

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

$16875 = 2^3 \cdot 5^4$ произведение 8 цифр $= 2^3 \cdot 5^4$, ~~просто~~ заметим, что тогда ни одна цифра не равна 0 $\Rightarrow$ нет отрицательных на 0 в начале числа.

Каждая цифра - мн-ль числа $2^3 \cdot 5^4$, причем ≤ 10 . Тогда она может
 являться 1, 2, 4, 5, 8. Иначе говоря, если рассматривать каждую ^{ый} цифру ^{разряда}
~~(~~Каждая цифра - мн-ль числа $2^3 \cdot 5^4$, причем ≤ 10 . Тогда она может~~~~ ~~являться 1, 2, 4, 5, 8. Иначе говоря, если рассматривать каждую цифру~~
 числа, как "ящик", в который мы можем класть монеты 16875
 (ишь первоначально во всех ящиках 1), то в каждый такой
 ящик мы можем положить не более 1 5^4 из тех 4-х, которые
 соедн. в 16875. и не более трех 2^3 .

Кор-во способов выполнить 5: $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 2 \cdot 5 = 70 (= C_8^4)$

кол-во перестановок в выбранном наборе из 4 ящ.

Теперь будем "распаковывать" 2^4 . Заметим, что в ящики с 5^4 мы не можем положить 2^4 . И у нас всего 3 ящика $\Rightarrow$ мы не можем "переносить" свободные ящики. Тогда кол-во способов положить

Выйдем в след. круги и на каждой расстановке S^4 :

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

C_{3+3}^3 (3 шара, 3 переправы) (4-1)

$${}^6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

Zero molecules $C_8^4 \cdot C_6^3 = 70 \cdot 20 = 1400$ or 1400

№2.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cancel{2\cos 5x \cdot \cos 2x} - \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2\sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 \\ \sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 5x = \sin 5x \\ \cos 2x = \cos(5x - \frac{\pi}{4}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi m \\ -2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi l}{7} \right\} \\ n, k, l \in \mathbb{Z}$$

№3.

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

Решим отн. y:

$$2y^2 - (x+8)y - (x^2+4x) = 0 \quad y = \frac{x+8 \pm \sqrt{9x^2+48x+64}}{4} \quad y = \frac{(x+8) \pm (3x+8)}{4}$$

$$\text{ОДЗ: } y > 0, \quad x < 0,$$

$$\begin{cases} y = x+4 \leftarrow x > -4 \\ y = -\frac{x}{2} \leftarrow x < 0 \end{cases} \quad \text{1): } \left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x(x+4))}, \text{ возведем в лог от обеих частей} \\ \lg(x+4) \cdot (4\lg(-x) - 2\lg(x+4)) = (\lg(-x) + \lg(x+4))\lg(-x)$$

$$\lg^2(-x) - 3\lg(x+4) \cdot \lg(-x) + 2\lg^2(x+4) = 0 \quad \text{поделим на } \lg^2(x+4)$$

$$(\neq 0, \text{ т.к. тогда } x = -3, y = 1) \\ \left(\frac{3^4}{1}\right)^0 \neq 3^{\lg 3}$$

$$t = \frac{\lg(-x)}{\lg(x+4)}: t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg(-x) = \lg(x+4) \\ \lg(-x) - 2\lg(x+4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x = x+4 \\ -x = (x+4)^2 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 3 уравнения.

$$\begin{cases} X = -2 \\ X^2 + 9X + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = -2 \\ X = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 64}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = -2 \\ X = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{\pm \sqrt{17} - 1}{2} \end{cases}$$

Итого $X = -2, y = 2$
 $X = \frac{\sqrt{17} - 9}{2}, y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$, но 0.13 не подходит.

но x только $y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$.

$$2) \left(\frac{x^4}{x^2/4} \right) \lg(-\frac{x}{2}) = (-x) \lg(+\frac{x^2}{2})$$

$\lg$ от обеих частей

$$\lg(-\frac{x}{2}) \cdot \lg(4x^2) = \lg(+\frac{x^2}{2}) \cdot \lg(-x)$$

$$(\lg(-x) - \lg 2)(2\lg(-x) + 2\lg 2) = \lg^2(-x)(2\lg(-x) - \lg 2)$$

$$\begin{aligned} & \lg(-x) - \lg 2 = \lg(-x/2) \\ & 2\lg(-x) + 2\lg 2 = 2\lg(-2x) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X = -2 \\ 2(\lg(-x) + \lg 2) = \lg(-x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2\lg^2(-x) + 2\lg 2 \cdot \lg(-x) - 2\lg 2 \cdot \lg(-x) - 2\lg^2 2 = \\ = 2\lg^2(-x) - \lg 2 \cdot \lg(-x) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X = -2 \\ \lg(-x) = -2\lg 2 \end{cases}$$

$$2\lg^2 2 = \lg 2 \cdot \lg(-x) \quad -x = 4$$

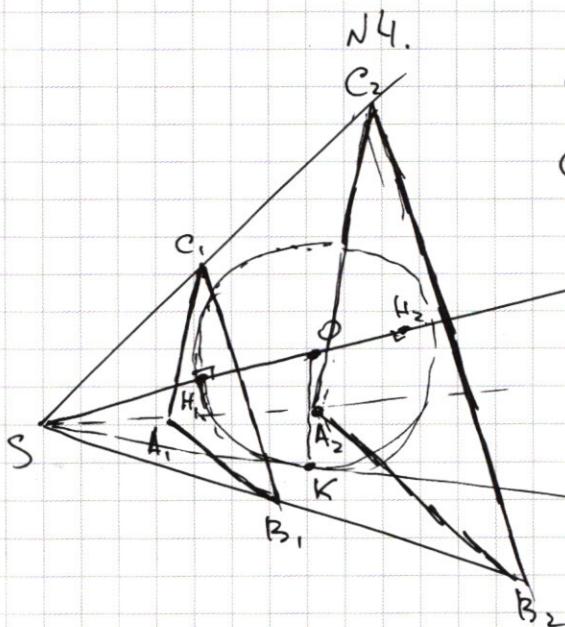
$$\begin{cases} X = -2 \\ -X = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} X = -2 \rightarrow y = 1, \text{ не подходит.} \\ X = -\frac{1}{4} \rightarrow y = \frac{1}{8}, \text{ подходит.} \end{cases}$$

$x = -4 \rightarrow y = 2$
подходит под 0.13 .

Итого $(x, y) \in \left\{ (-2; 2), \left(\frac{\sqrt{17} - 9}{2}, \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right), \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{8} \right) \right\}$.

Итого: $(x, y) \in \left\{ (-2; 2), \left(\frac{\sqrt{17} - 9}{2}, \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right); (-4; 2) \right\}$.

ответ.



$$S_1 = S_{A_1B_1C_1} = 4$$

$$S_2 = S_{A_2B_2C_2} = 9$$

Заметим, что н.к. $(A_1B_1C_1) \perp SO$ и $(A_2B_2C_2) \perp SO$, что отн. II.

Тогда по ч. гипотезы в н. треугольника угла или же просто из рассуждений подобия тетра. $SA_1B_1C_1$ и $SA_2B_2C_2$

$$\frac{SA_1}{SA_2} = \frac{SB_1}{SB_2} = \frac{SC_1}{SC_2} = k \quad (\text{также } \frac{SH_1}{SH_2} = k)$$

Пусть $OK = r$, $SH_1 = x$

$$SH_2 = x + 2r$$

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3 = \frac{\frac{1}{3}S_1 \cdot SH_1}{\frac{1}{3}S_2 \cdot SH_2} = \frac{4 \cdot x}{9(x+2r)} = \frac{x^3}{(x+2r)^3}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{x^3}{(x+2r)^3} \Rightarrow \frac{x}{x+2r} = \frac{2}{3} \quad 3x = 2x + 4r, \quad x = 4r.$$

$\triangle SOK$: $OK = r$, $OS = x + r = 5r$. $\sin \angle KSO = \frac{1}{5}$.

Ответ: $\arcsin \frac{1}{5}$.

N5.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

пусть $t = x-6$.

- $|y|=6 \Rightarrow t \in [-6; 6]$
- $|y|<6 \Rightarrow$ ~~нет реш.~~ $|t|=6$
- $|y|>6$ - нет реш.

Все а, при которых 2 реш.

$$(1): |t-y| + |t+y| = 12$$

Л.Ч. - расстояние от точки t до точек $-|y|$ и $|y|$

~~то есть $|y|=6 \Rightarrow t \in [-6; 6]$~~
 ~~$|y|<6 \Rightarrow$~~
 ~~$|y|>6 \Rightarrow$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 проволоки.

$$a) \frac{1}{2}x \geq 0 \Rightarrow |x-6| \geq -6.$$

$$(2): |x|^2 + (|y|-8)^2 = a$$

$$\bullet |y|=6 \Rightarrow |x|^2 + 4 = a$$

$$|x|^2 = a-4, \text{ причем } |x| \in [-6; 6]$$

Каждое a даст 2 реш $|x| \Rightarrow$ 2 реш x (кроме $a=4$)

Кажд $|x|$ причем также для каждого получ. реш. $x \exists y (\neq 6)$

Тогда ед. подходящее $\boxed{a=4}$, при нём: $x=6, y=6$
 $x=6, y=-6$

~~Или $|y| < 6$~~

$$\bullet |y| < 6 \Rightarrow 36 + (|y|-8)^2 = a$$

$$(|y|-8)^2 = a-36 \text{ Означит какое } a \text{ даст 2 реш для } |y|-8, \text{ ч.ч. } |y| < 6, \text{ то ед. вар. вариант.}$$

Тогда $|y| = 8 - \sqrt{a-36}$, 2 варианта
для y , если $\sqrt{a-36} \neq 8$, причем
на $|x|$ и на x также 2 варианта. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{есть подходящий только вариант } \sqrt{a-36} = 8 \quad \boxed{a=100}$$

(тогда ед. вариант для $y (=0)$, 2 варианта для $x \Rightarrow$ 2 реш.)

$$b) x < 0 \Rightarrow |x| = x-6 < -6, |x| > 6 \text{ ни под один вариант } y (1) \text{ не под.}$$

Ответ: $a \in \{4; 100\}$.

2) α_1
 3) α_2
 4) ΔABC ,

$$\frac{a_1}{\sin \beta} = \frac{1/\sqrt{3}}{1/5}$$

$$\angle ACQ = \frac{1}{2} \angle AQB = \angle AOH$$

$\angle OCA, \angle ACB = \angle ACD$, их сумма

$$90^\circ \Rightarrow \angle ADE = \angle ACD = 45^\circ$$

$$\overset{11}{\angle \text{AO}_2\text{H}} \quad \overset{4}{\angle \text{AO}_2\text{H}}$$

2) $\angle BOF = 45^\circ$, y.e. $BOF \perp p/o$.

$$3) U_3 \triangleq AO, H \quad AH = 0,1 \cdot \sin 45^\circ = \frac{13}{\sqrt{2}}$$

$$AB = 2AH = 13\sqrt{2}.$$

4) $\triangle ABC$, ч. стороны (угол $\angle C = \alpha_1$,
 $\angle B = \alpha_2$)
 $\angle BAC = \beta$.

$$\frac{a_1}{\sin \beta} = \frac{13\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} \Rightarrow a_1 = 26 \sin \beta.$$

$$\Delta ABC \text{ v. carrycol: } \frac{a_2}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{13\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} \Rightarrow a_2 = 26 \cos \beta. \quad \hookrightarrow \tan \beta = \frac{a_1}{a_2}$$

$$5) CF^2 = kC^2 + kF^2 = q_1^2 + q_2^2 = 26 \sin^2 \beta + 26 \cos^2 \beta = 26.$$

6) $BC = 10$, $\$_{ACF} = ?$

$$a_1 \quad \text{for } \Delta \quad \sin p = \frac{a_1}{26} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}, \quad \angle p = \frac{5}{12}, \quad b \Delta \text{ BCF} \angle \text{CFB} = p \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{a_1}{2}$$

$$T_{\text{orin}} \frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{12} \quad a_2 = \frac{12 \cdot 10}{5} = 24.$$

AC - көтеріс піл $\angle \alpha \Rightarrow AC = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{10+24}{\sqrt{2}} = 17\sqrt{2}$.

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin(\phi_{22} 90^\circ - \phi_2 + 45^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 17\sqrt{2} \cdot 26 (\sin 135^\circ \cos \phi_2 + \sin \phi_2 \cos 135^\circ)$$

$$= 13 \cdot 17\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{12}{13} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{13} \right) = 13 \cdot 17\sqrt{2} \cdot \frac{17}{13\sqrt{2}} = 17^2 = 289.$$

Orber. 289.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

$(x, y) \leftarrow \text{целые}$.

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} = f(x) \\ y < 3^4 + 4 + (3^{81} - 1)x = g(x) \end{cases}$$

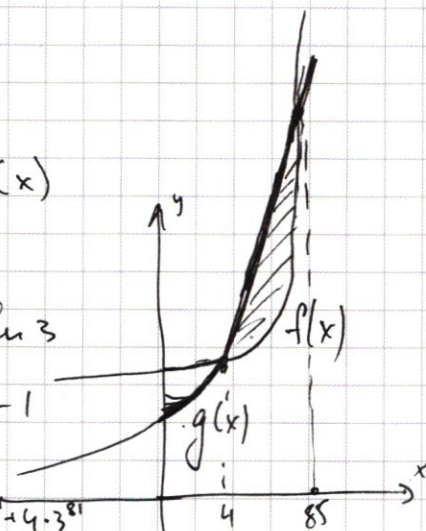
Ищем целые x и y такие, что $f(x) < g(x)$.

$$f(0) = 4 \cdot 3^{81} + 1$$

$$g(0) = 3^4 + 4, \quad f(0) > g(0)$$

$$f'(x) = 3^x \ln 3$$

$$g'(x) = 3^{81} - 1$$



$$f(x) = g(x) \text{ в двух точках: } x=4: f(4) = 3^4 + 4 \cdot 3^{81} \\ x=85: g(4) = 3^4 + 4 + 4 \cdot 3^{81} - 4$$

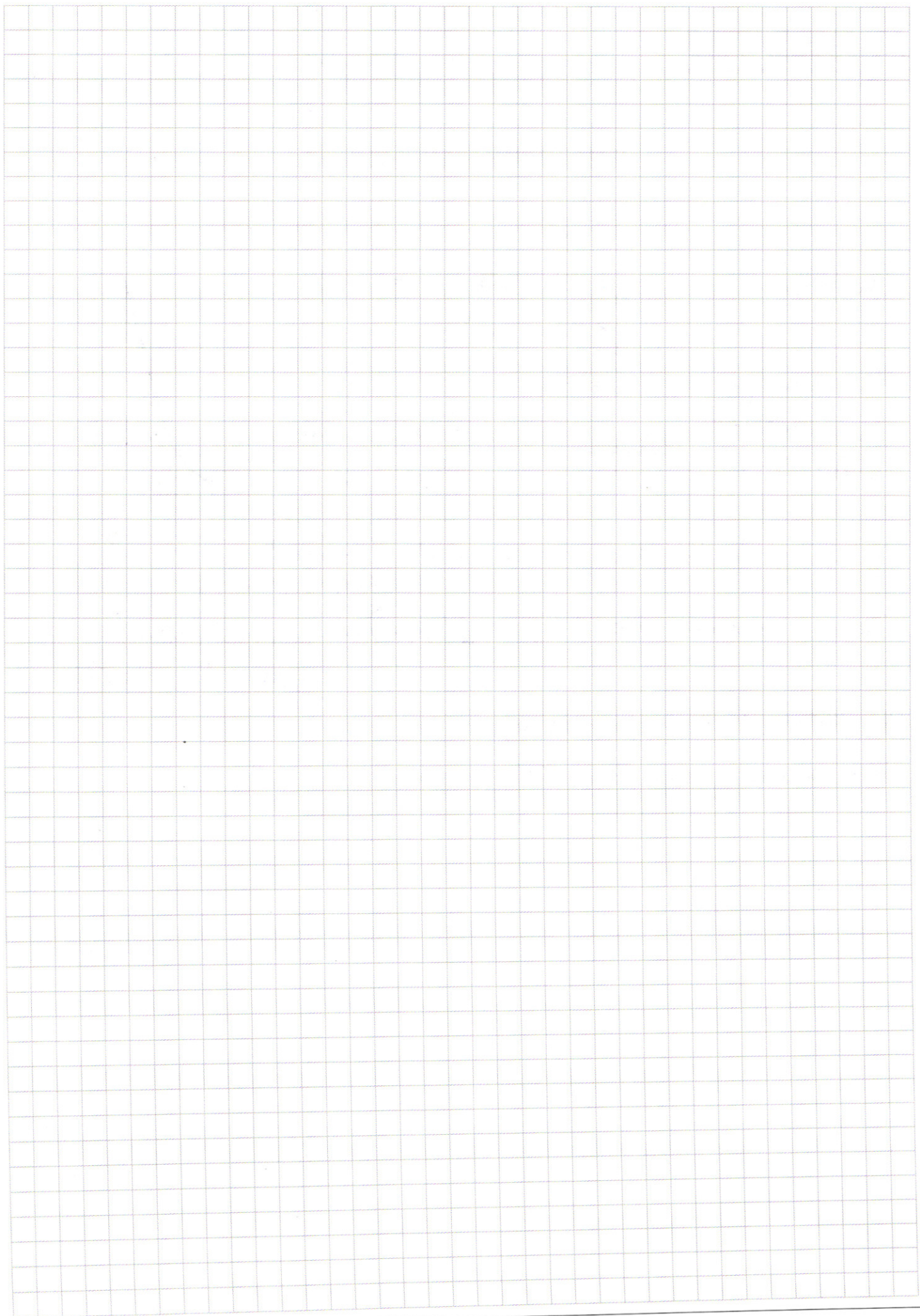
то есть выполняется все $x \in [5; 84]$ (целые).

$$f(85) = 3^{81} / (3^4 + 4)$$

$$g(85) = 3^{81} \cdot 85 - 85 + 85$$

80 возм. x в парах (x, y) .

Для каждого x так $\exists y \in \mathbb{Z}: f(x) < y < g(x)$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

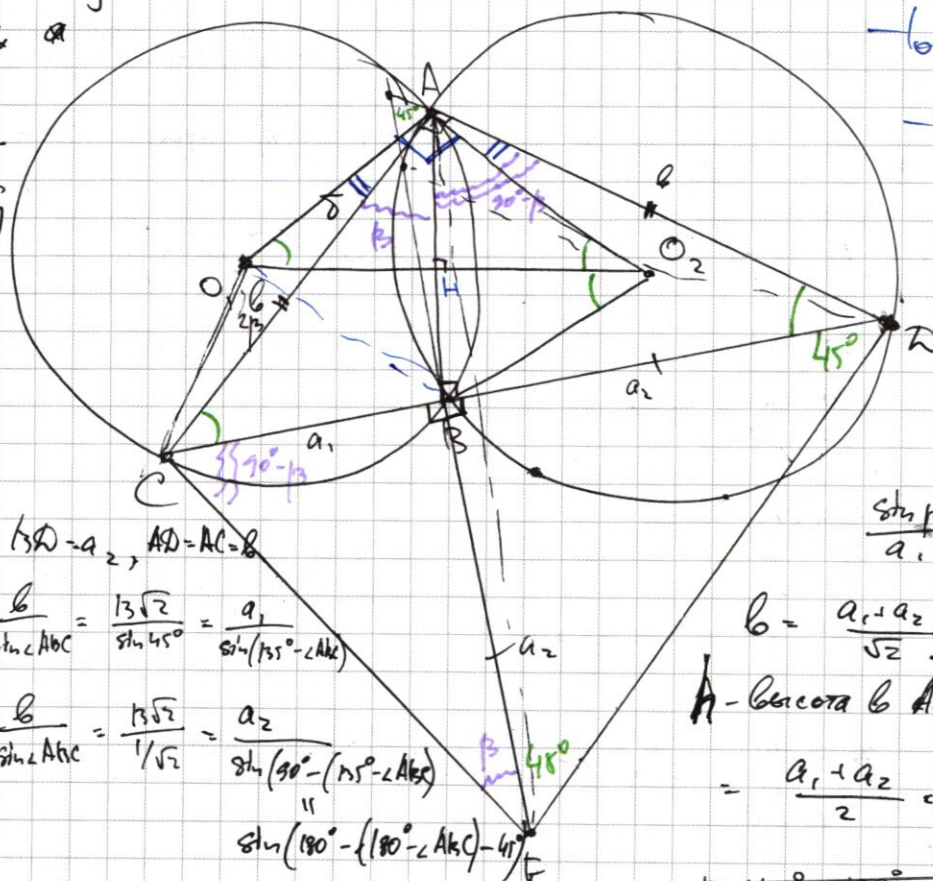
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Зная AB - высота в $\triangle ABC$ по $AB = \frac{26^2}{\sqrt{2} \cdot 26} = \frac{26}{\sqrt{2}} = 13\sqrt{2}$.

Почему, что CO и AO_2 ?

В $\triangle AOB$ xy ?

$\frac{h}{x} = \frac{y}{h}$
 $h = \sqrt{xy}$



$\angle AOC = \frac{1}{2} \angle AOB = \angle AOB$
 $\angle AOB = \frac{1}{2} \angle AOB = \angle AOB$
 $\angle AOB$

$\angle AOB = \angle AOC = \angle ACD = 45^\circ$

Зная $AB = 2AH = 2 \cdot \frac{13}{\sqrt{2}} = 13\sqrt{2}$.

$BC = a_1$, $BD = a_2$, $AD = AC = b$

$\triangle ABC$: $\frac{b}{\sin \angle ABC} = \frac{13\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{a_1}{\sin(135^\circ - \angle ABC)}$

$\triangle ABD$: $\frac{b}{\sin \angle ABD} = \frac{13\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = \frac{a_2}{\sin(90^\circ - (135^\circ - \angle ABC))}$
 $\sin(180^\circ - (180^\circ - \angle ABC) - 45^\circ)$

$a_1 = \sin(135^\circ - \angle ABC) \cdot 26 = 26 \sin p$

$a_2 = \sin(45^\circ - \angle ABC) \cdot 26 = 26 \cos p$

$\triangle AOB = \triangle AOC$

$CF = a_1^2 + a_2^2 = 26^2 \sin^2 p + 26^2 \cos^2 p = 26^2$

$CF = 26$

Зная $BC = 10$ S_{ABC} ?

$\triangle ABC$ $\angle$ синусов

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle CFB = p$
 $S_{ABC} = AC \cdot 26 \cdot \frac{1}{2} \sin(135^\circ - p)$

$p + 45^\circ = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ - p$
 $(180^\circ - p - 45^\circ) + (180^\circ - 45^\circ - (90^\circ - p)) = 180^\circ$
 $180^\circ - p - 45^\circ + 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ + p = 180^\circ$

$p = 45^\circ - 0$

$\triangle AOC$: $\frac{13}{\sin \angle} = \frac{b}{\sin(p + 90^\circ)}$
 $\cos p$

$AC^2 = 100 + 169 \cdot 2 + 2 \cdot 10 \cdot 13\sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ + p)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

NS.

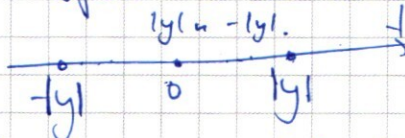
$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

Все a , при кот. 2 реш.

• Пусть $t = x-6$.
 $x \geq 0$ $(t \geq -6)$

$$|t-y| + |t+y| = 12$$

расс. на числовой
прямой (до точек



Если $|y| = 6$, то $t \in [-6; 6]$

$$|y| \leq 6 \Rightarrow 2(|t|-|y|) + 2|y| = 12$$

$$|t|-|y| + |y| = 6$$

$$|t| = 6 \quad t = \pm 6$$

(2): $t^2 + (|y|-8)^2 = a$

• $|y| = 6 \Rightarrow t^2 + 2^2 = a$

$$t^2 = a-4, \quad t \in [-6; 6]$$

Каждое a даст 2 реш для t , кроме

$a = 4$. $(a \in [2, 4] \cup (4, 40])$ - 2 реш.
($a = 4$ - 1 реш.)

$|y| > 6$ - тех реш.

• $|y| < 6 \Rightarrow 36 + (|y|-8)^2 = a$

$$(|y|-8)^2 = a-36$$

т.е. $|y| < 6$, то $|y|-8 < 0 \Rightarrow$ какое a даст 1 реш

для $|y|-8 \Rightarrow$ 2 реш для $|y|$?

Л.Ч $(4; 64)$

Тогда $a \in (40; 100)$ - 2 реш.

• $x < 0$, тогда (2): $(x+6)^2 + (|y|-8)^2 = a$

$(t+6)^2 + (|y|-8)^2 = a$

$$(t+6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

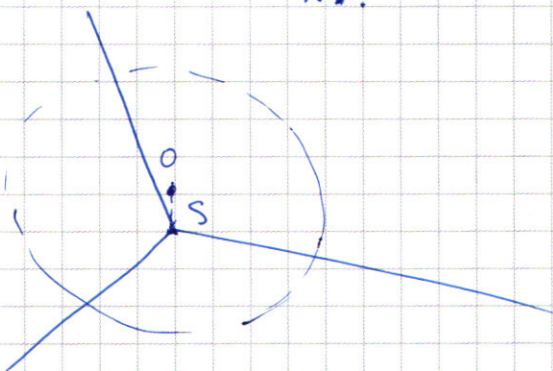
• $|y| = 6 \Rightarrow t^2 + 24t + 144 + 4 = a$

$$t^2 + 24t + 148 - a = 0$$

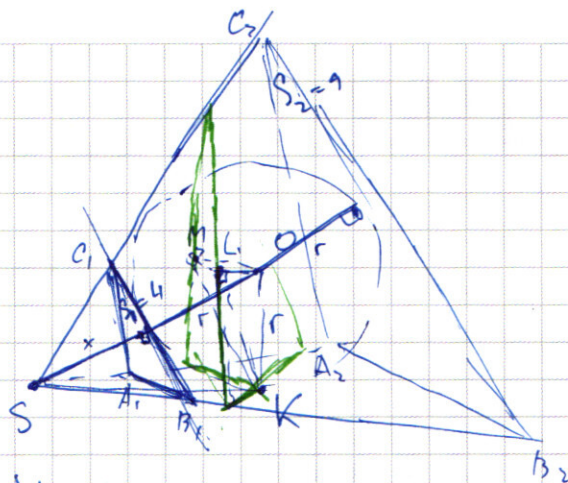
$t \in [-6; 6]$ - не м.д.

• $|y| < 6 \Rightarrow |t| = 6$, не м.д. потому что 2-го сл. нет лог. ответов.

N4.



2) $S_{\text{сечки}} = ?$



$$V_1 = \frac{1}{3} S_1 x$$

$$V_2 = \frac{1}{3} S_2 (x + 2r)$$

$$\frac{SB_1}{SB_2} = \frac{SA_1}{SA_2} = \frac{SC_1}{SC_2} = k.$$

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3 = \frac{S_1 x}{S_2 (x + 2r)}$$

$$k = \frac{x}{x + 2r} \rightarrow$$

$$\left(\frac{x}{x + 2r} \right)^2 = \frac{S_1}{S_2}$$

$$\frac{x}{x + 2r} = \frac{2}{3}$$

$$3x = 2x + 4r$$

$$x = 4r$$

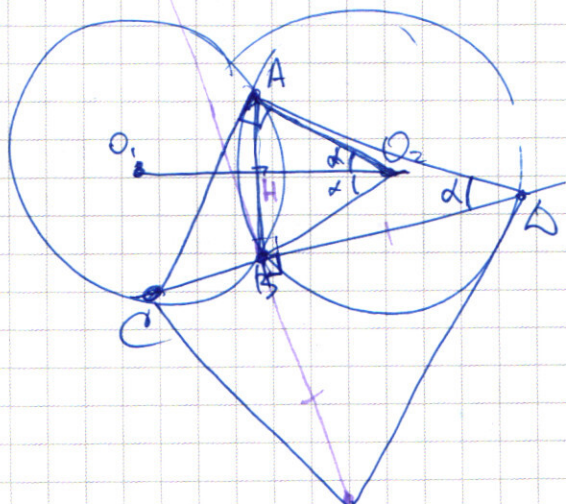
$$\text{тогда } \sin \angle KSO = \frac{r}{5r} = \frac{1}{5}$$

$$1) \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}.$$

N.C.

$$r_1 r_2 = 13$$

~~13~~



$$\triangle ADC \sim \triangle AO_2 H$$

$$\frac{CO}{13} = \frac{AB/2}{AC}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$n \geq 3$ строк.

(2): $2y^2 - (x+8)y - x^2 - 4x = 0$

$$y = \frac{x+8 \pm \sqrt{x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x}}{4}$$

$$y = \frac{x+8 \pm \sqrt{9x^2 + 48x + 64}}{4}$$

$3 \cdot 8 \cdot 2 = 48$

$(3x+8)^2$

$$y = \frac{x+8 \pm (3x+8)}{4}$$

$x \geq -4$ по ОДЗ.

~~$x \geq -\frac{8}{3}$~~

$$\begin{cases} y = \frac{4x+16}{4} \\ y = \frac{-2x}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x+4 & \text{--- 1)} \\ y = -\frac{x}{2} & \text{--- 2)} \end{cases}$$

подставим в (1): $\left(\frac{x^4}{x^2+8x+16}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x \cdot (x+4))}$

$$\left(\frac{x^4}{x^2+8x+16}\right)^{\lg(x+4)} = |x|^{\lg(-x)} \cdot |x|^{\lg(x+4)}$$

$x \cdot |x|^{2\lg(x+4) \cdot \lg(-x)} = (x+4)^{2\lg(x+4)}$

$$|x|^{2\lg(x+4)\lg(-x)} = |x|^{2\lg(x+4)} \cdot 8^{\lg(x+4)} + 16^{\lg(x+4)}$$

$$|x|^{\lg(x+4)} (|x|^{2\lg(x+4)\lg(-x) - \lg(x+4)} - 8) = 2^4 \lg(x+4)$$

$\lg$ от обеих частей:

$$\lg\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right)^{\lg(x+4)} = \lg(-x) \lg(-x \cdot (x+4))$$

$$\lg(x+4) (4\lg(-x) - 2\lg(x+4)) = (\lg(x+4) + \lg(-x)) \cdot \lg(-x)$$

$$4\lg(-x) \cdot \lg(x+4) - 2\lg^2(x+4) = \lg(x+4) \lg(-x) + \lg^2(-x)$$

$$\lg^2(-x) - 3\lg(x+4) \cdot \lg(-x) + 2\lg^2(x+4) = 0$$

$$\frac{\lg(-x)}{\lg(x+4)} = t, \text{ подставим на } \lg^2(x+4)$$

$$\begin{aligned} \text{если } \lg(x+4) &= 0, \text{ то} \\ x+4 &= 1 \\ x &= -3. \end{aligned}$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} t = 1 &\rightarrow \lg(-x) = \lg(x+4) \\ t = 2 &\rightarrow \lg(-x) = 2\lg(x+4) \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{3^4}{1}\right)^0 = 3^{\lg 3}$$

не сл. рен.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \lg\left(\frac{-x}{x+4}\right) = 0 \\ \lg((-x) \cdot (x+4)^2) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{-x}{x+4} = 1 \\ -x \cdot (x+4)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

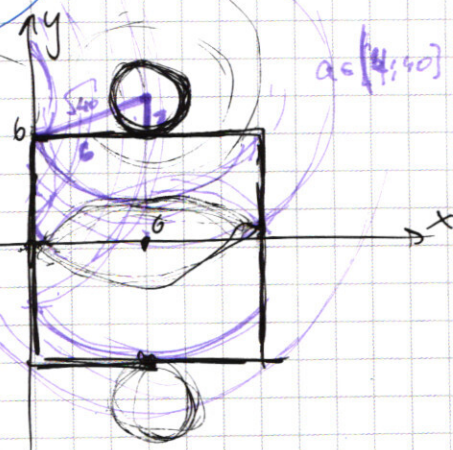
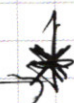
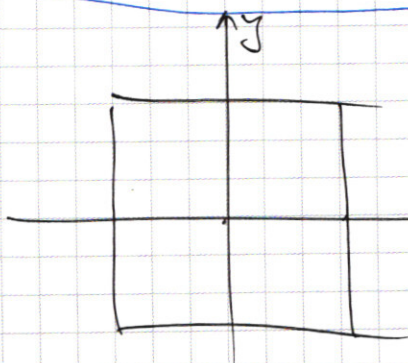
$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} -x = x+4 \\ -x^3 - 8x^2 - 16x - 1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^3 + 8x^2 + 16x + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

~~мы не можем~~

$$\begin{aligned} \begin{cases} -x = x+4 \\ -x = x^2 + 8x + 16 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ x^2 + 9x + 16 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x = -2$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 64}}{2} \rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2} \text{ оба } x \text{ не год.}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Кон-во 8-зн. чисел, произв. цифр 16875

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 15} \\ \underline{-15} \\ 18 \\ \underline{-15} \\ 37 \\ \underline{-35} \\ 25 \\ \underline{-25} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ \underline{-30} \\ 37 \\ \underline{-35} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 25} \\ \underline{-50} \\ 175 \\ \underline{-175} \\ 0 \end{array}$$

$$16875 = 5^4 \cdot 2^3$$

$$\text{произв. цифр} = 2^3 \cdot 5^4$$

Можем поделить на 2^3
в каждой цифре.
или 5^4

8 цифров. $\Rightarrow$ перестановки

$\Rightarrow$ маров.

~~Произведение~~

$$C_{14}^7 = \frac{14!}{7! \cdot 7!} = 4$$

Все цифры $\neq 0 \Rightarrow$ учитываем все варианты

$$= \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = 2 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3 = 24 \cdot 13 \cdot 11 = 24 \cdot 143 = 3432$$

№2.

$$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$(\cos 7x - \sin 7x) + (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} (\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x)$$

$$\frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) = \cos \alpha \cos \beta$$

$$\frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) = \sin \alpha \sin \beta$$

$$\frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) = \sin \alpha \cos \beta$$

$$\frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)) = \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{y-x}{2}$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x = 2 \sin 5x \cos 2x = \dots$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x \cdot \cos(5x + \frac{\pi}{4}) = \cos 10x$$

$$\cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \cos(7x + \frac{\pi}{4}) = \cos 10x$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos 7x \cdot \cos 3x - \sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin 3x$$

$$\cos 7x \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x\right) + \cos 3x \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x\right)$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} (2 \cos^2 5x - 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - 2 \sin^2 5x)$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \sin^2 5x$$

$$\cos 5x (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x) = \sin 5x (-2 \cos 2x - \sqrt{2} \sin 5x)$$

$$\cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) / \left(\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right) = \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) / \left(\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right)$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

• $\cos 5x = \sin 5x$ - решение. $\rightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + \pi n$

• $2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$

$$\cos 2x = \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\pm 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \end{cases}$$

ОДЗ: $y > 0, y \neq 1$
 $x < 0, x \neq -\frac{1}{y}$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2(y-2)^2 - 4 - xy - (x-2)^2$$

$$(x-2)(y-2) = xy - 2x - 2y + 4 \Rightarrow xy + 4 = (x-2)(y-2) + 2(x-y)$$

$$(x^4)^{\lg y} \cdot (y^{-2})^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$(x^4)^{\lg y} \cdot y^{-2 \lg y} = |x|^{\lg(-x)} \cdot |x|^{\lg y}$$

$$(x^4)^{\lg y} \cdot y^{-2 \lg y} = y^{2 \lg y}$$