

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Разложим число 16875 на простые множители:

$$16875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Общее кол-во полученных простых множителей - 7.

Значит, одна из цифр (как минимум) восьмизначного числа равна 1.

Получаем, что восьмизначное число может состоять из цифр:

а) 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1

б) 5, 5, 5, 5, 3, 9, 1, 1.

N2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} (\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x) = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x + \cos 3x = \sin 7x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

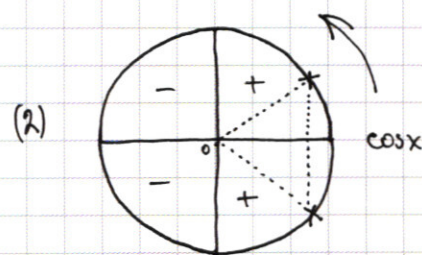
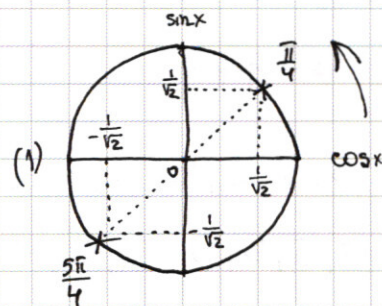
$\Downarrow$

$$\begin{cases} \cos 5x = \sin 5x \\ \sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos 5x = \sin 5x \quad (1) \\ \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{4} - 5x) \quad (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 5x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \\ 2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi t \\ 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi p \end{cases} \quad (n, k, t, p \in \mathbb{Z})$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ 2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi t \\ 3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}n \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi t \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi p \end{cases} \quad (n, t, p \in \mathbb{Z})$$



Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}n; \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi t; \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi p \quad (n, t, p \in \mathbb{Z})$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y} \\ 2y^2 - xy - x^2 - (4x + 8y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y} \\ (y-x)(2y+x) - 4(2y+x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y} \\ (2y+x)(y-x-4) = 0 \quad (A) \end{cases}$$

$$(1) (2y+x)(y-x-4) = 0$$

$$\begin{cases} x = -2y \quad (A) \\ x = y-4 \quad (B) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A) \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ x = -2y \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ x = -2y \\ \left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y) + \lg y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ x = -2y \\ 4y^{\lg y^2} = (2y)^{\lg 2} \cdot (2y)^{\lg y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ x = -2y \\ 2^{\lg y^2} = (2y)^{\lg 2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ x = -2y \\ 2^{\lg 4} \cdot 2^{\lg 4} = 2^{\lg 2} \cdot 2^{\lg 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ x = -2y \\ \begin{cases} 2^{\lg 4} = 0 \quad \emptyset \\ 2^{\lg 4} = 2^{\lg 2} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \quad (\text{к ответу})$$

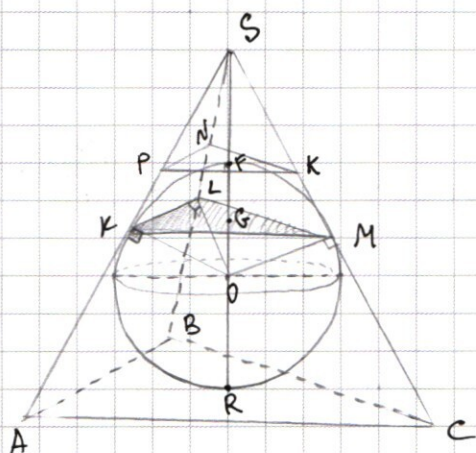
$$(b) \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ x = y - 4 \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ y = x + 4 \\ \left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right) \lg(x+4) = (-x) \lg(-x) \cdot (-x) \lg(x+4) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ y = x + 4 \\ \left(\frac{-x^3}{(x+4)^2}\right) \lg(x+4) = (-x) \lg(-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ y = x + 4 \\ \frac{(-x) \lg(x+4)}{(-x) \lg(-x)} = \left(\frac{x^2 + 8x + 16}{x^2}\right) \lg(x+4) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ y = x + 4 \Rightarrow \dots \\ (-x) \lg(2x+4) = \left(\frac{x+4}{x}\right)^2 \lg(x+4) \end{cases}$$

Ответ: $(-4; 2);$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



14

Дано: сфера ω с центром в $m.O$,

$$S_{PNK} = 4, \quad (PNK) \perp SO,$$

$$S_{ABC} = 9, (ABC) \perp SO$$

Kaŭmu: $\angle KSO$? S_{KLM} ?

Решение:

1. Тырмэ $\begin{cases} (PNK) \cap \omega = F \\ (ABC) \cap \omega = R \end{cases}; \begin{cases} (ABC) \perp SO \\ (PNE) \perp SO \end{cases} \quad (\text{но 4 члену}) \Rightarrow (ABC) \parallel (KLM)$

2. SL , SK и SM - перпендикуляры к одной сфере ω , проведенные из одной точки $S \Rightarrow SL = SK = SM$ (по свойству) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (KLM) \perp SO \Rightarrow (KLM) \parallel (ABC) \parallel (PNK)$$

2. $S_{PNK} = 4$, $S_{ABC} = 9$ (по условию) ~~$PB \Delta SAC$~~ $PK \parallel AC$. $\Delta PNK \sim \Delta ABC$
(т.к. ~~$PNK \parallel$~~ (по двум, т.к. $\angle PNK = \angle ABC$ и $\angle NPK = \angle BAC$) $\Rightarrow \frac{PK}{AC} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

$PK \subset ASC$
 $AC \subset ASC \Rightarrow PK \parallel AC$
 $PK \parallel ABC$

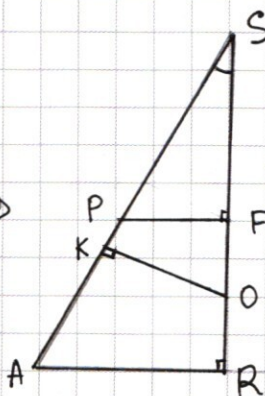
- #### 4. Фрагментарний терет

PNK и ABC касаются в по умолчанию $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ плоскости $OR \perp ABC$ и $OF \perp PNK$

PNK и $ABC \perp SO$ по условию $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ можем S, F, O и R заменить на 1 переменную



5. Пусть $OA = OF = r$. Т.к. $\triangle PNK \sim \triangle ABC$, то $\frac{PF}{AA} = \frac{PK}{AC} = \frac{2}{3}$.

~~Заметим, что $\triangle SKO \sim \triangle SFP$ (по углам)~~

$$\frac{SF}{SF+2r} = \frac{2}{3}$$

$$3SF = 2SF + 4r$$

$$\underline{SF = 4r.}$$

6. Тогда в $\triangle SKO$: $OK = r$, $SO = SF + FO = 5r \Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{1}{5} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin 0,2 \text{ (к ответу)}$$

7. В $\triangle SFP$ по т. синусов:

$$\frac{SP}{\sin 90^\circ} = \frac{SF}{\sin \angle SFP}$$

$$SP = \frac{4r}{\cos(\arcsin 0,2)} = \frac{4r}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \frac{10r}{\sqrt{6}}$$

8. $\triangle SKO \sim \triangle SFP$ (по углам) $\Rightarrow \left(\frac{SO}{SP} \right)^2 = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow \frac{SO}{SP} = \frac{KL}{PK}$ (т.к. аналогично пункту 3) $\triangle KLM \sim \triangle PNK$ по углам)

$$\frac{KL}{PK} = \frac{5r\sqrt{6}}{10r} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

9. Тогда по свойству подобных треугольников $\frac{S_{KLM}}{S_{PNK}} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_{KLM}}{4} = \frac{6}{4} \Rightarrow \underline{S_{KLM} = 6 \text{ кв. ед. (к ответу)}}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin 0,2$; $S_{KLM} = 6 \text{ кв. ед.}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

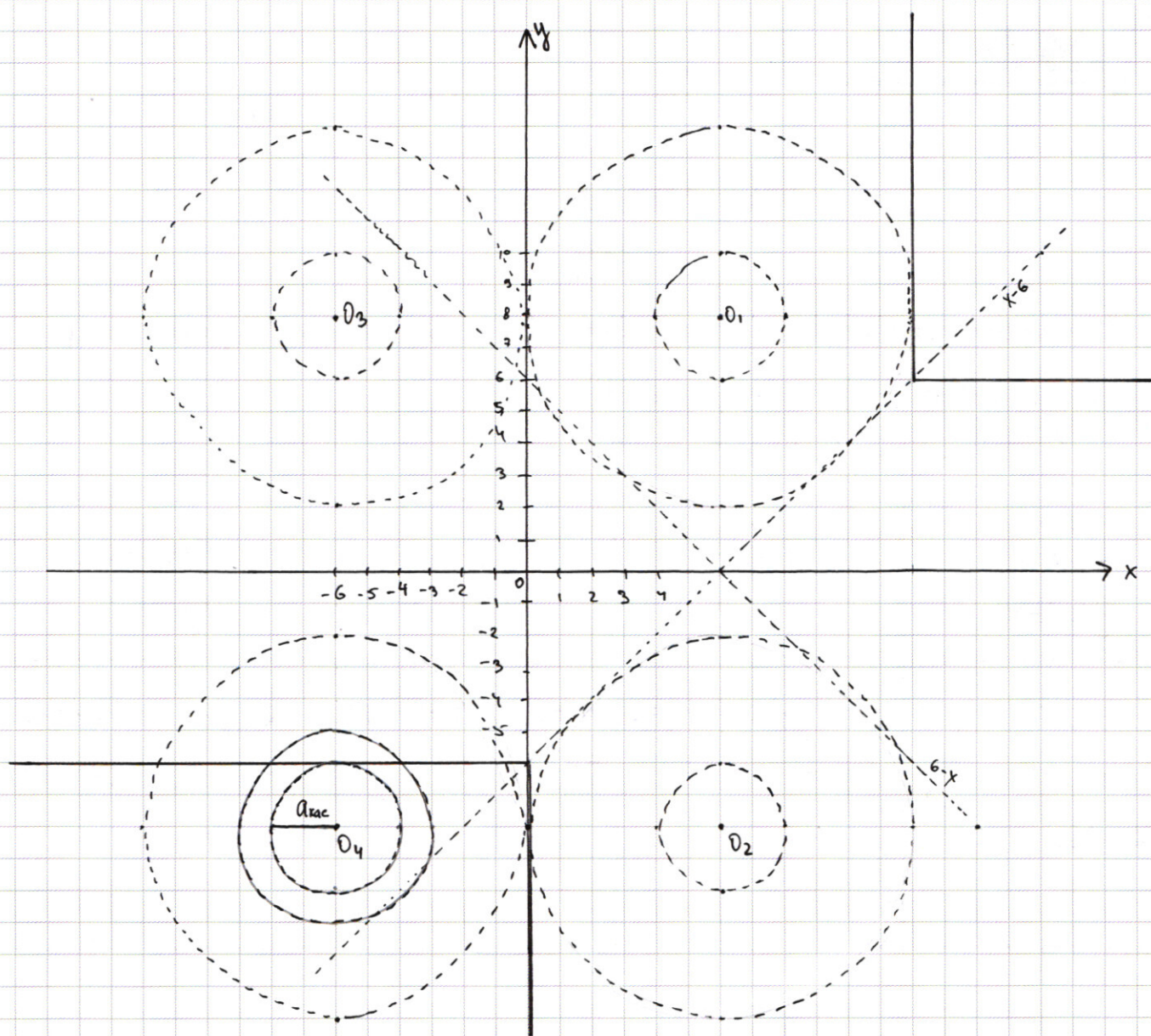
№5

При каких значениях a система имеет ровно 2 решения

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1) $x \geq 0$ $y \geq x-6$ $y \geq 6-x$	$y \geq x-6$ $y \leq 6-x$	$y \leq x-6$ $y \geq 6-x$	$y \leq x-6$ $y \leq 6-x$
$x-6-y+x-6+y=12$	$x-6-y-x+6-y=12$	$y+6-x+x-6+y=12$	$6+y-x-x+6-y=12$
$2x-12=12$	$-2y=12$	$2y=12$	$-2x+12=12$
$x=12$	$y=-6$	$y=6$	$x=0$

(2) $x \geq 0$ $y \geq 0$	$x \geq 0$ $y < 0$	$x < 0$ $y \geq 0$	$x < 0$ $y < 0$
$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a$	$(x-6)^2 + (y+8)^2 = a$	$(x+6)^2 + (y-8)^2 = a$	$(x+6)^2 + (y+8)^2 = a$
окружность, центр $O_1(6; 8)$ Радиус $\sqrt{a}$	центр $O_2(6; -8)$ Радиус $\sqrt{a}$	центр $O_3(-6; 8)$ Радиус $\sqrt{a}$	центр $O_4(-6; -8)$ Радиус $\sqrt{a}$



Расчет мощи:

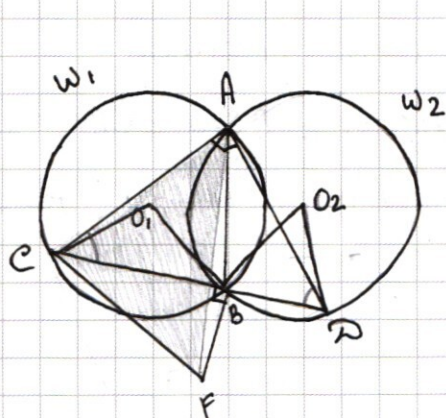
$$1) \begin{cases} (x+6)^2 + (y+8)^2 = a_{\text{кас}} \\ y = -6 \end{cases} \Rightarrow \underline{a_{\text{кас}} = 4}$$

$$2) \begin{cases} (x+6)^2 + (y+8)^2 = a_{\text{пред.}} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{a_{\text{пред.}} = 36}$$

Тогда система будет иметь ровно 2 решения при $a \in (a_{\text{кас}}; a_{\text{пред.}})$, т.е. $a \in (4; 36)$

Ответ: при $a \in (4; 36)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№6

Дано: окружности ω_1 и ω_2
радиуса $r=13$, $B \in CD$,

$\angle CAD = 90^\circ$, $BF = BD$, $FB \perp CD$

а) Найти: CF ?

а) Решение:

1) Проверим радиусы O_1C , O_1B , O_2B и O_2D . Проверим отрезок AB . Пусть $\angle CAB = \alpha$ (тогда $\angle DAB = \frac{\pi}{2} - \alpha$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CO_1B = 2\alpha$, т.к. он центральный и опирается на ту же дугу, что и $\angle CAB$ (тогда $\angle DO_2B = \pi - 2\alpha$).

2) В $\triangle CO_1B$ по т. косинусов

$$CB^2 = O_1C^2 + O_1B^2 - 2O_1C \cdot O_1B \cos 2\alpha = 2r^2(1 - \cos 2\alpha)$$

В $\triangle O_2BD$ по т. косинусов:

$$BD^2 = O_2B^2 + O_2D^2 - 2O_2B \cdot O_2D \cos(\pi - 2\alpha)$$

$$BD^2 = 2r^2(1 + \cos 2\alpha).$$

3) $BD = FB$ (по условию) $\Rightarrow FB^2 = BD^2 = 2r^2(1 + \cos 2\alpha)$

4) В $\triangle CBF$ по т. Пифагора:

$$CF^2 = CB^2 + FB^2$$

$$CF = \sqrt{2r^2(1 - \cos 2\alpha) + 2r^2(1 + \cos 2\alpha)} = r\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2r = \underline{26}$$

б) Найти: S_{ACF} ? Если $BC=10$

б) Решение:

1) В $\triangle BCF$ по т. Пифагора: $CF^2 = BC^2 + BF^2$

$$BF^2 = 26^2 - 100$$

$$BD = BF = \sqrt{576} = 24$$

Значит, $CD = BC + BD = 10 + 24 = 34$.

2) $\angle ANB$ и $\angle ACB$ стягивают равные дуги равных окружностей $\Rightarrow \angle ANB = \angle ACB$. И из $\triangle ACD$ $\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow \Rightarrow \angle ANB = \angle ACB = 45^\circ$. Тогда $\triangle ACD$ равнобедренный и $AC = AD$.

3) В $\triangle ACD$ по т. Пифагора:

$$CD^2 = AC^2 + AD^2$$

$$34^2 = 2AC^2$$

$$AC = \frac{34}{\sqrt{2}} = 17\sqrt{2}.$$

4) В $\triangle CBF$ по т. синусов:

$$\frac{CF}{\sin 90^\circ} = \frac{BF}{\sin \angle BCF} \Rightarrow \sin \angle BCF = \frac{24}{26} = \frac{12}{13} \quad (\cos \angle BCF = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13})$$

5) Тогда $S_{ACF} = \frac{1}{2} \sin(\angle BCF + \frac{\pi}{4}) \cdot AC \cdot CF =$

$$= \frac{1}{2} (\sin \angle BCF \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos \angle BCF \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot 17\sqrt{2} \cdot 26 =$$

$$= 13 \cdot 17 \left(\frac{12}{13} + \frac{5}{13} \right) = 13 \cdot 17 \cdot \frac{17}{13} = 17^2 = 289 \text{ кв. ер.}$$

Ответ: а) $CF = 26$.

б) $S_{ACF} = 289 \text{ кв. ер.}$

$$1 - \sqrt{2} \cos 3x + \frac{\cos 3x}{\cos 2x} = \frac{1}{\cos 2x}$$

$$\sin x + 1 + \sin x = 1$$

$$\cos \cdot \cos \rightarrow \cos + \cos$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

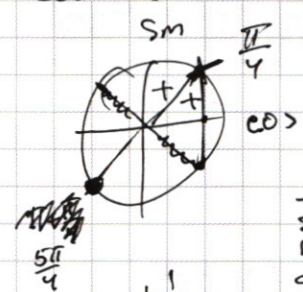
$$\cos 2x (2 \cos 5x - \sqrt{2} \cos 10x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x + \sin 5x) =$$

$$\cos 2x = (\cos 5x + \sin 5x) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{4} - 5x)$$



$$CF = \sqrt{2R^2(1 - \cos 2\alpha) + 2R^2(1 - \cos(\pi - 2\alpha))} = R\sqrt{2(1 - \cos 2\alpha + 1 + \cos 2\alpha)}$$

$$\frac{1}{2} \cos 2x$$



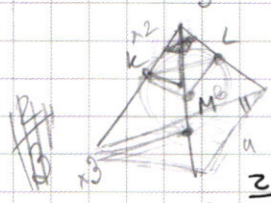
$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$2x + 5x$$

$$2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi p$$

$$0 = 3x - \frac{\pi}{4} + 2\pi p$$

$$3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi p$$



$$\frac{2\pi}{2 \cdot 1} = h \varepsilon$$

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} + \lg 2$$

$$2y^2 - xy - x^2 - (4x + 8y) = x^2 + 8x^2 - 9x^2 = (3x)^2$$

$$\frac{(x^2)^{2 \lg y}}{y^{2 \lg y}} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$y_{1,2} = \frac{x \pm 3x}{4} =$$

$$|x|^{4 \lg y} = y^{2 \lg y} + |x|^{\lg |x|}$$

$$= \begin{cases} \frac{4x}{4} = x \\ -\frac{2x}{4} = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\frac{9 \pm 5^2}{9 \pm 9} =$$

$$2^{\lg y^2} = 2y^{\lg 2}$$

$$(y-x)(y+\frac{1}{2}x) = (y-x)(2y+x)$$

$$\frac{9 \pm 5}{9 \pm 9} =$$

$$16y^4$$

$$\frac{9 \pm 9}{9 \pm 9} =$$

$$2y^{\lg 2}$$

$$4y^{\lg y^2} = 2y^{\lg 2 + \lg y^2} = 2y^{\lg 2} \cdot 2y^{\lg y^2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4 \lg 4 = (2y) \lg 2$$

$$2 \lg y^2 = 2y \lg 2$$

$$y \lg y = 2 \lg 2 \cdot y \lg 2$$

$$\frac{2 \lg y}{y} = 2 \lg 2$$

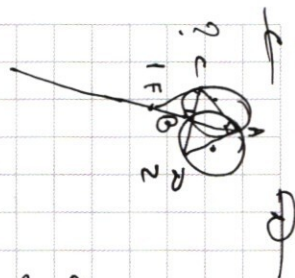
$$\lg y = \lg 2$$

$$y = 2 \quad -2y = -2 \cdot 2 = -4$$

$$\lg 100 = 2$$

$$10^{\lg 100} = 10^2 = 100$$

$$100^{\lg 10} = 100$$



$$-x^3 \cdot 10$$

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$(-x)^{\lg(-xy)}$$

$$(-xy)^{\lg(-x)}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \frac{x^4}{y^2} \lg y$$

$$\frac{x^4}{y^2} \lg y = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$\left(\frac{-x^3}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$\left(\frac{-x^3}{(x+4)^2}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$-x^3 \lg(x+4) = \lg(x+4)$$

$$(x+4)^{2 \lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$\left(\frac{x^2+8x+16}{-x^3}\right)^{-\lg(x+4)}$$

$$\left(\frac{(-x)(x^2)}{x^2+8x+16}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$\frac{(-x)^{\lg(x+4)}}{(-x)^{\lg(-x)}} = \left(\frac{x^2+8x+16}{x^2}\right)^{\lg(x+4)} \cdot (-x)^{\lg(x+4+x)}$$

$$\frac{(-x)^{\lg(2x+4)}}{(-x)^{\lg x}} = \left(\frac{x+4}{x}\right)^{2 \lg(x+4)}$$

$$(-x)^{\lg(x+4)} \cdot (-x)^{\lg(x+4)}$$

