МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

16875	5
3375	5
675	5
135	5
27	3
9	3
3	3
1	

$16875 = 5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3$

Всего ~~8~~ 7 простых множителей. ~~[illegible]~~ Найдём все группы из 8 ~~[illegible]~~ цифр, ~~[illegible]~~ произведение которых будет 16875. Понятно, что вариации множителей можно получать лишь путём перемножения простых множителей этого числа

$(5; 5; 5; 5; 3; 3; 3; 1)$ - группа 1

$(5; 5; 5; 5; 3; 9; 1; 1)$ - группа 2

Всего две группы, т.к. только произведение $3\cdot3$ даёт результат < 10.

Тогда вариантов составить числа из I группы: $\frac{8!}{4!\cdot3!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{3\cdot2} = 280$

8 мест

повторение '5' 4 раза

повторение '3' 3 раза

Из 2 группы: $\frac{8!}{4!\cdot2!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{2} = 3\cdot8\cdot7\cdot5 = 280\cdot3 = 840$

повторение '5' 4 раза

повторение '1' 2 раза

Итого, всего вариантов $840 + 280 = 1120$

Ответ: 1120 чисел

№ 2

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt{2}\cos 10x = 2\sin 5x\cos 2x$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) = 0$

$(\cos 5x - \sin 5x)(2\cos 2x - \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x)) = 0$

$(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 5x + \sin 5x)) = 0$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 5x + \sin 5x) = \cos(5x - \frac{\pi}{4})$

$(\cos 5x - \sin 5x)\left(\cos 2x - \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 0$ №2 (продолж.)

$-(\cos 5x - \cos(\frac{\pi}{2} - 5x)) \cdot 2\sin\frac{2x+5x-\frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{2x-5x+\frac{\pi}{4}}{2} = 0$

$-2\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{5x-\frac{\pi}{2}+5x}{2}\cdot 2\sin\frac{7x-\frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{3x-\frac{\pi}{4}}{2}=0$

$\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{7x-\frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{3x-\frac{\pi}{4}}{2}=0$

$\left[\begin{array}{l} 5x = \pi n + \frac{\pi}{4} \\ 7x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n \\ 3x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n \end{array}\right.$ $n \in \mathbb{Z}$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{5} + \frac{\pi}{20} \\ 7x = 2\pi n + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2\pi n + \frac{\pi}{4} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{5} + \frac{\pi}{20} \\ x = \frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{28} \\ x = \frac{2\pi n}{3} + \frac{\pi}{12} \end{array}\right.$

Ответ: $x \in \left\{ \frac{\pi n}{5} + \frac{\pi}{20};\ \frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{28};\ \frac{2\pi n}{3} + \frac{\pi}{12},\ n \in \mathbb{Z} \right\}$

№3

$\left\{\begin{array}{ll} 1) & \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2) & 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{array}\right.$

Условие существования:

(ОДЗ): $\left\{\begin{array}{l} -x > 0 \\ y > 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x < 0 \\ y > 0 \end{array}\right.$

1) $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$

Т.к. $\frac{x^4}{y^2} > 0$, $-x > 0$, то можем взять $\lg$ от обеих частей

$\lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg(-x)^{\lg(-xy)}$

можно разложить, ~~[illegible]~~ ОДЗ позволяет:

$\lg y \cdot \lg\frac{x^4}{y^2} = \lg(-xy)\cdot\lg(-x)$

можем разложить, ОДЗ позволяет

$\lg y \cdot (\lg x^4 - \lg y^2) = (\lg(-x) + \lg y)\cdot\lg(-x)$

$\lg y \cdot (4\lg(-x) - 2\lg y) = (\lg(-x) + \lg y)\cdot\lg(-x)$

$4\lg y \cdot \lg(-x) - 2\lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg(-x)\cdot\lg y$

$a+b+c=0$

$\lg^2(-x) - 3\lg y\cdot\lg(-x) + 2\lg^2 y = 0$

$(\lg(-x) - 2\lg y)(\lg(-x) - \lg y) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \lg(-x) = 2\lg y \\ \lg(-x) = \lg y \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} -x = y^2 \\ -x = y \end{array}\right. \rightarrow$ два варианта

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолж.)

Подставим эти два варианта во второе уравнение:

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -x = y \\ -x = y^2 \end{array}\right. \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

1) $-x = y$

$2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0$

$2y^2 - 4y = 0$

$\left[\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow \text{не проходит ОДЗ} \\ y = 2 \Rightarrow -x = 2;\ x = -2 \end{array}\right. \Rightarrow (-2; 2)$

2) $-x = y^2$

$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$

$-y^4 + y^3 + 6y^2 - 8y = 0 \quad |:y, \ y \neq 0$ по ОДЗ

$-y^3 + y^2 + 6y - 8 = 0$ Возмож. корни: $\pm 1, \pm 2; \pm 4; \pm 8$

$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$

$$\begin{array}{r|l} y^3 - y^2 - 6y + 8 & y - 2 \\ \underline{y^3 - 2y^2} & \overline{y^2 + y - 4} \\ y^2 - 6y & \\ \underline{y^2 - 2y} & \\ -4y + 8 & \\ \underline{-4y + 8} & \\ 0 & \end{array}$$

$\left[\begin{array}{l} y = 2 \\ \frac{y^3 - y^2 - 6y + 8}{y - 2} = 0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y^2 + y - 4 = 0 \end{array}\right.; \ D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$

$\left[\begin{array}{l} y = 2; \ -x = 2^2 = 4; \ x = -4 \\ y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \ -x = \frac{(-1+\sqrt{17})^2}{4} = \frac{(18 - 2\sqrt{17})}{4}, \ x = \frac{\sqrt{17} - 9}{2} \\ y = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} - \text{не прох. ОДЗ} \end{array}\right.$

$(-4; 2); \ \left(\frac{\sqrt{17} - 9}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$

Ответ: $(-2; 2); \ (-4; 2); \ \left(\frac{\sqrt{17} - 9}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$

№5

$$\begin{cases} 1) \ |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ 2) \ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

2) Симметрично относительно $(0;0)$ $(x=-x;\ y=-y)$

При $a<0$ — $\varnothing$

При $a=0$ — 4 точки $((6;8);(6;-8);(-6;-8);(-6;8))$

При $a>0$ — 4 окружности, центры $((6;8);(6;-8);(-6;-8);(-6;8))$

$R=\sqrt{a}$

$y = x-6$ $\Uparrow$ $y=6-x$ $\Uparrow$

1) $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$, симметрично относительно $y=0$ $(y=-y)$

Модули будут открываться по-разному в зависимости от положения точки относительно прямых $y=x-6$, и $y=6-x$

$\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq 6-x \end{cases}$ $\begin{cases} y \leq x-6 \\ y < 6-x \end{cases}$ $\begin{cases} y > x-6 \\ y \geq 6-x \end{cases}$ $\begin{cases} y > x-6 \\ y < 6-x \end{cases}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

$++$ $+-$ $-+$ $--$

$2x-12=12$ $-y-y=12$ $y+y=12$ $6-x+6-x=12$

$x=12$ $y=-6$ $y=6$ $x=0$

Получается квадрат.

Рисунок на след. листе.

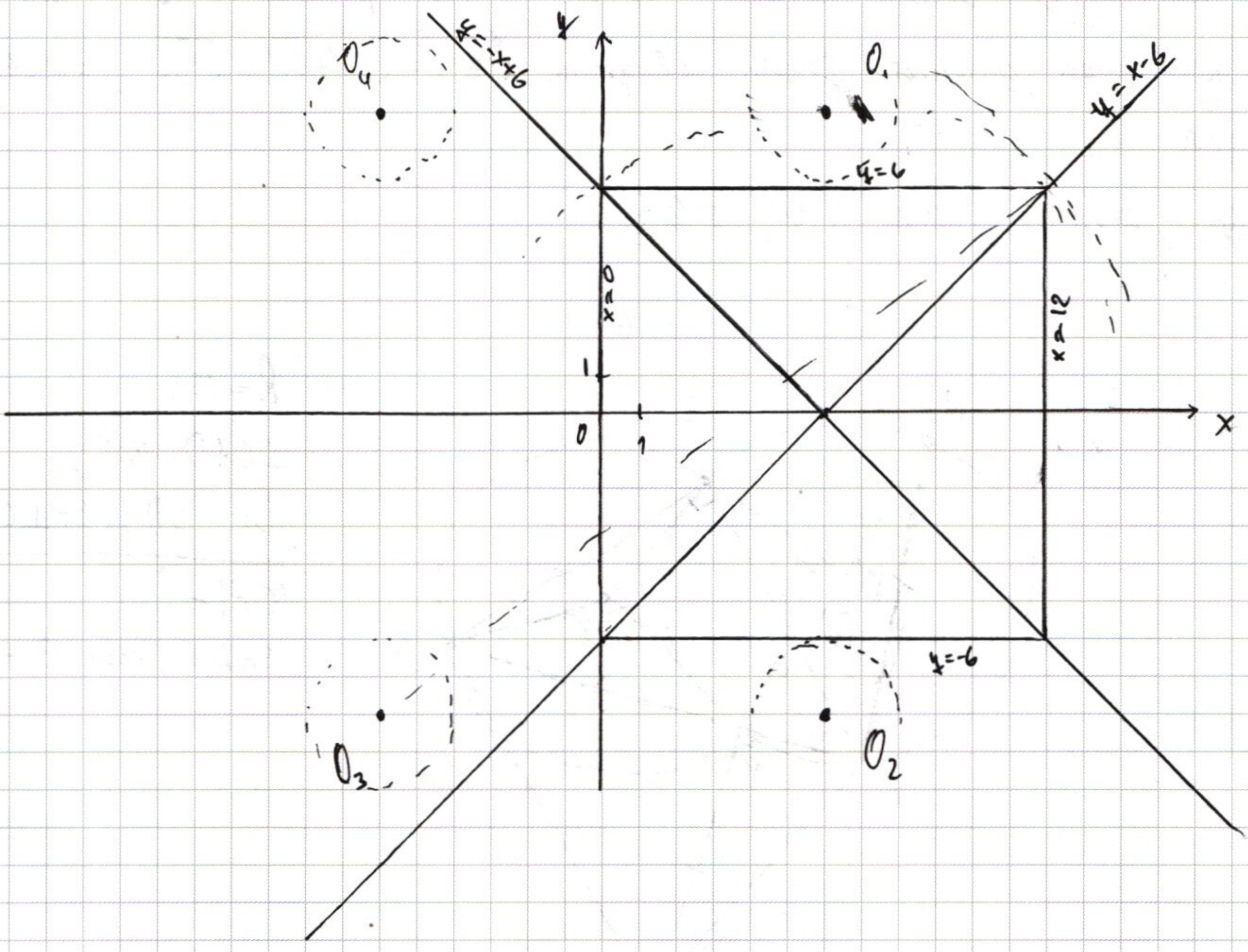
Рассмотрим характерные значения a: 1) $a=4$; $R=2$; Окружности с центрами O_1 и O_2 будут касаться квадрата, O_3 и O_4 - не имеют общ. точек — 2 решения, подходит. Далее, на промежутке $a \in (4; 232]$, $\setminus \{100\}$ у системы будет минимум 4 решения - по два пересечения окружностей с центрами O_1 и O_2 с квадратом.

2) $a=100$; $R=10$. O_1 и O_2 пересекают квадрат в точках $(0;0);(12;0)$. Окружности O_3 и O_4 также пересекают квадрат в точке $(0;0)$ и

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



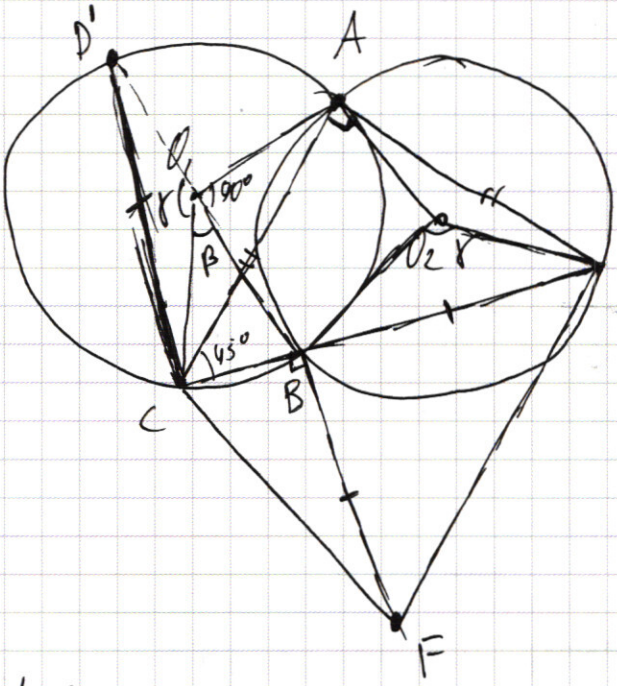
в ещё ~~...~~ 1 точке каждая, т.к. ~~...~~ точки (2;2) и (2;-2) также лежат на расстоянии $R=10$ от O_3 и O_4, ~~...~~ и лежат внутри квадрата => ещё будут пересечения.

Потенциальные решения будут лежать на луче $(205;+\infty)$. ~~...~~

Заметим, что при $a = 40$; $(R=2\sqrt{5})$, Окр. O_3 и O_4 имеют по одной точке пересечения каждая, но этот вариант не подходит, т.к. O_1 и O_2 в сумме уже имеют 4 пересечения. При дальнейшем увеличении a, O_3 и O_4 будут иметь по 2 точки пересечения каждая, при $a=100$, - одна будет общая. При $a=16^2+14^2=510$; $R=\sqrt{510}$, Окружности с центрами O_3 и O_4 будут иметь по одной точке пересечения с квадратом — $(12;6)$ и $(12;-6)$, т.к. это самые дальние точки квадрата по отношению к O_3 и O_4. Окружности O_1 и O_2 не будут иметь общих точек, т.к. расстояние от точки O_1 до самой дальней точки квадрата $l=\sqrt{6^2+14^2}=\sqrt{232}$, аналогично и для O_2.

Тогда, ответ: $a \in \{4; 5\sqrt{10}\}$

№6



Дано: $R=13$;
$\angle CAD=90°$;
$BF=BD$; $BF\perp CD$

$|CF|-?$
$S_{\triangle ACF}$, если $BC=10$

Решение: $\angle ACB=\angle ADC$, т.к. они опираются на равные дуги разных окружностей с одинаковым радиусом.

Т.к. $\angle CAD=90°$, то $\angle ACD=\angle ADC=45° \Rightarrow AC=AD$

Т.к. $AC=AD$, то $\angle AO_1C=\angle AO_2D$; $\angle AO_1B=90°$, т.к. центральный угол в 2 раза больше вписанного; аналогично $\angle AO_2B=90°$

$\angle AO_1B+\angle CO_1B=360°-\angle AO_2B-\angle BO_2D$

$90°+\beta=360°-90°-\gamma \Rightarrow \beta+\gamma=180°$

Отложим дугу BD на окр. с центром O_1, от точки C. Т.к. $\beta+\gamma=180°$, то $D'B=2R=26 \Rightarrow \triangle D'CB$ — прямоугольный.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle D'CB$: $D'B^2 = D'C^2 + BC^2 = 26^2$

Т.к. $D'C = BD$ (отрезок при равной дуге), то $CF = \sqrt{CB^2+BF^2} =$

$= \sqrt{CB^2+BD^2} = 26$

2) $BC = 10 \Rightarrow BD = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$ $(5\cdot 2;\ 12\cdot 2;\ 13\cdot 2)$

$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin\angle ACF =$

$AC = \frac{CD}{\sqrt2} = \frac{34}{\sqrt2} = \frac{24+10}{\sqrt2}$, $\angle ACB = 45°$ из п.1

$\triangle CBF$ - прямоугольный

$\sin\angle BCF = \frac{BF}{CF} = \frac{12}{13}$

$\cos\angle BCF = \frac{BC}{CF} = \frac{5}{13}$

$= \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin(\angle ACB + \angle BCF) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{34}{\sqrt2} \cdot 26 \cdot \frac{1}{\sqrt2} (\sin\angle BCF + \cos\angle BCF) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{34}{\sqrt2} \cdot 26 \cdot \frac{1}{\sqrt2} \cdot \left(\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\right) = \frac{34 \cdot 26 \cdot 17}{2 \cdot 2 \cdot 13} = 17^2 = 289$

Ответ: $CF = 26$, $S_{\triangle ACF} = 289$

№7

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} & (1) \\ y < 85 + (3^{81}-1)x & (2) \end{cases}$$

~~Заметим, что первое ур-е~~ не

1) $y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81}$

$3^x + 4\cdot 3^{81} > 4\cdot 3^{81}$ всегда

Соответственно, чтобы были корни, $85 + (3^{81}-1)x > 4\cdot 3^{81}$

$x > \frac{4\cdot 3^{81} - 85}{3^{81}-1} = \frac{4\cdot 3^{81} - 4 - 81}{3^{81}-1} =$

$= 4 - \frac{81}{3^{81}-1}$.

Это число ближе всего к 4 из целых чисел.

Проверим $x=4$:

$$\begin{cases} y \geq 3^4 + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + 4\cdot 3^{81} - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 81 + 4\cdot 3^{81} \\ y < 81 + 4\cdot 3^{81} \end{cases}$$

Соответственно, в точке, где $x=4$ функции пересекаются.

Начиная от $x=4$ и увеличивая его, интервал между $3^x + 4\cdot 3^{81}$ и $85 + x(3^{81}-1)$ сначала будет увеличиваться, а затем уменьшаться.

№ 4

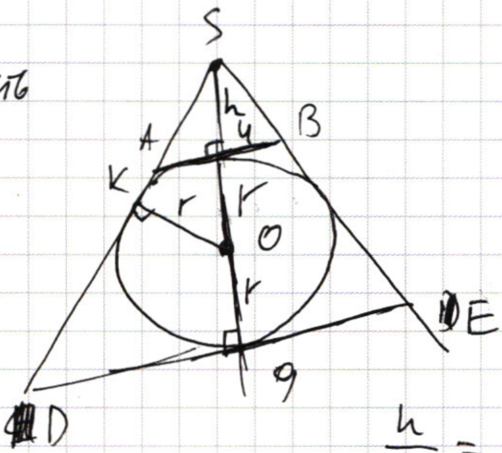
Проекция на плоскость

SCD: $S_{\triangle ABC} = 4$;

$S_{\triangle DEF} = 9$;

ABC - малое сечение,

DEF - большое



$$\frac{h}{AB} = \frac{h+2r}{DE}$$

$$\frac{h}{4} = \frac{h+2r}{9}$$

$$9h = 4h + 8r$$

$$h = \frac{8r}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{r}{h+r}\right) =$$

$$= \arcsin\left(\frac{r}{\frac{8r}{5}+r}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\frac{13}{5}}\right) =$$

$$= \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 1)\ -x=y \\ 2)\ -x=y^2 \end{array}\right. \\ 2y^2-xy-x^2-4x-8y=0 \end{cases}$$

$2y^2+y^3-y^4+4y^2-8y=0$

y^4+y^2

2) $-x=y^2$

$2y^2+y^3-y^4+4y^2-8y=0$ $\quad y=0\ \varnothing$

$2y+y^2-y^3+4y-8=0$

$-y^3+y^2+6y-8=0$

$-2 \quad -4$

$0 \quad -8 \qquad 2 \quad -6$

$-8+4+6-8$

$1 \quad -5$

$D=1+16=17$

$(y-2)(y^2+y-4)=0$

$$\left[\begin{array}{l} y=2 \Rightarrow -x=4,\ x=-4 \\ y=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\ \varnothing \\ y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$

$(-1+\sqrt{17})^2=16-2\sqrt{17}$

$-x=16-2\sqrt{17}$

$x=2\sqrt{17}-16$

$-x=4$

1) $2y^2+y^2-y^2+4y-8y=0$ $\quad -4y$

$y^2-2y=0$

$$\left[\begin{array}{l} y=0\ \varnothing \\ y=2 \end{array}\right. ;\ x=-2$$

2) $-x=y^2$

$2y^2+y^3-y^4+4y^2-8y=0$

$-y^4+y^3+6y^2-8y=0$ $\quad y=0\ \varnothing$

$y^3-y^2-6y+8=0$ $\quad y=2$

$8-4-12+8$

$$\begin{array}{l|l} y^3-y^2-6y+8 & y-2 \\ \underline{y^3-2y^2} & y^2+y-4 \\ \quad y^2-6y & \\ \quad \underline{y^2-2y} & \\ \qquad -4y+8 & \\ \qquad \underline{-4y+8} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

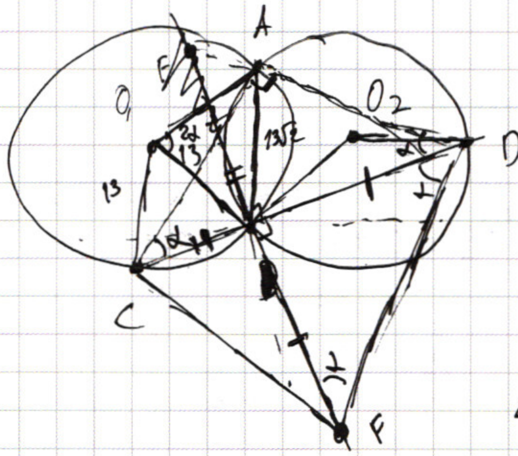
Отв: $(-2;2);\ (-4;2);\ \left(2\sqrt{17}-16;\ \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$

$y^2=-x$

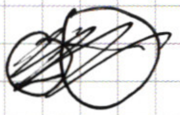
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№ 6

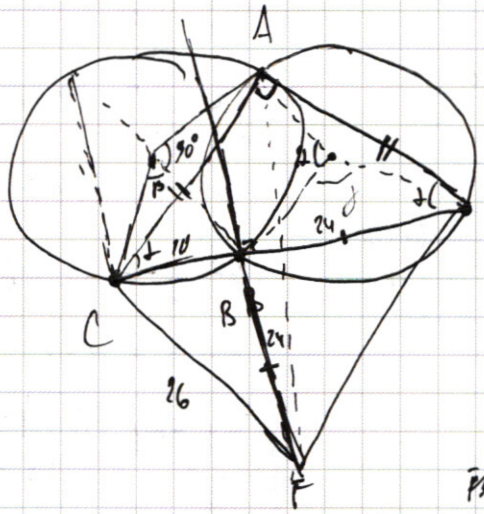


$\alpha = 45°$



$\angle BCA = \angle BDA$, т.к. они опираются на одинаковые дуги

т.к. $\angle CAD = 90°$, то $\angle BCA = \angle BDA = 45°$



$360 - 90° - \gamma = 90° + \beta°$

$180° = \beta° + \gamma°$

$\alpha = CB^2 + BD^2 = 26^2$

Ответ: а) $CF = 26$

$AC = AD$

$\frown AC = \frown AD$, т.к. $R_1 = R_2$

$\angle AO_1C = \angle AO_2D$

$90° + \beta = 360° - 90° - \gamma$

$\beta + \gamma = 180°$

Рисуем картинку

б) $BC = 10$

$BD = 24 = BF$

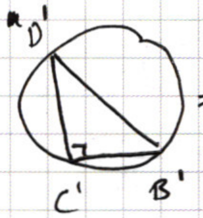
$\sin \angle ACF = \sin(\alpha + \angle BCF) =$

$\sin \angle BCF = \frac{12}{13}$ $= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\right) =$

$\cos \angle BCF = \frac{5}{13}$

$= \frac{17}{13\sqrt{2}}$

$17 \times 17 = 119 \ 17 \ 289$



$= CB^2 + BD^2 = 26^2$ (диаметр вв. вписан.)

$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \sin \angle ACF \cdot AC \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{13\sqrt{2}} \cdot \frac{34}{\sqrt{2}} \cdot 26 = \frac{17^2 \cdot 26}{2 \cdot 13} = 289$

$AC = \frac{10+24}{\sqrt{2}}$, $CF = 26$

Ответ: $CF = 26$, $S_{\triangle ACF} = 289$

$-2 \sin\frac{\pi}{4} \sin\frac{5x - \frac{\pi}{2} + 5x}{2} = -2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(-\frac{\pi}{4} + 5x\right) = 0$

$\sin -\frac{\pi}{4} + 5x = 0$

$-\frac{\pi}{4} + 5x = \pi n$

$x = \frac{\pi n}{5} + \frac{\pi}{20}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81}-1)x \end{cases}$$

$$3^x + 4\cdot 3^{81} = 85 + 3^{81}\cdot x - x$$

$$3^x + x = 3^{81}\cdot(x-4)$$

$$3^x + 4\cdot 3^{81} \leq y < 85 + x(3^{81}-1)$$

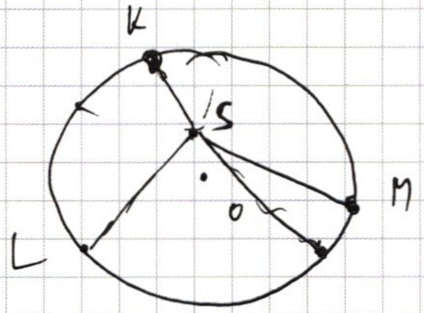
$$3^x + 4\cdot 3^{81} \leq y < 85 + 3^{81}\cdot x - x$$

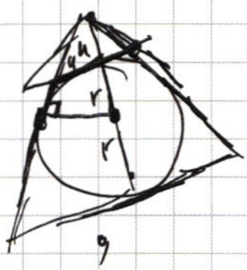
$$85 + 3^{81}\cdot x - x > 0$$

$$x(3^{81}-1) + 85 > 0$$

$$x > -\frac{85}{3^{81}-1}$$

между -1 и 0





$$\frac{h}{S_1} = \frac{h+2r}{S_2}; \quad hS_2 = hS_1 + 2rS_2$$

$$h(S_2 - S_1) = 2rS_2$$

$$r = \frac{h(S_2-S_1)}{2S_2}$$

$$\frac{r}{h+r} = \frac{\frac{h(S_2-S_1)}{2S_2}}{h + \frac{h(S_2-S_1)}{2S_2}} = \frac{(S_2-S_1)}{2S_2 + (S_2-S_1)} =$$

$$= \frac{9-4}{2\cdot 9+5} = \frac{5}{18+5} = \frac{5}{23}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} 1) \ |x-6-y|+|x-6+y|=12 \\ 2) \ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases}$$

$\to$ симметрия $y=-y$

; симметрия $x=-x$, $y=-y$

2) – уравнение 4-х окружностей, при $a>0$, $R=\sqrt{a}$

~~Вцентр~~ $(+0=(6;8);\ (-6;8);\ (6;-8);\ (-6;-8)$

1) Отрезки прямой, симметрия $y=-y$

$x-6-y+x-6+y=12$ $\quad$ ~~кдгл~~ $x-6-y+6-x-y=12$ $\quad$ ~~кавд~~ $6-x+y+x-6+y=12$

$x=12$ $\quad$ $-2y=12$, $y=-6$ $\quad$ $y=6$

~~кавд~~ $x=0$

2 прямые: $\begin{cases} y=x-6 \\ y=-x+6 \end{cases}$ в разных областях между этими прямыми вида ф-ции:

$\begin{cases} x-6\geq y \\ y\geq 6-x \end{cases} \Rightarrow x=12$ $\quad$ $\begin{cases} x-6\geq y \\ y<6-x \end{cases} \Rightarrow y=-6$ $\quad$ $\begin{cases} x-6<y \\ y\geq 6-x \end{cases} \Rightarrow y=6$

$\begin{cases} x-6<y \\ y<6-x \end{cases} \Rightarrow x=0$

$36+169=175+30=205=5\cdot 41$

$18^2+14^2=$

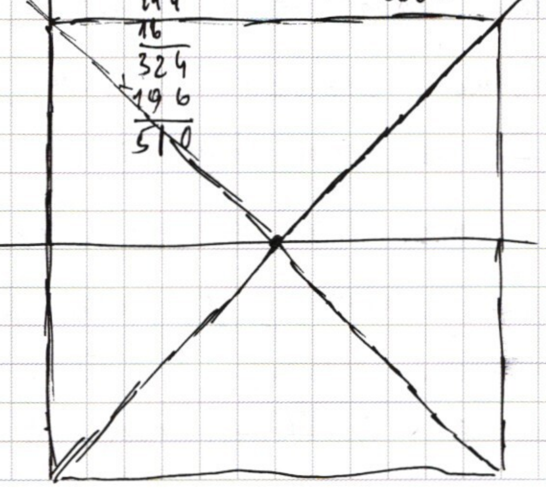
$36+196=200+32=232$

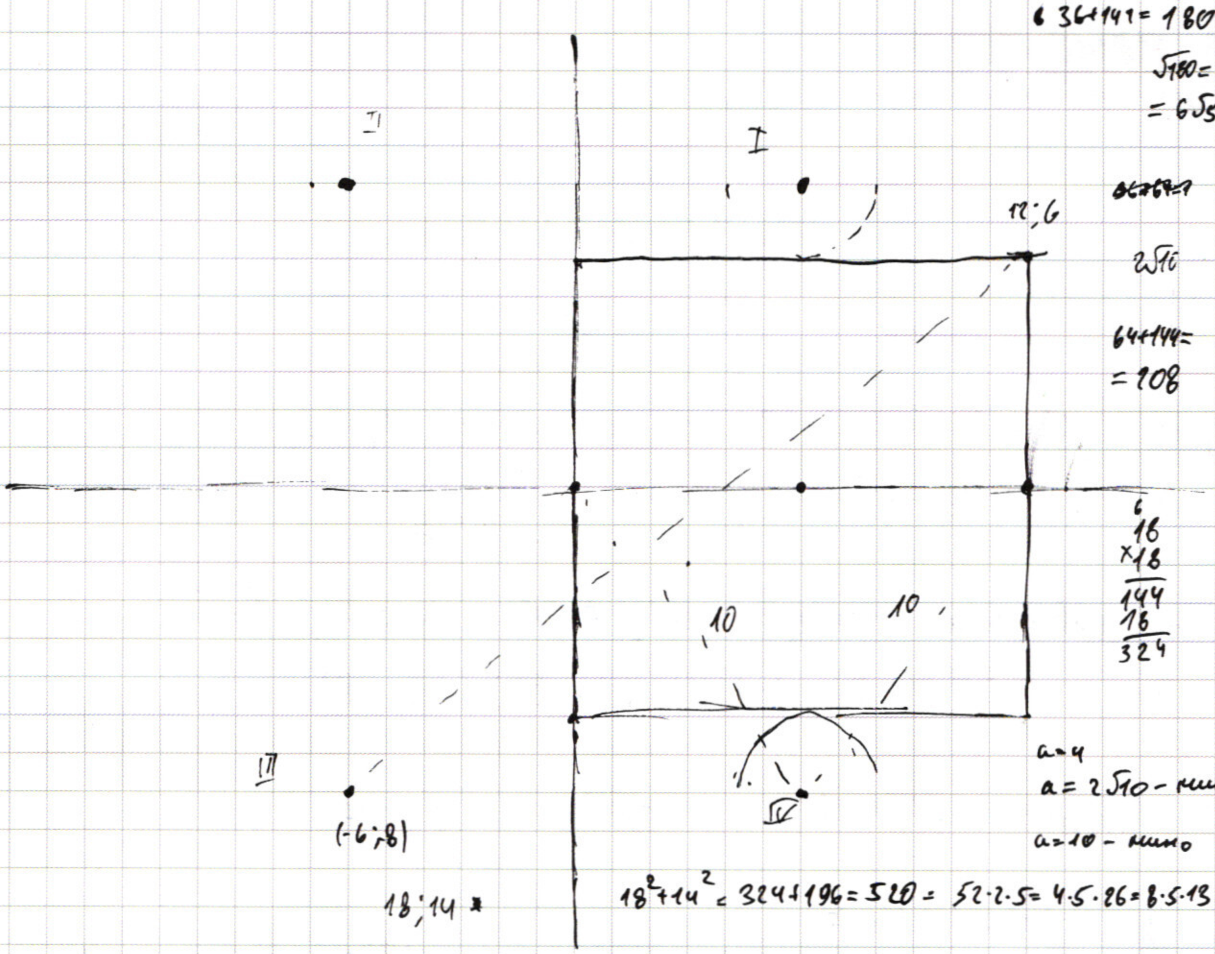
$16\cdot 16=144$, 16, 324, $+196$, 510

3) ~~При~~ $a=520$; $R=2\sqrt{130}$

Окр II и III имеют по одной ~~точке~~ отличной точке

Отв.: $a\in\{4;520\}$





$6\ 36+144=180$

$\sqrt{180}=6\sqrt{5}$

$2\sqrt{10}$

$64+144=208$

$18 \cdot 18 = 324$

$a=4$

$a=2\sqrt{10}$ – минус

$a=10$ – минус

$18^2+14^2=324+196=520=52\cdot2\cdot5=4\cdot5\cdot26=8\cdot5\cdot13$

У нас 4 окружности: ~~две~~ центры двух лежат на расстоянии 8 от ц. квадрата, ц. двух других лежат на расстоянии $\sqrt{208}$. Т.к. оба уравнения симметричны относительно $y=0$ $(y=-y)$, а окружности симметричны относит. $x=0$, то два решения сист. будет иметь, если пара окружностей, центры которых равноудалены от ц. квадрата, будут иметь либо 2 общ. точки пересечения, либо по 1 точке касания с квадратом, при условии, что вторая пара окружностей будет либо не иметь решений, либо их множество будет абсолютно таким же.

Характерные случаи: 1) $a=4$, $R=2$ – касание окр. I и IV, II и III не имеют общ. точек; 2) $a=40$, $R=2\sqrt{10}$, окр. I и IV имеют по 2 точки пересеч. каждая, окр. II и III имеют по 1 совп. точке с I и IV – минус; 3) $a=100$, $R=10$, окр II и III имеют по две ~~[illegible]~~ различ. точки пересеч, I и IV – 2 общ. точк. пересеч, 1 из которых совпадает ~~с~~ с II и III – минус; 4) $a=180$, $R=6\sqrt{5}$, крайнее положение для I и IV – 4 точки – минус

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3$

$16875 : 5 = 3375$; $3375 : 5 = 675$; $675 : 5 = 135$; $135 : 5 = 27$; $27 = 3^3$

$16875 = 5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3$

Наборы из 8 чисел-множителей: $5;5;5;5;3;3;3;1$ — $\frac{8!}{4!\cdot3!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{3\cdot2} = 8\cdot7\cdot5 = 40\cdot7 = 280$

$280 \cdot 3 = 840$

$5;5;5;5;3;9;1;1$ — $\frac{8!}{4!\cdot2!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{2} = 8\cdot7\cdot5\cdot3 = 840$

$\boxed{\text{Итого: } 1120}$

$$\left[\begin{array}{l} 7x = 2\pi n + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2\pi n + \frac{\pi}{4} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{28} \\ x = \frac{2\pi n}{3} + \frac{\pi}{12} \end{array}\right.$$

Отв: $\left\{\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{28};\ \frac{2\pi n}{3} + \frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5};\ n \in Z\right\}$

№2

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos(4x+3x) + \cos 3x - \sqrt{2}\cos(10x) = \sin(4x+3x) + \sin(3x)$

$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt{2}\cos 10x = 2\sin 5x\cos 2x$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}\cos 10x = 0$, $\cos 10x = \cos^2 5x - \sin^2 5x$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$

$(\cos 5x - \sin 5x)(2\cos 2x - \sqrt{2}\cos 5x - \sqrt{2}\sin 5x) = 0$

$\cos 5x = \sin 5x$

$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}; n \in Z$

$2\cos 2x - \sqrt{2}\cos 5x - \sqrt{2}\sin 5x = 0$

$\cos 2x - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 5x\right) = 0$

~~$\cos \sin(5x + \frac{\pi}{4})$~~ $\cos(5x - \frac{\pi}{4})$

$\cos 2x - \cos(5x - \frac{\pi}{4}) = 0$

$-2\sin\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{2x - 5x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \sin\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n \\ \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n \end{array}\right.$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№ 3

$$\begin{cases} 1) \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2) \; 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

ОДЗ:
$$\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

2) $2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$ 1)

$y^2 - 8y + 16 \quad -x^2 - 4x - 4$

$(y-4)^2 - (x+2)^2 - 12 - xy - 8y = 0$

$2y(y-4) - (x+4) - xy = 0$

$y^2 - 2xy + x^2 + y^2 - 8y + xy - 4x$ $2^4 = 4^2$

1) Равенство показательных функций.

либо $\begin{cases} \lg y = \lg(-xy) \\ \frac{x^4}{y^2} = (-x) \end{cases}$ либо $\lg y = \lg(-xy) = 0$

$\begin{cases} y = -xy \\ \frac{x^4}{y^2} = (-x) \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 0 \quad \varnothing \\ x = -1 \end{array}\right. \\ \frac{x^4}{y^2} = (-x) \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \frac{1}{y^2} = 1 \end{cases}$; $y^2 = 1$, $y = 1$ по ОДЗ

$y = -1 - \varnothing$

Подставляем

$$\lg \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\lg y \cdot \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg(-xy) \cdot \lg(-x)$$

$$\lg y \cdot (\lg x^4 - \lg y^2) = (\lg(-x) + \lg y)(\lg(-x))$$

$$\lg y \cdot 2(\lg x^2 - \lg y) = (\lg(-x) + \lg y) \cdot \lg(-x)$$

$$-2\lg^2 y + 4\lg(-x)\lg y = \lg^2(-x) + \lg(y) \cdot \lg(-x)$$

$$\lg^2(-x) - 3\lg(y)(\lg -x) + 2(\lg^2 y) = 0$$

$(\lg(-x) - \lg(y))(\lg(-x) - 2\lg(y)) = 0$

$\left[\begin{array}{l} -x = y \\ -x = y^2 \end{array}\right.$

$\lg(-x) = \lg(y)$

$\lg(-x) = 2\lg(y)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)