 = 28$$

$$C_8^1 = 8$$

$$C_8^1 = 8$$