

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР



Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Разложим на ^{простые} множители 16875:

$$\begin{array}{r|l} 16875 & 5 \\ 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 16875 = 5^4 \cdot 3^3; \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ В числе будет всегда стоять ровно 4 пятёрки, т.к. 5-пр-ое и $5^2 > 9$;

$3^2 = 9 \Rightarrow$ ~~или~~ либо стоят 3 тройки, либо 9 и 3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5^4 \cdot 3^3 \text{ ①} \\ 5^4 \cdot 9 \cdot 3 \text{ ②} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{посчитаем сколько вариантов расста-} \\ \text{новки на 8 позиций, а оставшиеся} \\ \text{места займут единицы} \end{array} \right\}$

$\Rightarrow$ ① $C_8^4 \cdot C_4^3 = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{4!}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 280$ (вариантов);

② $C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{4!}{3!} \cdot \frac{3!}{2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 40 \cdot 21 =$

$= 840$ (вариантов) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $840 + 280 = 1120$ ~~вариантов~~ ^{всех} восьмизначных чисел, пр-ие цифр ~~которых~~ ^{которых} равно 16875;

№5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

1.) Решим (1):

$$|y-x+6| + |y+x-6| = 12$$

I.) $|y-x+6| = 0:$

$$y = x - 6;$$

II.) $|y+x-6| = 0$

$$y = 6 - x;$$

Построим наши прямые;

Для каждой области раскроем модуль:

I.) $\begin{cases} y > x - 6 \\ y > 6 - x \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y - x + 6 + y + x - 6 = 12$$

$$\Rightarrow y = 6;$$

II.) $\begin{cases} y > x - 6 \\ y < 6 - x \end{cases} \Rightarrow y - x + 6 - y - x + 6 = 12$

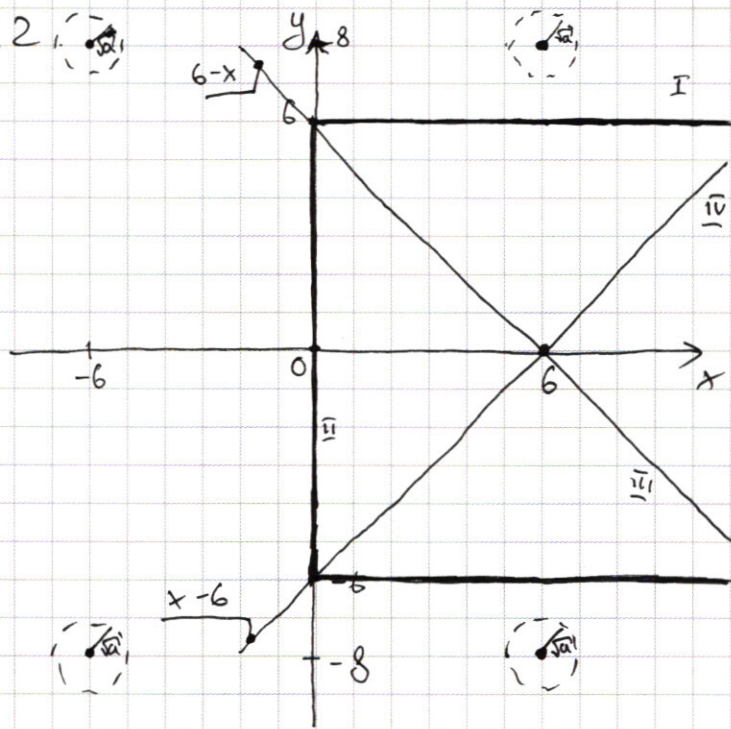
$$x = 0$$

III.) $\begin{cases} y < x - 6 \\ y < 6 - x \end{cases} \Rightarrow -y + x - 6 - y - x + 6 = 12$

$$y = -6$$

IV.) $\begin{cases} y < x - 6 \\ y > 6 - x \end{cases} \Rightarrow -y + x - 6 + y + x - 6 = 12$

$$x = 12;$$



Следовательно решением первого ур-ия является квадрат со стороной 12 и центром в т. (6; 0);

2.) Рассмотрим опять 4 ~~зоны~~ области для ре-ия (2):

I.) $x > 0; y > 0;$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a \quad \text{— это окр. с центром } (6, 8) \text{ и } \text{rad.} = \sqrt{a};$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\textcircled{1}: \cos 5x = \sin 5x - \text{решение} \Rightarrow \operatorname{tg} 5x = 1 \Rightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5};$$

$$\textcircled{2}: \cos 5x \neq \sin 5x: \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}:$$

$$2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

~~$$2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$~~

~~$$2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$~~

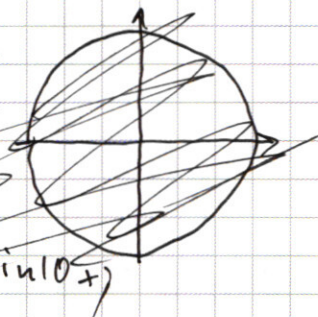
$$4 \cos^2 2x = 2(1 + 2 \cos 5x \sin 5x)$$

$$2 \cos^2 2x - 1 = \sin 10x$$

$$\cos 4x = \sin 10x$$

~~$$\cos^2 4x = 1 - \cos^2 10x$$~~

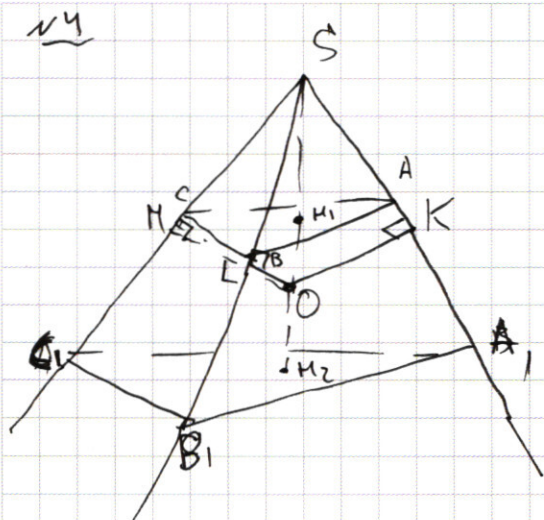
~~$$\cos^2 10x + \cos^2 4x = 1$$~~



~~$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5};$$~~

~~$$\cos 4x = \sin 10x;$$~~

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}; \cos 4x = \sin 10x;$$



$$1.) \left. \begin{array}{l} SO \perp \text{пл. } ABC; \\ \angle OKS = \angle OLS = \angle OMS = 90^\circ \\ OK = OL = OM = R \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta OSK = \Delta OSL = \Delta OSM; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SK = SL = SC = x;$$

$$2.) (ABC) \parallel (A_1B_1C_1) \Rightarrow \begin{array}{l} \Rightarrow AB \parallel A_1B_1 \text{ (т.к. } AB \in SAB \text{ и } A_1B_1 \in SA_1B_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \angle ASB = \angle A_1S B_1 \end{array}$$

$$2.) \left. \begin{array}{l} SB \parallel S B_1; \\ AB \parallel A_1 B_1; \\ SA \parallel S A_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{SA}{S A_1} \quad (\Delta SAB \sim \Delta S A_1 B_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{аналогично } \frac{CB}{C B_1} = \frac{SB}{S B_1}, \quad \frac{CA}{C A_1} = \frac{SC}{S C_1};$$

$$\text{т.к. } SA = SB = SC = \frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{CB}{C B_1} = \frac{CA}{C A_1};$$

$$\left(\begin{array}{l} (ABC) \parallel (A_1 B_1 C_1), \text{ т.к. } \\ \Delta ABC \sim \Delta A_1 B_1 C_1 \text{ и } \\ AB \in (SAB) \text{ и } \\ A_1 B_1 \in (SA_1 B_1) \end{array} \right)$$

$$3.) \Rightarrow SH_1 = SO - R; \quad SH_2 = SO + R;$$

$$SO = \sqrt{OK^2 + SK^2} = \sqrt{R^2 + x^2}$$

$$4.) (ABC) \parallel (A_1 B_1 C_1) \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A_1 B_1 C_1}} = \frac{AB^2}{A_1 B_1^2}, \quad \text{т.к. } \Delta ABC \sim \Delta A_1 B_1 C_1$$

$$\Rightarrow \text{но } \frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{AC}{A_1 C_1} = \frac{BC}{B_1 C_1} \Rightarrow \frac{AB}{A_1 B_1} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SA}{S A_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$5.) \Delta S A H_1 \sim \Delta S A_1 H_2 \text{ (т.к. } SA \parallel S A_1; SH_1 \parallel SH_2;$$

$$SH_1 \perp (ABC); SH_2 \perp (A_1 B_1 C_1)) \Rightarrow \Delta S A H_1 - \text{прямой}; \Delta S A_1 H_2 - \text{прямой}$$

$$\Rightarrow \frac{SA}{S A_1} = \frac{SH_1}{SH_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SO - R}{SO + R} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3SO - 3R = 2SO + 2R \Rightarrow SO = 5R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin\left(\frac{R}{5R}\right) \Rightarrow \angle KSO = \arcsin\frac{1}{5};$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin\frac{1}{5};$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

I.) $x < 0; y > 0;$

$$(x+6)^2 + (y-8)^2 = a$$

окр. с центром $(-6; 8)$ и рад. $= \sqrt{a}$; (ω_2)

II.) $x \leq 0; y < 0;$

$$(x+6)^2 + (y+8)^2 = a$$

окр. с центром $(-6; -8)$ и рад. $= \sqrt{a}$; (ω_3)

III.) $x > 0; y < 0;$

$$(x-6)^2 + (y+8)^2 = a$$

окр. с центром $(6; -8)$ и рад. $= \sqrt{a}$; (ω_4)

Теперь посмотрим для каждой окр. минимальный и максимальный радиус, при котором она пересекается с квадратом:

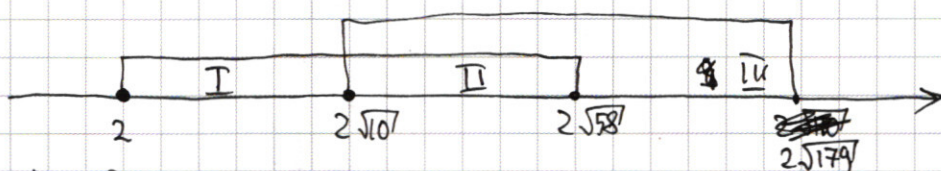
ω_1 : $\min R = 8 - 6 = 2$; $\max R = \sqrt{6^2 + 14^2} = \sqrt{232} = 2\sqrt{58}$;

ω_2 : $\min R = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$; $\max R = \sqrt{14^2 + 18^2} = 2\sqrt{170}$;

ω_3 : $\min R = 2\sqrt{10}$; $\max R = 2\sqrt{170}$; (симмет. с ω_2 отн. $y=0$);

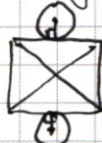
ω_4 : $\min R = 2$; $\max R = 2\sqrt{58}$ (симмет. с ω_1 отн. $y=0$);

и



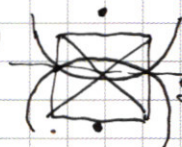
I.) Два случая:

1.)



$$\Rightarrow \sqrt{a} = 8 - 6 = 2; \Rightarrow \underline{a = 4};$$

2.)



$$\Rightarrow (\sqrt{a})^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow \sqrt{a} = 10;$$

сравним 10 и $2\sqrt{10}$: $\Rightarrow$

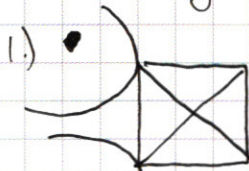
$$100 \vee 40$$

$100 \oplus 40 \Rightarrow$ не подходит промежутку;

↓

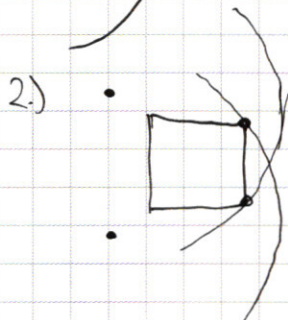
II.) Тут пересекают кв-т сразу 4 окружности, и они не могут пересекать его только в двух точках, т.к. их ~~центры симметричны~~ радиусы равны и оср-ти не совпадают.

III.) Два случая:



$$\Rightarrow \sqrt{a} = \min R(u_2) \Rightarrow \sqrt{a} = 2\sqrt{10} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ не принадлежит промежутку;



$$\Rightarrow (\sqrt{a})^2 = 2^2 + (12+6)^2 = 4 + 520 = 524 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = 2\sqrt{131} - \text{пр-ит промежутку} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{a = 524} \Rightarrow$$

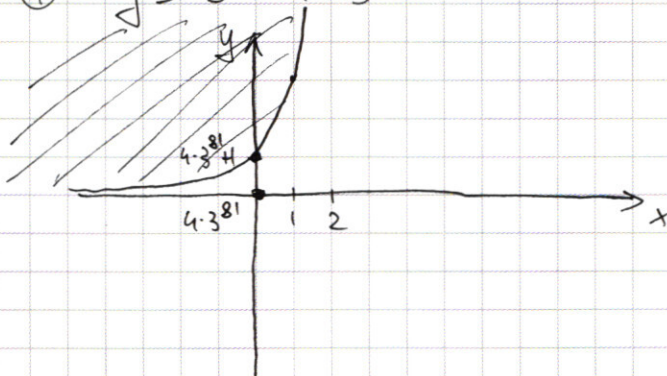
$\Rightarrow$ ответ: $a \in \{2; 524\}$;

√7

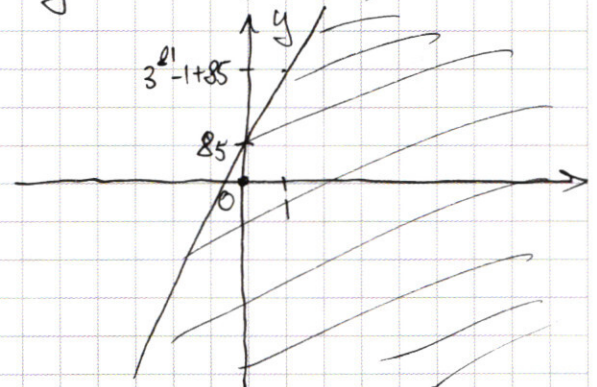
$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} & (1) \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} & (1) \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x & (2) \end{cases}$$

① $y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$:



② $y < 85 + (3^{81} - 1)x$



$\Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найдём, в каких точках прямая ② пересекает ~~перес~~ функцию ① $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ При $x = 4$:

① $y = 3^4 + 4 \cdot 3^{81}$

② $y = 85 + (3^{81} - 1)4 = 3^4 + 4 \cdot 3^{81};$

$\Downarrow$

первая точка: $(4; 3^4 + 4 \cdot 3^{81});$

При $x = 85$

① $y = 3^{85} + 4 \cdot 3^{81} = 3^{81}(81 + 4) = 85 \cdot 3^{81}$

② $y = 85 + 3^{81} \cdot 85 - 85 = 85 \cdot 3^{81}$

$\Downarrow$

вторая точка: $(85; 85 \cdot 3^{81});$

$\Downarrow$

$x \in (4; 85)$

$\Downarrow$

Рассчитаем из-за кол-ва точек при уб-ии x на 1:

① было: $3^{81}x - x + 85 - 4 \cdot 3^{81} + 3^x = 3^{81}(x-4) + 85 - x \cdot 3^x;$

стало: $3^{81}(x+1) - (x+1) + 85 - 4 \cdot 3^{81} - 3^{x+1} = 3^{81}(x-4) + 3^{81} - x - 4 + 85 - 3^{x+1};$

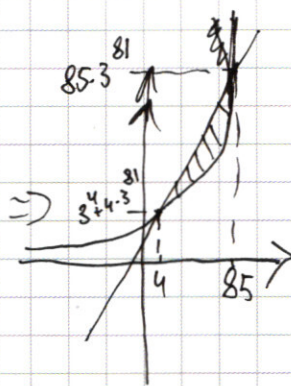
разница: $3^{81} - 1 - 3^{x+1} + 3^x = 3^{81} - 1 + 3^x(1-3) = 3^{81} - 2 \cdot 3^x - 1$

$\Rightarrow$ изначально точек при $x=4$ было 0 $\Rightarrow$ кол-во точек

общее: $(0 + 3^{81} - 2 \cdot 3^5 - 1 + \dots + 3^{81} - 2 \cdot 3^{\lfloor \frac{85+4}{2} \rfloor}) \cdot 2 \Rightarrow$

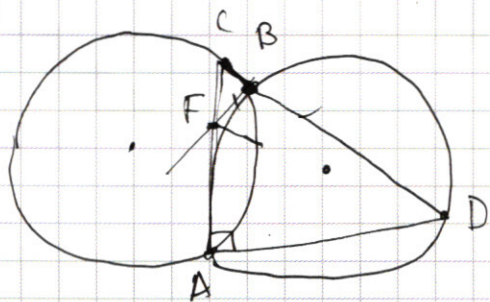
$\Rightarrow (3^{81} \cdot 44 - 2(3^5 + 3^6 + \dots + 3^{44}) - 44) \cdot 2 =$
 $= (3^{81} \cdot 44 - 2 \cdot 3^5 \frac{3^{40}-1}{2} - 44) \cdot 2 = 88(3^{81}-1) - 3^{45} + 3^5 =$

Ответ: $= 88(3^{81}-1) - 3^5(3^{40}-1);$



26

a.)





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\begin{aligned} y > 0 \\ -xy > 0 \end{aligned}$$

$$xy < 0$$

$$x < 0$$

$$\begin{aligned} y > 0 \\ -xy > 0 \end{aligned}$$

$$xy < 0$$

$$x < 0$$

$$x^4 \lg y = y^2 \lg y \cdot (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$\frac{(x^4)^{\lg y}}{(-x)^{\lg y}} = \left(-\frac{x^4}{x}\right)^{\lg y} = (-x^3)^{\lg y} = (y^2)^{\lg y}$$

$$(-x^3) = y^2$$

$$\begin{aligned} 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y &= 0 \\ (y^2 - xy) + (y^2 - x^2) - 4(x+y) &= 0 \\ y(y-x) + (y-x)(x+y) - 4(x+y) &= 0 \\ (y-x)(x+2y) = 4(x+y) \end{aligned}$$

$$2y(y-4) - x(x+4) - xy = 0$$

$$(y^2 - x^2) = (y-x)(y+x)$$

$$y-x = 4$$

$$y+x = 2$$

$$\frac{(u+2v)u + u2v - 42v}{2} = 0$$

$$u^2 + u2v + 2u2v - 82v = 0$$

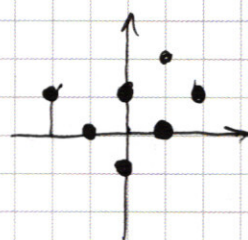
$$u^2 + 3u2v - 82v = 0$$

$$(x^4)^{\lg y} = (y^2)^{\lg y} \cdot (-x)^{\lg(-x)}$$

$$(-x^3)^{\lg y} = y^2 \lg y \cdot (-x)^{\lg x}$$

$$\begin{aligned} \lg(-x) &= \frac{\lg(-x) - x}{\lg(-x) - x} = \\ &= \frac{1}{\lg(-x) - x} \end{aligned}$$

$$D = 9 \cdot 10^2 + 32 \cdot 2 = 2(92 + 32)$$



$$x^2 + y^2 = 1$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

№5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

① $|y-x+6| + |y+x-6| = 12$

$$y-x+6=0$$

$$y=x-6;$$

$$y+x-6=0$$

$$y=6-x;$$

~~I~~ I и II:

$$x-6 > y$$

II и III:

$$y < 6-x$$

I: $y < x-6 \Rightarrow$
 $y > 6-x$

III и IV

$$x-6 < y$$

I и IV

$$y > 6-x$$

$$-y+x-6 + x-6+y = 12$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

II: $y < x-6 \Rightarrow$
 $y < 6-x$

$$-y+x-6 - y+x+6 = 12$$

$$y = -6$$

III: $x-6 < y$
 $y < 6-x$

$$y-x+6 - y-x+6 = 12$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

IV: $x-6 < y$
 $y > 6-x$

$$y-x+6 + y+x+6 = 12$$

$$y = 6$$

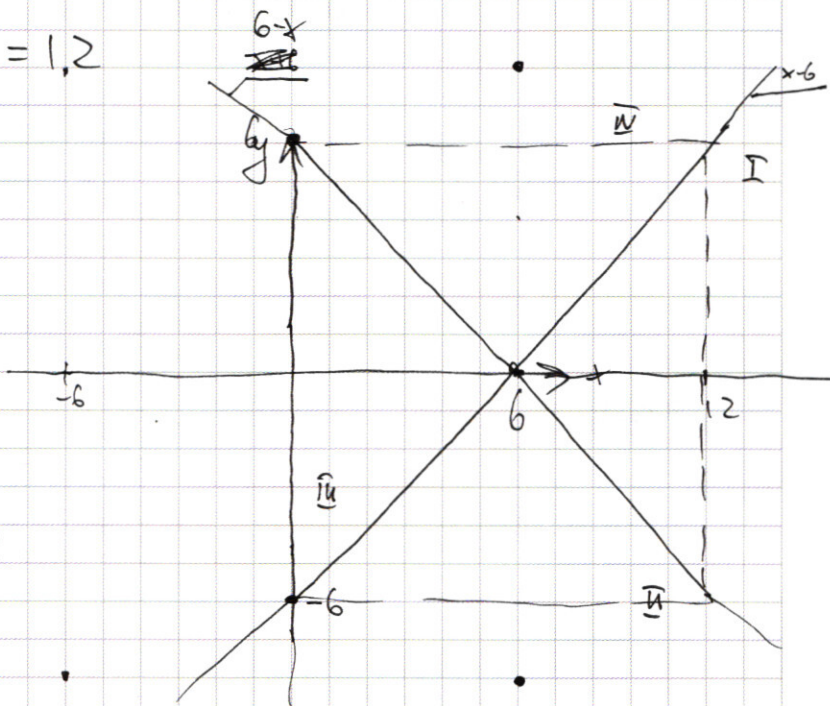
② 1) ~~x > 0~~ $x > 0; y > 0 \Rightarrow \text{окр } (6, 8) - \text{радиус} = \sqrt{a}$

2) $x < 0; y > 0: (x+6)^2 + (y-8)^2 = a$

4) $x < 0; y < 0 \Rightarrow$

3) $x > 0; y < 0: (x-6)^2 + (y+8)^2 = a$

$$\Rightarrow (x+8)^2$$

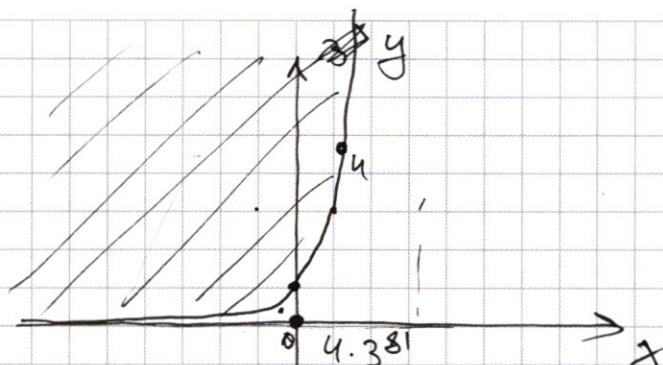




ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$



$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$$

~~3~~

$$x = 4$$

$$81 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$85 + 4 \cdot 3^{81} - 4 = 81 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$x = 81$$

$$3^{81} + 4 \cdot 3^{81} = 85 + 3^{81} \cdot 81 - 81$$

$$= 4 + 3 = 5 \cdot 3^{81}$$

$$4 + 3 = 4 + 3$$

$$4 \cdot 3^{81}$$

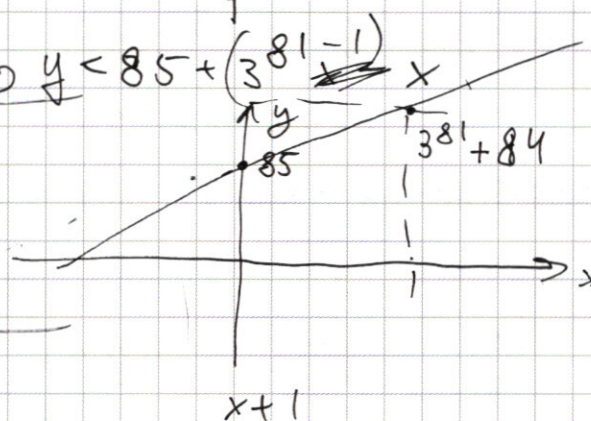
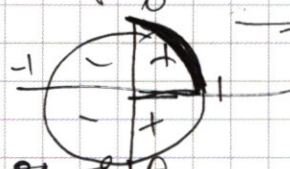
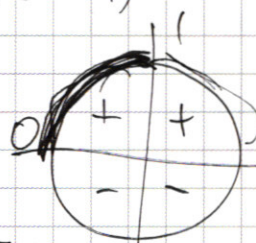
$$4 \cdot 3^{81} - 4 \cdot 3^{81}$$

$$4 \cdot 85$$

$$3^{85} + 4 \cdot 3^{81} = (4 + 3^4) 3^{81} = 85 \cdot 3^{81}$$

$$85 - 85 + 85 \cdot 3^{81} = (85; 85 \cdot 3^{81})$$

$$(4; 8 + 4 \cdot 3^{81})$$



$$85 + 3^{81}x - x = 4 \cdot 3^{81}$$

$$x = \frac{4 \cdot 3^{81} - 85}{3^{81} - 1}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$3^{x+1} + 4 \cdot 3^{81}$$

$$3^x(3-1) = 2 \cdot 3^x$$

$$85 + (3^{81} - 1)x = 85 + (3^{81} - 1)(x+1)$$

$$3^{81} - 1 - 2 \cdot 3^x$$

$$(8; 81 \cdot 3^{81})$$

№2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} (\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x) = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x = \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x$$

$$\cos 7x (1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x) + \cos 3x (1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x) = \sin 7x$$

$$2 \cos 2x \cos 5x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x \cos 5x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2} (\cos^2 5x + \sin^2 5x + 2 \cos 5x \sin 5x)$$

$$2 \cos^2 2x = 1 + 2 \cos 5x \sin 5x$$

$$\cos 4x = 2 \cos 5x \sin 5x$$

$$\cos 5x \cos x - \sin 5x \sin x = 2 \cos 5x \sin 5x$$

$$\cos 5x (\cos x - \sin 5x) = \sin 5x (\cos 5x + \sin x)$$

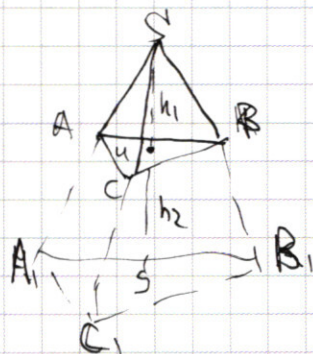
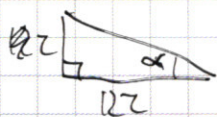
$$\frac{\cos x - \sin 5x}{\sin x + \cos 5x} = \tan 5x$$

№4

$$SO^2 = z^2 + x^2$$

$$SO - z = \sqrt{z^2 + x^2} - z$$

$$\tan \alpha = \frac{z}{12z} = \frac{1}{12}$$

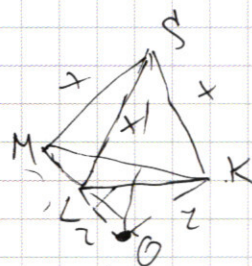


$$25z^2 + x^2 = 169z^2$$

$$x^2 = 144z^2$$

$$x = 12z$$

$$5\sqrt{z^2 + x^2} = 13z$$



$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{SB_1}{SB_1} = \frac{SC_1}{SC_1} = \frac{SA_1}{SA_1} =$$

$$= \frac{CB}{C_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{t-z}{t+z}$$

$$9t - 9z = 4t + 4z$$

$$5t = 13z$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$16875 \mid 5 \Rightarrow 5^4 \cdot 3^3 = 16875$$

$$\begin{array}{r} 16875 \\ 3375 \\ 675 \\ 135 \\ 27 \\ 9 \\ 3 \\ 1 \end{array} \mid \begin{array}{l} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{array}$$

т.к. $5^2 > 10 \Rightarrow 5$ будет 4;
 $3^2 = 9 \Rightarrow$ могут быть три тройки, либо 9 и 3 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1 \\ 5^4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow C_8^4 \cdot C_4^3 \Rightarrow \frac{8! \cdot 4!}{4! \cdot 4! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 280;$$

$$= \frac{8!}{3! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 40 \cdot 21 = 840 \Rightarrow \text{ответ: } 1120;$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3}{2} = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 40 \cdot 21 = 840$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3}{2} = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 40 \cdot 21 = 840$$

№2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 45^\circ + \cos 45^\circ = 2 \cdot \cos 45^\circ \cdot \cos 0^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2} = 0$$

$$2 \cos 2x \cos 5x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 2x \cos 5x$$

$$2 \cos 5x (\sin 2x - \cos 2x) = -\sqrt{2} \cos 10x$$

$$520 + 196 = \frac{716}{4} = 179$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

Ф-мы:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \cos \beta = 2$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} ($$

$$\sin 45^\circ + \sin 45^\circ =$$

$$= \sqrt{2}$$

$$2 \cdot \sin 0$$

$$t_1 + t_2 = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

$$\begin{matrix} t_1 \\ \alpha \end{matrix} \quad \begin{matrix} t_2 \\ \beta \end{matrix}$$

$$2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} =$$

$$= \cos \alpha + \cos \beta$$

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} =$$

$$= (\cos \alpha + \cos \beta) \frac{1}{2}$$

$$\cos t_1 \cos t_2 =$$

$$= (\cos(t_1 + t_2) + \cos(t_1 - t_2)) \frac{1}{2}$$

$$1.) \cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$2.) \sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 5x \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 10x = \sin 7x + 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \frac{1}{2} \cdot 2 (\cos(10x + \frac{\pi}{4}) + \cos(10x - \frac{\pi}{4})) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$4 \cos^2 2x = 2 (1 + 2 \sin 5x \cos 5x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 2x - 1 = \sin 10x$$

$$\cos 4x = \sin 10x = \sin 4x \cos 6x + \sin 6x \cos 4x$$

$$\sqrt{1 - \sin^2 4x} = \sin 10x$$

$$1 - \sin^2 4x = \sin^2 10x$$

