

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~1

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3, \text{ т.к. } \overline{abcdefgh} = n$$

т.к. произведение цифр числа n нечётно, среди них нет чётных. Также из всех цифр на 5 делится только 0 и 5 (0 не ур, т.к. не дел).

т.к. $5 : 5$ и $5 \cdot 25$, то в числе n ровно 4 пятерки (произв. всех цифр: $5^4 \cdot \neq 5^5$)

Итак, произв. 4-х цифр равно 27. Какие цифры допустимы? Чётные — нет, 5 — нет, т.к. произв. будет 5^5 , что не ур; 7 — нет, т.к. произв. $7 \cdot 7$. Остаются 1, 3 и 9. Среди этих 4 цифр встретится единица (если нет, то произв. будет 3^4 , что не ур), встретится тройка (если нет, то произв. будет степенью девяти, чему не равно 27). Значит, произв. 2-х цифр = 9. Ну и тут 2 варианта — 1 и 9 либо 3 и 3. По итогу у нас 2 набора цифр:

1) 5, 5, 5, 5, 1, 3, 1, 9 | Посчитаем кол-во

2) 5, 5, 5, 5, 1, 3, 3, 3 | подходящих чисел;

1)
$$P \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} \cdot 3 = 8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 = 40 \cdot 21 = 840$$

ставим 9 на 1 из 8 мест ставим 4 пятерки на 4 места ставим тройку не важен их порядок а единицу на 8-е место

$$2) \quad \underbrace{8}_{\text{максимум}} \cdot \underbrace{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!}}_{\text{максимум}} = 280$$

на 7 из 8 мест

максимум

а на 8-м месте
просто

$$840 + 280 = 1120$$

2 случая
невозможны

Ответ: 1120

1.2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$(\cos 7x - \sin 7x) + (\cos 3x - \sin 3x) - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) - \cos 10x = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 10x}{2}\right) \cos(-2x) - \cos 10x = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 10x}{2}\right) \cos 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 10x}{2}\right) \cos 2x - 2 \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 10x}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 10x}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 10x}{2}\right) (\cos 2x - \cos(\frac{\pi}{4} - 5x)) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) (-2 \cdot \sin(\frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2}) \cos(\frac{1x - \frac{\pi}{4}}{2})) = 0$$

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) = 0 \\ \sin(\frac{\pi}{8} - 1,5x) = 0 \\ \cos(3,5x - \frac{\pi}{8}) = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{\pi}{4} - 5x = \pi a \\ \frac{\pi}{8} - 1,5x = \pi b \\ 3,5x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi c \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi a}{5} + \frac{\pi}{20} \\ x = -\frac{2\pi b}{3} + \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{2\pi c}{7} + \frac{5\pi}{28} \end{cases}$$

$a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi a}{5} + \frac{\pi}{20}; -\frac{2\pi b}{3} + \frac{\pi}{12}; \frac{2\pi c}{7} + \frac{5\pi}{28}$$

$a, b, c \in \mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

23

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$y > 0 \quad (\text{из } (1))$$

$$x < 0 \quad (\text{из } (y|-xy| \text{ и } y < 0))$$

$$2) \quad 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - 2xy + xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$(2y+x)(y-x) - 4(x+2y) = 0$$

$$(x+2y)(y-x-4) = 0$$

$$\begin{cases} x = -2y \\ y = x+4 \end{cases}$$

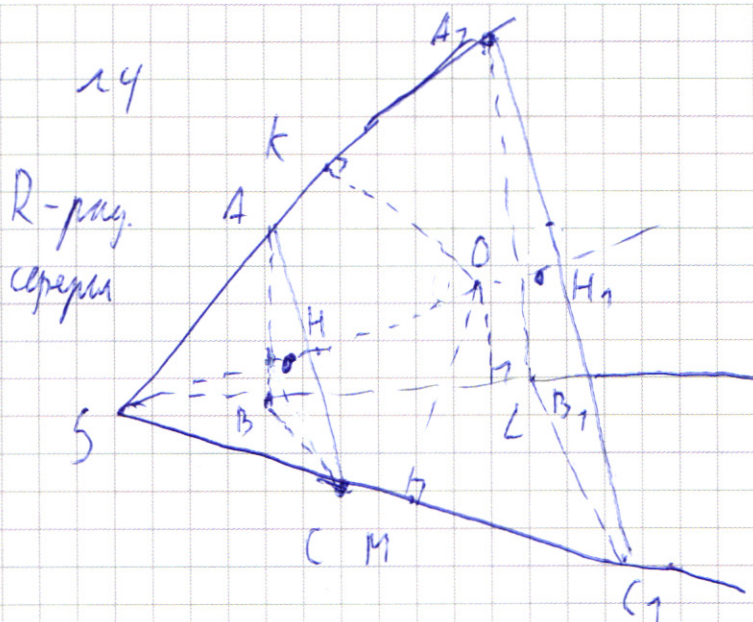
$$1.1) \quad \begin{cases} x = -2y \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \end{cases}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)} \quad y > 0$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^2 (\lg 2y)$$

$$(4y)^2 (\lg y) = (2y)^2 (\lg 2y)$$

$$(4y)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y}$$



$$S_{\triangle ABC} = 4$$

$$S_{\triangle A_1 B_1 C_1} = 9$$

$$(ABC) \parallel (A_1 B_1 C_1)$$

$$(\text{перп. } SO)$$

$$H = (ABC) \cap SO$$

$$H_1 = (A_1 B_1 C_1) \cap SO$$

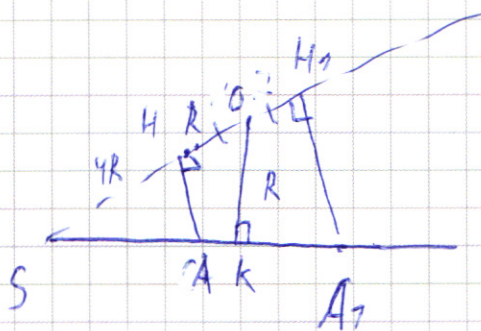
$$ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1 \Rightarrow \frac{SH}{SH_1} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \Rightarrow SH_1 = 1,5SH$$

$$2R = SH_1 - SH = 0,5SH \Rightarrow SH = 4R, SH_1 = 6R$$

$$OK = R$$

$$\sin \angle KSO = \frac{OK}{OS} = \frac{R}{5R} = \frac{1}{5} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5} \quad \cos \angle KSO = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

$(\angle KSO < 90^\circ)$



$$SK = \sqrt{25R^2 - R^2} = \sqrt{24R^2} = 2\sqrt{6}R$$

$$SA = \frac{4R \cdot 5}{2\sqrt{6}} = \frac{70R}{\sqrt{6}}$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$$

27

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{x-1}$$

$$y < 85 + 13^{x-1} - 71x$$

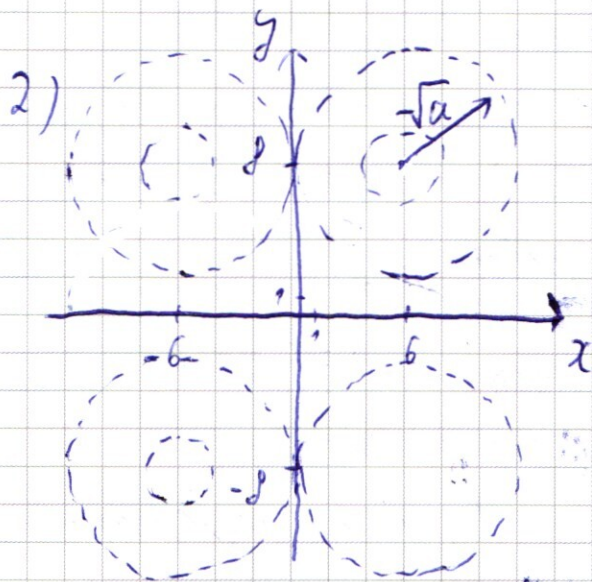
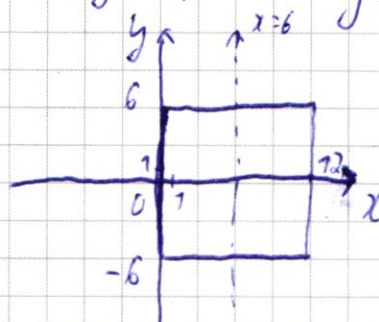
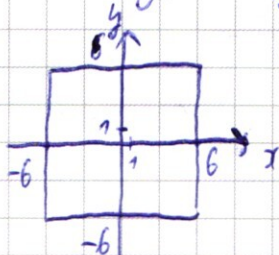
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \text{ при } a < 0 \text{ орет.} \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \text{ значит } a \geq 0 \end{cases}$$

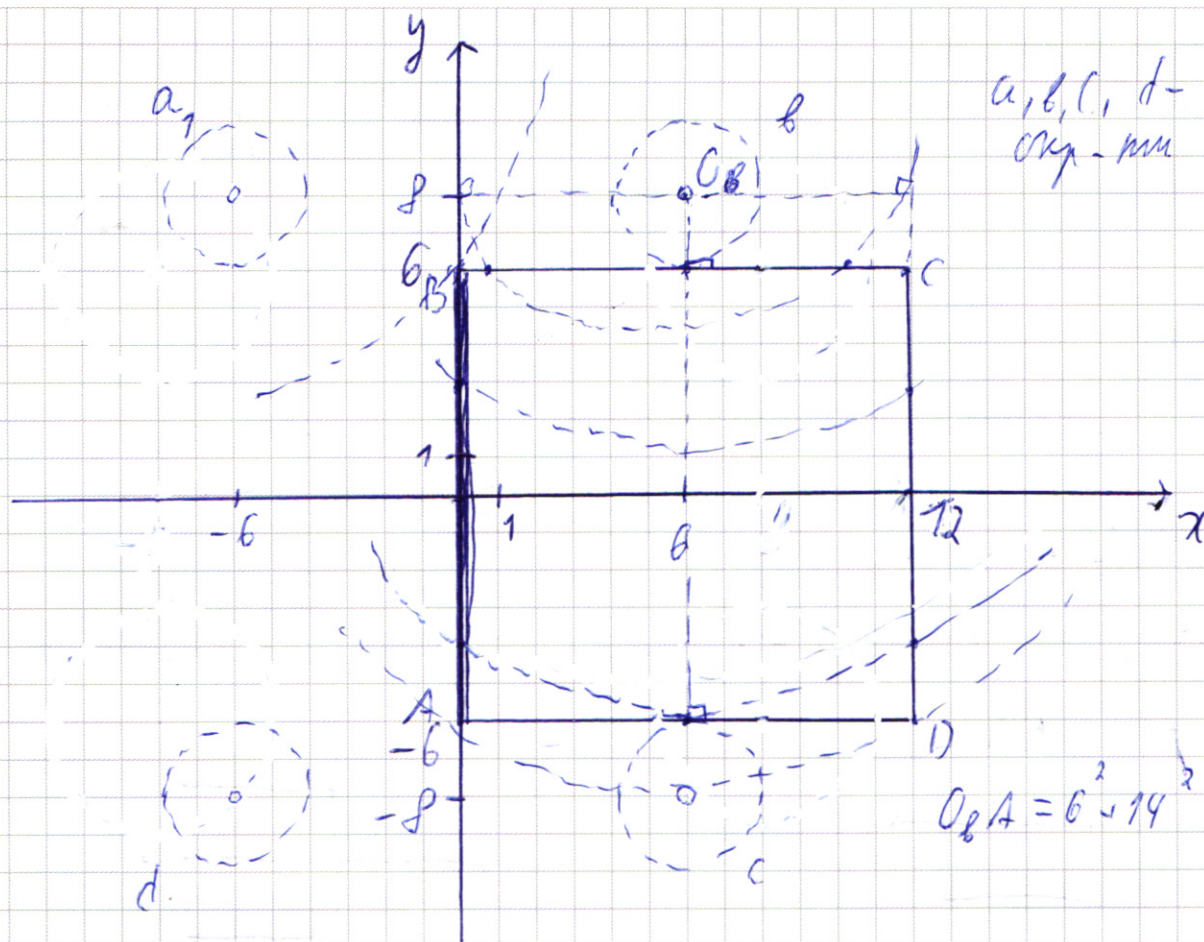
Построить графики (1) и (2) ур-ий:

а) $|x-y| + |x+y| = 12$ 1) $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$



(радиусы данных 4 окр-тей
зависят от a (равны $\sqrt{a}$))

Теперь объединим
круговые чертёжи:



Заметим, что кривая симметрична отн. оси x (это заметно и из системы ур-ий, если поменять местами y и $-y$, то ничего не изм.)

При $0 \leq a < 4$ 0 решений, при $a = 4$ 2 решения ($x=6, y=6$ и $x=6, y=-6$)
 Сначала пер-ий с квадратом ABCD
 имеют окр-ти a и b , так как же точек пер-я с квадратом имеют окр-ти c и d , т.е. суммарно окр-ти a и b должны иметь 1 общ. точку с квадратом. Окр-ть b имеет 1 общ. точку с квадратом только когда касается 1 из его сторон и имеет 0 общ. точек с другими сторонами, что возм. только если $a = 4$ (проводим радиусы, перп. сторонам),
 делаем вывод, что при $4 < a \leq 6^2 + 14^2$ более 2 рет. (не су)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $a > 6^2 + 14^2$ окр-ть B с квадратами
общ. т-ек не имеет.

Окр-ть A , имеет 7 общ. точек с квадратами, если
линии l проходят $1/3$ вершины B или D :

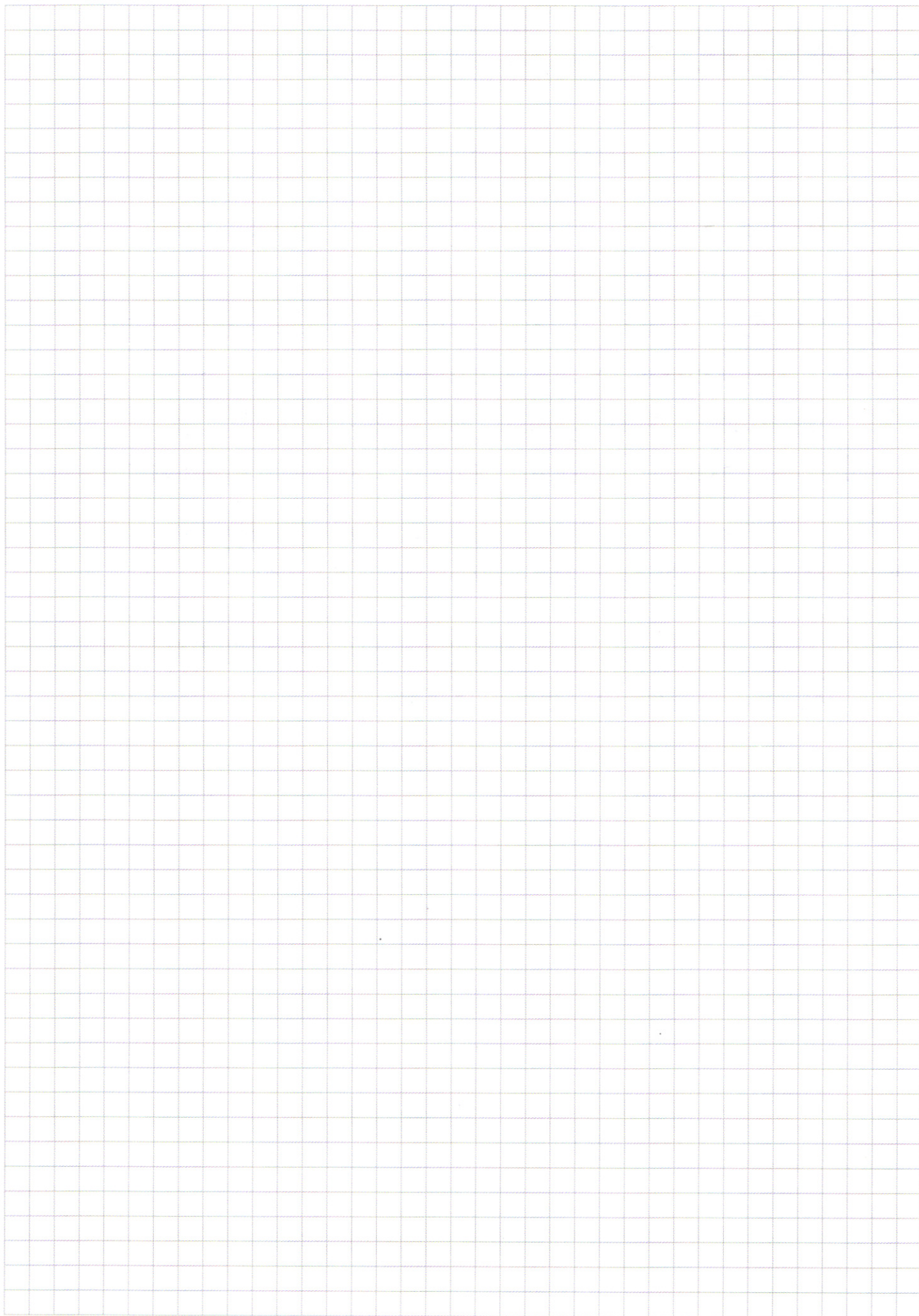
$1/3$ вершины B проходят при $a = 2^2 + 6^2 = 40$

Или в этом случае есть общая точка окр-ти
 B с квадратами, т. е. $4 \leq a < 14^2 + 6^2$ тогда с

$1/3$ вершины D проходят при $a = 14^2 + 14^2 > 14^2 + 6^2$

$$324 + 196 = 520$$

Ответ: $a = 4$ или $a = 520$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

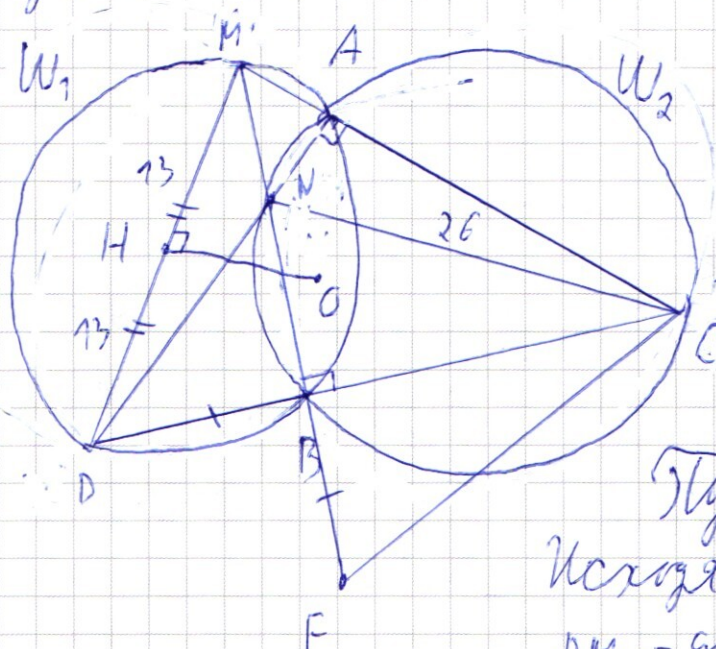
26

a) 1 шаг:

O-Цепочка
орна.
Срп-мн
O MDC
H-Ср.
MD

 $R = 13$

W_1 и W_2 - главные
оск-ти



Прогноз с
двух-эс
в точке М.

III. R. $\angle DAM = 90^\circ$,
no DM-gravimetry

Плоскость $BF \cap W_1 = M_1$
 Исходя из того, что $\angle M_1 BD = 90^\circ$,
 DM_1 - градусная. Значит, $M = M_1$

Thyerm $BM \cap DA = N$. $\widehat{M} \cdot K$. $\angle NBC + \angle NAC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow N \in W_2$

$DA \perp CM$
 $MB \perp CD$
 $DA \cap MB = N$

$\Rightarrow N$ - ортоцентр $\triangle MDC \Rightarrow$
 $CN = 2R$ (радиус, м. к. $\angle NAC = 90^\circ$) $= 26$
 $\Rightarrow CN = 2OH \Rightarrow OH = 13$

4D- грант W_1 $\Rightarrow$ 4- измер W_1 , 4D=H14=73

$$OM = \sqrt{OH^2 + HN^2} = 13\sqrt{2} = R_{MDC} \text{ (радиус экр.-мн. конв. поверхности)}$$

DA u MB - Durchmesser $\triangle MDC \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MDC \Rightarrow \triangle MDC$

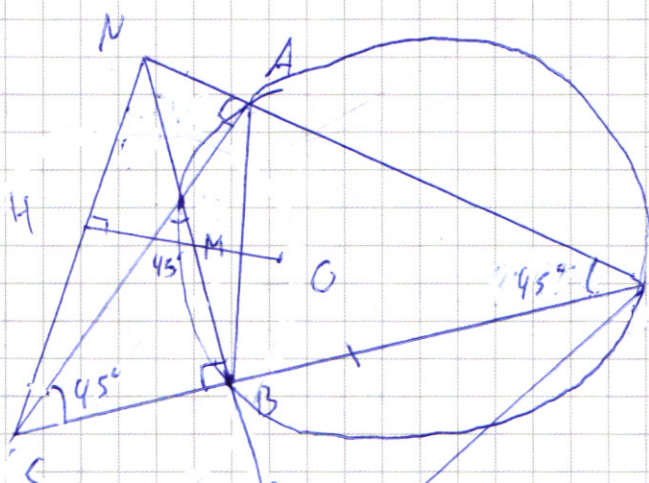
$$\Rightarrow k = \frac{CA}{CD} = \cos(\angle MCD) = \frac{R}{R_{\text{mix}}} = \frac{13}{13\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle MCD = 45^\circ \Rightarrow \angle ADC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle MDC = \angle DNC = 45^\circ \Rightarrow BN = BD = BF \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CN = CF \quad (\text{м.к. (ленг. на сер. пер-р к NF)})$$

Ответ: 26

2. шаг:



$A, B, D, M \in W_1$

$A, C, B, N \in W_2$

H - сер. (MN)

Аналогично 1 шаг $DM = 2OH \Rightarrow R_{\text{мкр}} = 13\sqrt{2}$

$$\triangle ABD \sim \triangle CND \Rightarrow K = \cos \angle NDC = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle ADC = 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BND = 45^\circ \Rightarrow BN = BD = BF \Rightarrow CF = CN = 26$$

Ответ: 26

8) $BC = 10$

$$BN = \sqrt{CN^2 - BC^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{36, 16} = 24 = BD = DF$$

$$CD = BC + BD = 10 + 24 = 34 \quad BM = BC = 10$$

$$AC = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{34}{\sqrt{2}} = 17\sqrt{2} \quad CM = BC\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CM}{AC} = \frac{10}{17} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle MCF}} = 1,7$$

$$S_{\triangle MCF} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot MF = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10 + 24) = 170 \Rightarrow S_{\triangle ACF} = 1,7 \cdot 170 = 289$$

Ответ: 289

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{x^2}$$

$$y < 85 + (3^{x^2} - 7)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{x^2} < 85 + (3^{x^2} - 7)x$$

$$(2-x)^x \geq 1+2x$$

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 4x &= \\ &= \sin 2x + \sin 3x \end{aligned}$$

13

$$\begin{aligned} y &> 0 \\ x &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-y)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (-2y)^{\lg(2y^2)}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (4y^2)^{\lg 2y}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 + 2y^2 - 4y^2 - 4x$$

$$2y^2 + x^2 - 4x - 4y + 3xy +$$

$$x = -2y \neq 0$$

$$2y^2 - 2xy +$$

$$2y^2 + xy - 2xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$(2y+x)(y-2x-4) = 0$$

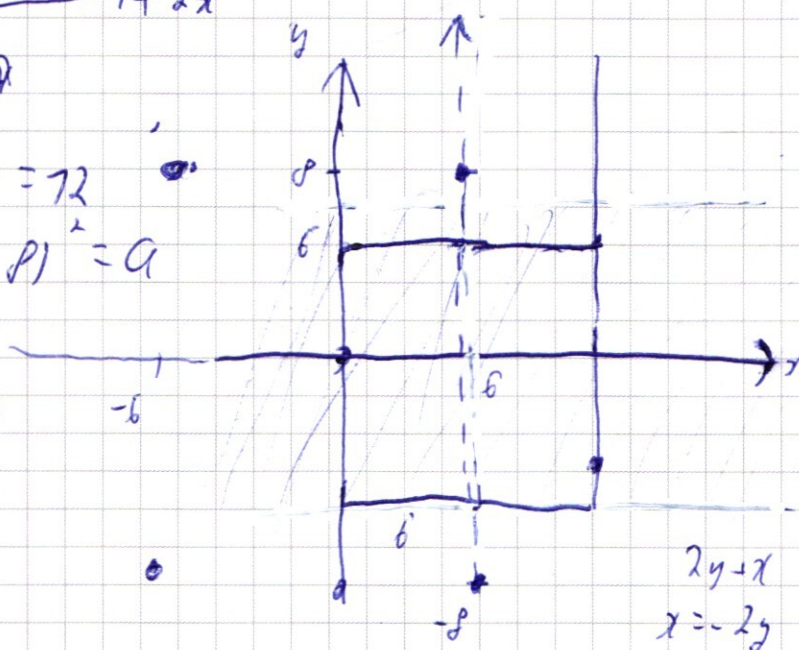
$$\begin{aligned} x &\geq -y \\ x &\geq y \end{aligned}$$

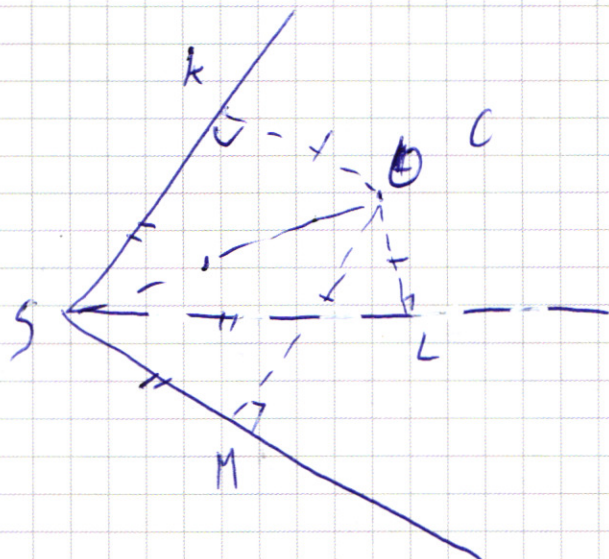
$$2x = 12 \quad x = 6$$

$$-6 \leq y \leq 6$$

$$(x-y) + (x+y) = 12$$

2)





93

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r}
 16875 \div 5 = 3375 \\
 \underline{15} \\
 18 \\
 \underline{15} \\
 37 \\
 \underline{35} \\
 25 \\
 \underline{25} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3375 \div 5 = 675 \\
 \underline{30} \\
 37 \\
 \underline{35} \\
 25 \\
 \underline{25} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 675 \div 5 = 135 \\
 \underline{5} \\
 17 \\
 \underline{15} \\
 25 \\
 \underline{25} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 135 \div 5 = 27 \\
 \underline{10} \\
 35 \\
 \underline{35} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 27 \div 3 = 9 \\
 \underline{21} \\
 60 \\
 \underline{60} \\
 0
 \end{array}$$

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

$$\sin 70^\circ + \sin 30^\circ = 2 \sin 50^\circ \cdot \cos 0^\circ$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x \sin 3x$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin \left(7x \frac{\pi}{4} - 2x \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) - \cos 10x = 0$$

$$\frac{1}{2} 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - 10x \right) \cos 2x - \cos 10x = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) \cos 2x - \cos 10x = 0$$

$$2 \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - 10x \right) \cos 2x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 10x \right) = \frac{\pi}{8.0.7} = \frac{\pi}{5.6}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} = -2 \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = -1$$

$$\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}}{3.5} = \frac{\frac{5\pi}{8}}{3.5} =$$

$$= \frac{\pi}{8.0.7} = \frac{\pi}{5.6} = \frac{10\pi}{56} = \frac{5\pi}{28}$$

