

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 10x = \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x = \sin 5x & (1) \\ 2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \operatorname{tg} 5x = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x$$

$$\cos 2x = \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right)$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 7x = -\frac{3\pi}{4} + 5x + 2\pi m \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z} \\ -3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m \quad (3) \end{cases}$$

$$(3) \quad x = +\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3} = +\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}$$

($-2\pi m$ эквивалентно $+2\pi m$ при $m \in \mathbb{Z}$)

$$x = +\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = +\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z}$$

$$\sim 1 \quad \frac{\pi}{12}$$

Разложим число 16875 на простые множители: $16875 = 5^4 \cdot 3^3$

Тогда цифры восьмизначного числа могут быть из следующих наборов цифр:

① 5555 333 1

② 5555 9 311

Других наборов быть не может т.к. при перемножении друг цифр из разложения на простые множители получаются числа больше 10 $\Rightarrow$ они не могут быть цифрами числа

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.1 (продолжение)

① $8!$ — количество вариантов восьмизначных чисел, составленных из неповторяющихся цифр. В наборе 5555 3331 цифра 5 повторяется 4 раза, цифра 3 — 3 раза. Тогда количество чисел, составленных из данного набора:

$$S_1 = \frac{8!}{4! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 1}{\cancel{4} \cdot \cancel{3}} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2$$

② В наборе 5555 9 3 1 1 цифра 5 повторяется 4 раза, цифра 1 — 2 раза. Тогда количество восьмизначных чисел, составленных из данного набора:

$$S_2 = \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{\cancel{4} \cdot 2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

Тогда всего чисел: $S = S_1 + S_2$

$$S = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 (8 + 4 - 3) = 42 \cdot 70 \cdot 20 = 42 \cdot 200 = 8400$$

Ответ: 8400 чисел

~ 3

$$\lg \left(\frac{x^4}{y^2} \right) \lg y = (-x) \lg(-xy) \quad (1)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow x < 0$$

$$(1) \quad \lg \left(\frac{x^4}{y^2} \right) \lg y = \lg(-x) \lg(-xy)$$

$$\lg y (\lg x^4 - \lg y^2) = \lg(-xy) \lg(-x)$$

$$\lg y \cdot \lg x^4 - \lg y \cdot 2 \lg y = (\lg(-x) + \lg y) \lg(-x)$$

$$\lg y \cdot \lg x^4 - 2 \lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg(-x) \cdot \lg y$$

$$x^4 = (-x)^4 \Rightarrow \lg x^4 = \lg (-x)^4$$

$$4 \lg y \cdot \lg(-x) - 2 \lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg y \cdot \lg(-x)$$

$$\lg^2(-x) - 3 \lg y \cdot \lg(-x) + 2 \lg^2 y = 0$$

Проверим значение $\lg y = 0 \Rightarrow y = 1$

$$\text{Тогда: } \lg^2(-x) = 0 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$$

$$(2) \quad 2 \cdot 1 + 1 - 1 + 4 - 8 = 0 \quad 6 - 8 = 0 \Rightarrow \lg y = 0$$

и является решением системы

Тогда: $\lg^2 y \neq 0$ Поделит на $\lg^2 y$

$$\left(\frac{\lg(-x)}{\lg y} \right)^2 - 3 \frac{\lg(-x)}{\lg y} + 2 = 0$$

$$\frac{\lg(-x)}{\lg y} = a$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

13 (продолжение)

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$\begin{cases} a = \frac{3+1}{2} = 2 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\frac{\lg(-x)}{\lg y} = 2 \quad (3)$$

$$\begin{cases} a = \frac{3-1}{2} = 1 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\lg(-x) = \lg y \quad (4)$$

$$(3) \quad \lg(-x) = 2 \lg y$$

$$\lg(-x) = \lg y^2 \Rightarrow -x = y^2$$

$$x = -y^2$$

$$(4) \quad \lg(-x) = \lg y$$

$$x = -y$$

Подставим значение $x = -y$ в ур-ние (2):

$$2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0$$

$$2y^2 - 4y = 0$$

$$y(y-2) = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ y > 0 \end{cases}$$

Подставим значение $x = -y^2$ в ур-ние (2):

$$2y^2 - y \cdot (-y^2) - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$y^4 - y^3 - 6y^2 + 8y = 0$$

$$y(y-2)(y^2+y-4) = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \Rightarrow x = -4 \\ y^2 + y - 4 = 0 \quad (5) \\ y > 0 \end{cases}$$

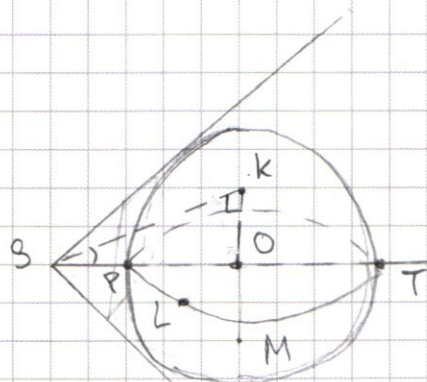
$$(5) \quad D = 1 + 16 = 17$$

$$\begin{cases} y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x = -\frac{(-1 + \sqrt{17})^2}{4} = -\frac{(9 - \sqrt{17})}{2} \\ y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{17} - 9}{2} \end{cases}$$

Answer: $x = -2 \quad y = 2 \quad x = -4 \quad y = 2 \quad x = \frac{\sqrt{17} - 9}{2} \quad y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Пусть P — точка касания плоскости, перпендикулярной SO с площадью сечения 4

Тогда T - точка касания плоскости с площадью g .

$$S_1 = 4 \quad ; \quad S_2 = 9$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{SP^2}{ST^2}$$

SR и ST - высоты в пирамидах, составленных из точек, перпендикулярных SO и трехгранного угла S

$$\frac{g}{g} = \frac{SP^2}{ST^2} \Rightarrow \frac{SP}{ST} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{matrix} SP = 2x \\ ST = 3x \end{matrix} \Rightarrow ST - SP = PT = x$$

$$\left. \begin{array}{l} P_T = P_O + O_T \\ P_O = O_T = R \end{array} \right\} \Rightarrow P_O = O_T = \frac{x}{2}$$

$$Ok = \mathbb{R} \Rightarrow Ok = \frac{x}{2}$$

Torga $SO = SP + PO = 2x + \frac{x}{2} = \frac{5x}{2}$

$$\frac{+g}{2kSO} = \frac{k\phi}{SO} = \frac{xz}{2 \cdot 5x} = \frac{1}{5}$$

$O_k \perp S_k$ (т.к. сфера касается грани угла;
 S_k принадлежит данной грани)

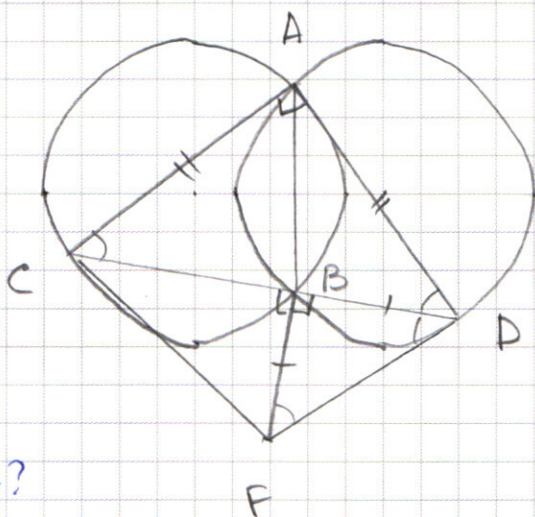
$$\angle SKO = 90^\circ$$

$$\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 5\cancel{2}} = \frac{1}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$$

~ 6

a)



$$1) \left. \begin{aligned} \frac{AB}{\sin \angle AOC} &= 2R \\ \frac{AB}{\sin \angle ACD} &= 2R \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\sin \angle ACD = \sin \angle ADC$$

$$\angle ACD = \angle APC$$

$$\triangle ACD - \text{равноб} \Rightarrow AC = AD$$

$$\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$$

2) $\left. \begin{array}{l} BD \perp BF \\ BD = BF \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle FBD - \text{равнобедр., прямоуг.}$
 $\angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$

3) Пусть $\angle CAB = \alpha$, тогда $\angle BAD = 90^\circ - \alpha$
 $\sin(90 - \alpha) = \cos \alpha$

Torque: $\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow BC = 26 \sin \alpha$

$$\frac{BD}{\cos \alpha} = 2R \Rightarrow BD = 26 \cos \alpha$$

7. u. $BF = BD \Rightarrow BF = 26 \cos \alpha$

4) т. Купанови гле $\Delta CBF : CF^2 = BC^2 + BF^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$CF^2 = 26^2 \sin^2 \alpha + 26^2 \cos^2 \alpha = 26^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$CF^2 = 26^2 \rightarrow CF = 26$$

8) $BC = 10$; $S_{\triangle ACF} = ?$

1) $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = 2R \Rightarrow AB = 2 \cdot 13 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $AB = 13\sqrt{2}$

2) $BC = 10$
 $AB = 13\sqrt{2}$
 $\angle ACB = 45^\circ$
 $CF = 26$

т. косинусов где $\triangle ABC$:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB$$

$$2 \cdot 13^2 = AC^2 + 100 - \frac{2 \cdot 10 \cdot AC \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$AC^2 - 10\sqrt{2} \cdot AC + 100 - 338 = 0$$

$$AC^2 - 10\sqrt{2} AC - 238 = 0$$

$$D = 2 \cdot 100 + 238 \cdot 4 = 4(25 + 238) = 4 \cdot 263$$

$$AC = \frac{10\sqrt{2} + 2\sqrt{263}}{2} = 5\sqrt{2} + \sqrt{263}$$

3) $\sin \angle BCF = \cos \angle BCF = \frac{BC}{CF} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$
 $\sin \angle BCF = \frac{12}{13}$

$$\sin \angle ACF = \frac{12}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{17\sqrt{2}}{26}$$

4) $S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF$

$$S_{\Delta ACF} = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot \frac{17\sqrt{2}}{26} \cdot (5\sqrt{2} + \sqrt{263})$$

$$S_{\Delta ACF} = \frac{17\sqrt{2} (5\sqrt{2} + \sqrt{263})}{2} = 17 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{526}$$

$$S_{\Delta ACF} = 85 + \frac{\sqrt{526}}{2}$$

Ответ: CF=26

$$S_{\Delta ACF} = 85 + \frac{\sqrt{526}}{2}$$

~5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ ((|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

$$(1) |x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$1) x-6-y + x-6+y = 12$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

$$x-6-y \geq 0$$

$$x-6+y \geq 0$$

$$2) x-6-y - x+6-y = 12$$

$$-2y = 12$$

$$y = -6$$

$$x-6-y \geq 0$$

$$x-6+y < 0$$

$$3) -x+6+y + x-6+y = 12$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

$$x-6-y < 0$$

$$x-6+y \geq 0$$

$$4) -x+6+y - x+6-y = 12$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

$$x-6-y < 0$$

$$x-6+y < 0$$

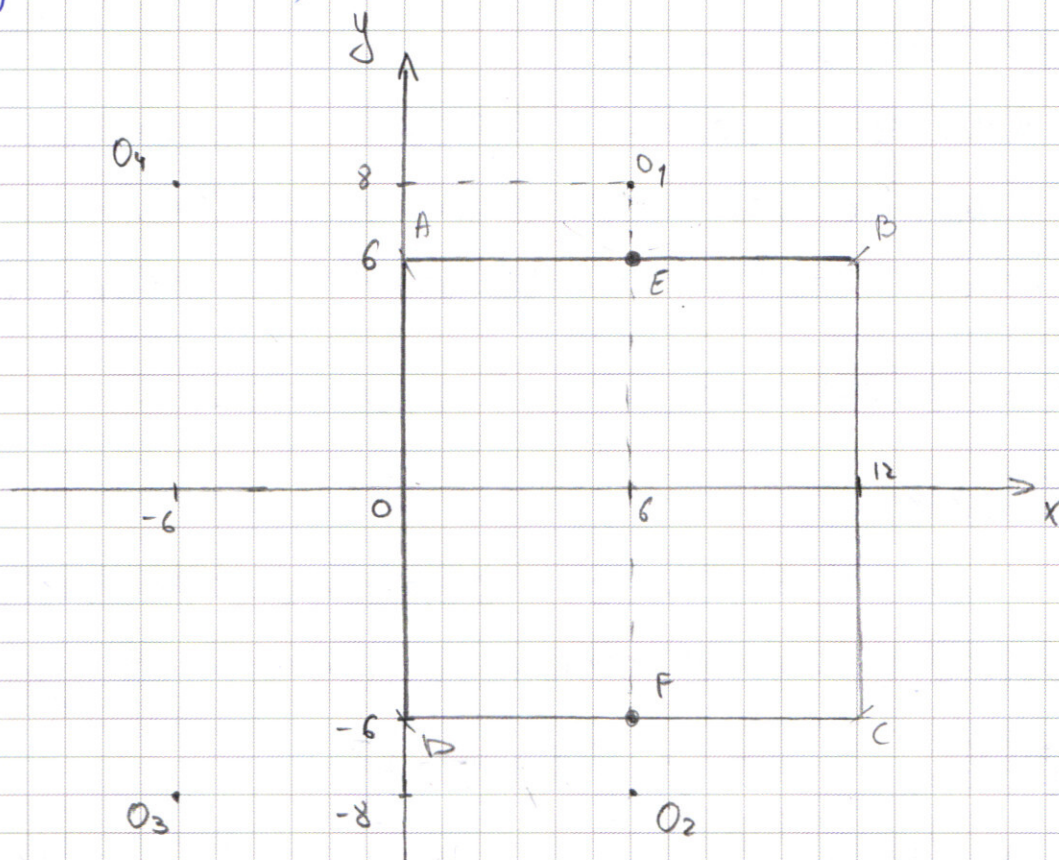
$$\begin{cases} x=12 \\ y=-6 \\ y=6 \\ x=0 \end{cases}$$

(2) - уравнение окружности с координатами (6; 8)

и радиусом 10 и ещё 3-х окружностей симметричных отн. OX и OY

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

15 (продолжение)



1) При $R < 2$ решений нет, т.к. ни одна из окружностей не пересекает ABCD

2) $R = 2$ окружности O_1 и O_2 касаются крестовых AB и CD в точках E и F соответственно $\Rightarrow$ 2 решения

$$R = 2 \Rightarrow \sqrt{a} = 2; a = 4$$

3) При $2 < R < \sqrt{20}$ окружности O_1 и O_2 пересекают ABCD более 1 раза каждая

4) При $R = \sqrt{40}$ окружности O_3 и O_4 имеют по 1 общую точку с ABCD

Но при данном R окружности O_1 и O_2 так не пересекаются $ABCD \Rightarrow$ решений более 2

5) При $R = 2\sqrt{130}$ ($R^2 = 18^2 + 14^2$) окружности O_1 и O_2 пересекаются $ABCD$ в точках B и C соответственно

При данном радиусе окружности O_1 и O_2 не пересекаются $ABCD \Rightarrow$

При $R = 2\sqrt{130}$ существует 2 решения

$$\sqrt{a} = 2\sqrt{130} \Rightarrow a = 4 \cdot 130 = 520$$

~~Ответ:~~

6) При $R > 2\sqrt{130}$ окружности не будут иметь общих точек с $ABCD \Rightarrow$

$$a = 4$$
$$a = 520$$

Ответ: $a \in \{4; 520\}$

(т.е. при $a=4$ и при $a=520$ система имеет ровно 2 решения)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 10x = \cos(7x + 3x) = \cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 7x \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 10x + \cos 4x)$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x + \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x + \cos 3x = \sin 7x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x + \sin 3x$$

$$\cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x \cos 3x + \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x \cos 3x =$$

$$= \cos 7x \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x\right) \quad \vee 2 \quad \text{или}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\sqrt{2} \cos 2x - (\cos 5x + \sin 5x)) (\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$\textcircled{1} \cos 5x = \sin 5x \Rightarrow \operatorname{tg} 5x = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

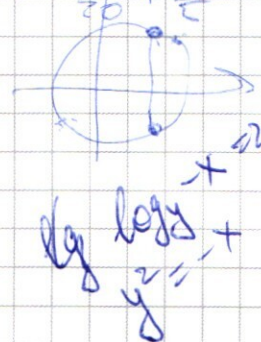
$$\textcircled{2} \sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x$$

$$2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x$$

$$\cos 2x = \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right)$$

$$\textcircled{2} 2x = \frac{\pi}{4} - 5x \Rightarrow 7x = \frac{\pi}{4}$$



$$2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\sqrt{11}k \Rightarrow 7x = \frac{\pi}{4} + 2\sqrt{11}k$$

$$2x = \pi - \left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) + 2\sqrt{11}n \quad 2x = \frac{3\pi}{4} + 5x + 2\sqrt{11}n$$

$$-3x = \frac{3\pi}{4} + 2\sqrt{11}n$$

$$3x = -\frac{3\pi}{4} + 2\sqrt{11}n$$

$$1) x = \frac{\pi}{20} + \frac{\sqrt{11}k}{5}$$

$$2) x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\sqrt{11}n}{7}$$

$$3) x = -\frac{\pi}{4} + 2\sqrt{11}m$$

~ 1

$$\begin{array}{r} 16875 \mid 5 \\ 3375 \mid 5 \\ 675 \mid 5 \\ 135 \mid 5 \\ 27 \mid 9 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 625$$

$$\begin{array}{r} -16875 \mid 5 \\ 15 \\ -18 \\ 15 \\ -37 \\ 35 \\ \hline 25 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3375 \mid 5 \\ 30 \\ 675 \mid 5 \\ 37 \mid 5 \\ 35 \mid 17 \\ 25 \mid 15 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -16875 \mid 9 \\ 9 \\ -78 \\ 72 \\ -62 \\ 63 \\ \hline 45 \end{array} \quad \begin{array}{r} 16875 \mid 3 \\ 1875 \mid 3 \\ 18 \\ 625 \end{array} \quad \begin{array}{r} 16875 \mid 5 \\ 15 \\ -18 \\ 15 \\ -37 \\ 35 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \mid 5 \\ 10 \\ \hline 35 \end{array} \quad \begin{array}{r} 135 \mid 5 \\ 10 \\ 27 \end{array}$$

$$16875 =$$

$$27 \cdot 625 = 3^3 \cdot 5^4$$

$$\textcircled{1} \quad 333 \quad 5555$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{8!}{4 \cdot 3} = 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\frac{3}{3} = 1$$

$$\frac{8!}{2} = 654321$$

$$\textcircled{2} \quad 39 \quad 5555 \quad 11$$

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 3$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{8!}{4 \cdot 2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\begin{array}{r} 22333 \\ 23233 \\ 23323 \\ 23332 \\ 32332 \\ 33232 \\ 33312 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1122 \\ 1221 \\ 1212 \\ 2121 \\ 2211 \\ 2112 \end{array} \quad \frac{4!}{4} = 3 \cdot 2 \cdot 1$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

21

① 333 5555 1

② 39555511

$$\frac{8!}{4 \cdot 3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3}$$

$$\frac{8!}{4 \cdot 2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 2}$$

$$1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 (8 + 12) =$$

$$= 42 \cdot 10 \cdot 20 = \frac{4 \cdot 2 \cdot 200}{8} = 1600$$

$$2 \cdot 1 + 1 - 1 + 4 - 8$$

23

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$4 \lg y - x y - x^2 - 4x - xy = 0$$

$$\begin{cases} -xy > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow x < 0$$

$$-4(x + 2y) \lg y = 0$$

$$x^4 \lg y$$

$$y^2 \lg y = y^{\lg y}$$

$$\lg \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg(-x)^{\lg(-xy)}$$

$$(-x)^{\lg(-x)} + \lg y$$

$$(-x)^{\lg(-x)} + (-x)^{\lg y}$$

$$\lg(-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\lg y = 1$$

$$\begin{cases} -x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\lg y \cdot (\lg x^4 - \lg y^2) = \lg(-x)^{\lg(-x)}$$

$$\lg y \cdot \lg x^4 - \lg y \cdot \lg y^2 = (\lg(-x) + \lg(y)) \lg(-x)$$

$$4 \lg y \lg |x| - 2 \lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg(y) \lg(-x)$$

$$4 \lg y \lg |x| - 2 \lg^2 y = \lg^2 |x| + \lg(y) \lg |x|$$

$$\lg^2 |x| - 3 \lg y \lg |x| + 2 \lg^2 y = 0 \quad | : \lg y$$

$$\left(\frac{\lg |x|}{\lg y}\right)^2 - 3 \frac{\lg |x|}{\lg y} + 2 = 0$$

$$\frac{\lg|x|}{\lg(y)} = a$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$a = \frac{3+1}{2} = 2 =$$

$$a = \frac{3-1}{2} = 1 =$$

$$\lg|x| = y^2$$

$$|x| = y$$

$$x < 0$$

$$\left(\frac{y^4}{y^2}\right) \lg y = -y^2 \lg(-y^2)$$

$$\lg|x| = 2 \lg(y)$$

$$\lg|x| = \lg(y)$$

$$x = -y^2 \quad (1)$$

$$x = -y \quad (2)$$

$$\frac{18-2\sqrt{17}}{2} = \frac{1+17-2\sqrt{17}}{2}$$

$$(2) \quad 2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0$$

$$2y^2 - 4y = 0$$

$$y^2 - 2y = 0$$

$$y(y-2) = 0$$

$$y=0$$

$$y=2$$

$$x=0$$

$$x=-2$$

$$(1) \quad 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$y^4 - y^3 - 6y^2 + 8y = 0$$

$$y(y^3 - y^2 - 6y + 8) = 0$$

$$y=0 \quad x=0$$

$$\begin{array}{r} y^3 - y^2 - 6y + 8 \\ - (y^3 - 6y^2) \\ \hline y^2 - 6y + 8 \\ - (y^2 - 6y) \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\frac{y-2}{y^2+y-4}$$

$$y(y^2+y-4)(y-2) = 0$$

$$y=0$$

$$y=2$$

$$x=0$$

$$x=-4$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

(2)

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x = -\frac{(-1 + \sqrt{17})^2}{4} = -\frac{1+17-2\sqrt{17}}{4}$$

$$y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$x = -\frac{18-2\sqrt{17}}{4} = -\frac{(9-\sqrt{17})}{2}$$

$$y > 0$$

(2)

$$x = \frac{\sqrt{17}-9}{2}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x = -y^2$$

$$\left(\frac{y}{y^2}\right) \lg y = (y^2) \lg y^3$$

$$y^0 \lg y = y^2 \lg y^3$$

$$\lg y^0 \lg y = \lg y^2 \lg y^3$$

$$0 \lg y \lg y = \lg y^2 \lg y^3$$

$$x - 6 - y + x - 6 + y = 12$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

$$-2y = 12$$

$$y = -6$$

$$x = 12$$

$$y = 0$$

$$-x + 6 + y - x + 6 - y = 12$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

$$12 = 12$$

$$x = 1$$

$$y = -5$$

$$1 - 6 - 2$$

$$1 - 6 + 2$$

$$= -3$$

~5

$$|x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12$$

$$(|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 9$$

$$x - y - 6 = 0$$

$$x - y = 6$$

$$x = -12$$

$$x + y - 6 = 0$$

$$x + y = 6$$

$$1) x - 6 - y + x - 6 + y = 12$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

$$2) x - 6 - y - x + 6 + y = 12$$

$$3) -x + 6 + y + x - 6 + y = 12$$

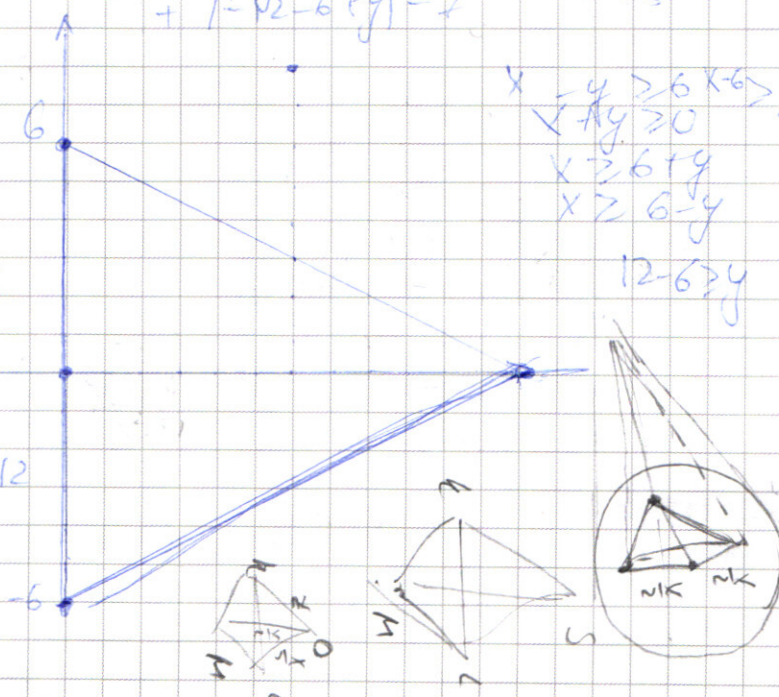
$$2y = 12$$

$$y = 6$$

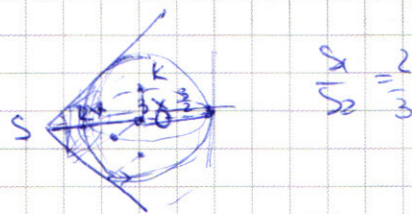
$$4) -x + 6 - y - x + 6 - y = 12$$

$$-2x + 12 = 12$$

$$x = 0$$



$$R = r_3 \quad CF = ?$$



$$AB = 2 \cdot 13 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 13\sqrt{2}$$

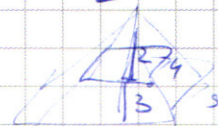
$$2 \cdot 3 \quad SP = 2x \quad ST = 3x \quad PT = x$$

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{AB}{\sin \beta} = 2R \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow$$

$$SO = 2x + \frac{x}{2} = \frac{5x}{2} \quad \angle ADB$$

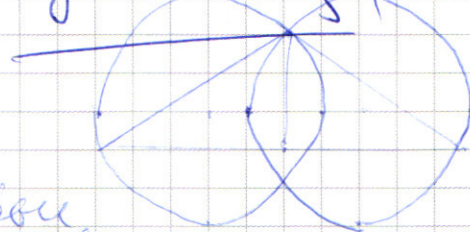
$$AB = 13\sqrt{2} \quad KO = \frac{x}{2}$$



$$\angle ADF = 90^\circ = \angle AD -$$

$$\text{then } \tan \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{x/2}{5x/2} = \frac{1}{5}$$

$$\tan \angle KSO = \frac{1}{5}$$



$$\left. \begin{array}{l} AC = AD \\ R_1 = R_2 = R \end{array} \right\} \Rightarrow$$

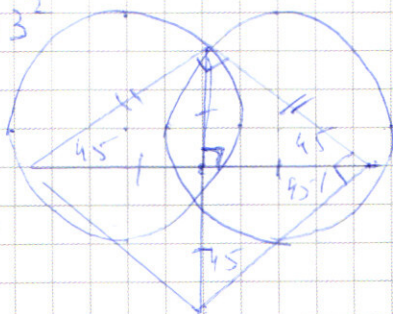
одинаковые хорды стягивают одинаковые углы (выпуклости равны и углы)

$$CF^2 = 2AB^2$$

$$CF^2 = 2 \cdot 2 \cdot 13^2$$

$$CF = 2 \cdot 13$$

$$CF = 26$$



$$\left. \begin{array}{l} AB \perp CD \\ BF \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow B \in AF$$

$\triangle ACD$ - равнобедренный
 $AB \perp CD \Rightarrow AB$ - медиана

$$CB = BD = BA$$

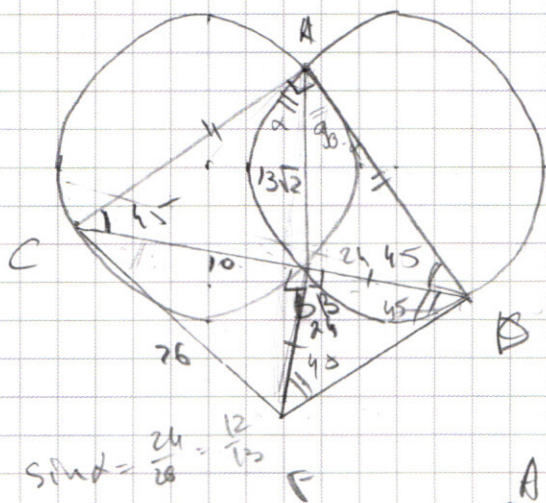
$$AB = 13\sqrt{2}$$

$$CF =$$

$\triangle ABC = \triangle ABD = \triangle DBF = \triangle FBC$
по 2 сторонам и углу

$$AC = AD = BF = CF \Rightarrow \triangle ADFC \text{ квадрат}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\left. \begin{aligned} \frac{AB}{\sin \angle ADC} &= 2R \\ \frac{AB}{\sin \angle ACD} &= 2R \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle ADC = \angle ACD$$

$AC \parallel DE$

$ADFC$ - трапеция

$$AB = \frac{2 \cdot 13 \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow AB = 13\sqrt{2}$$

$$\frac{AD}{\sin \angle ABD} =$$

$$\begin{array}{r} 3 \text{ AD - касат} \\ 238 \\ 4 \text{ AC - касат} \\ 942 \end{array}$$

$$\Rightarrow AC = 2 \cdot 13 = 26 = AA$$

$$\angle ABD = 90^\circ = \angle ABC$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ + 151 \\ 52 \\ \hline 526 \\ - 100 \\ \hline 426 \end{array}$$

$$2 \cdot 100 +$$

$$\frac{CB}{\sin \alpha} = \frac{2 \cdot 13 \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$BD = 2 \cdot 13$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 26$$

$$\frac{BD}{\cos \alpha} =$$

$$CB = 26 \sin \alpha$$

$$BD = 26 \cos \alpha$$

$$CF = 26 \sin^2 \alpha + 26 \cos^2 \alpha$$

$$CF = 26$$

$$AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \alpha = AC^2 + 100 - 2 \cdot AC \cdot 10 \cdot \sqrt{2}$$

$$1) \quad x - 6 - y + x - 6 + y = 12$$

$$2x - 12 = 12$$

$$x = 12$$

$$2) \quad x - 6 - y - x + 6 - y = 12$$

$$-2y = 12$$

$$y = -6$$

$$3) \quad -x + 6 + y + x - 6 + y = 12$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

$$4) \quad -x + 6 + y - x + 6 - y = 12$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

$$R = 2$$

$$(-x - 6)^2 \quad R^2 = a$$

$$a = 4$$

$$\sqrt{a} = 2$$

$$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 4$$

$$(6 - 6)^2 + (8 - 8)^2 = 4$$

$$(x - 6)^2 + (8 - 8)^2 = 4$$

$$(x - 6)^2 = 4$$

$$(x - 6)^2 = 4$$

$$6 \quad 10$$

$$64 + 100$$

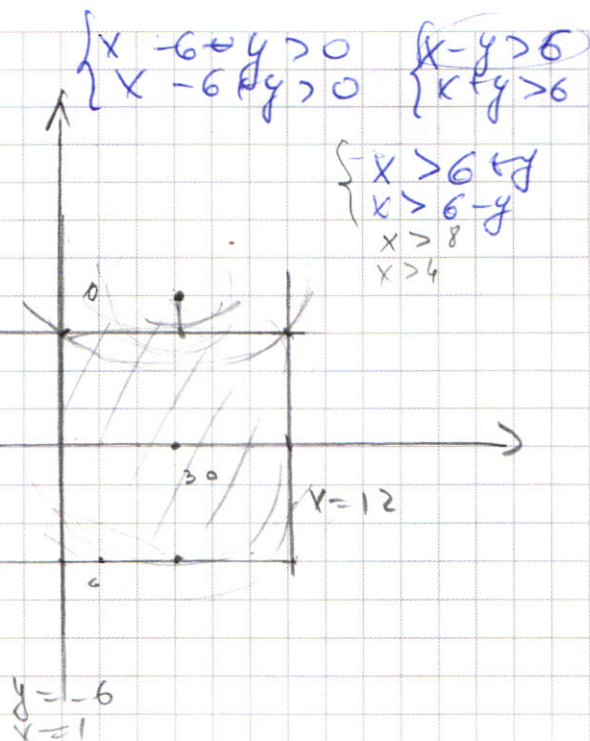
$$\sqrt{164} \quad 14$$

$$18$$

$$36 + 196$$

$$156$$

$$232$$



$$(1 - 6 + 6) + (1 - 6 - 6)$$

$$18^2 + 14^2$$

$$2 \cdot 18$$

$$18^2 + 14^2$$

$$2 \cdot 9^2 + 2 \cdot 7^2$$

$$2 \cdot (81 + 49)$$

$$130$$

$$2 \cdot 14$$

$$4 \cdot 130$$

$$2 \sqrt{130}$$

$$6$$

$$2 \cdot 18$$

$$18$$

$$144$$

$$18$$

$$324$$

$$196$$

$$520$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»



(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 3^x + 4 \cdot 3^{x/2}$$

