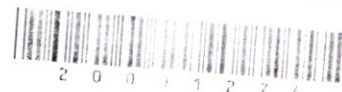


МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс



ВАРИАНТ 6

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

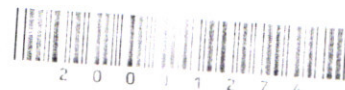
$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2(\cos 5x - \sin 5x) \cos 2x = \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$\sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x) \cos 2x = (\cos 5x - \sin 5x) \cdot$$

$$\cdot (\sin 5x + \cos 5x)$$

$$\cos 5x - \sin 5x = 0 \text{ или } \sqrt{2} \cos 2x = \sin 5x + \cos 5x$$

$$\cos 5x = \sin 5x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = \sin 5x$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - 5x = 5x + 2\pi k \\ \frac{\pi}{2} - 5x = \pi - 5x + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

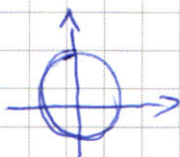
$$\begin{cases} 10x = \frac{\pi}{2} - 2\pi k \\ \frac{\pi}{2} = \pi + 2\pi k \end{cases} \rightarrow \frac{\pi}{2} = -2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$10x = \frac{\pi}{2} - 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{20} - \frac{\pi k}{5}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi + 4\pi n}{20}$$



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7} \end{cases} \rightarrow x = \frac{\pi + 8\pi n}{12}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$; $x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}$, где $n \in \mathbb{Z}$

Задача 17

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_7$$

$$a_0 \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

$$a_1, a_2, \dots, a_7 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

$$1) a_7 \cdot a_6 \cdot \dots \cdot a_0 = 16875 = 5 \cdot 3375 = 5^2 \cdot 675 = 5^3 \cdot 135 = 5^4 \cdot 27 = 5^4 \cdot 3^3$$

т.к. произв. цифр не 0 $\Rightarrow a_7, a_6, \dots, a_1 \neq 0$

2) Чтобы произв. цифр равн. 16875 должно быть

~~4 пятёрки и 3 тройки и единица (5*3>9 $\Rightarrow$ не подходит)~~

$$\left[\begin{array}{l} 4 - "5"; 3 - "3" \text{ и } 1 - "1" \quad (1) \\ 4 - "5"; 1 - "3"; 1 - "9" \text{ и } 2 - "1" \quad (2) \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} 5^4 \cdot 3 > 9 \text{ и т.д.} \\ 5^3 > 9, 5^4 > 9, 5^3 \cdot 3 > 9, 5^3 \cdot 3 > 9 \\ (5 \cdot 3 > 9, 5 \cdot 5 > 9, 3^3 > 9) \end{array} \right\} \text{т.к. } a_0, \dots, a_7 \in \{1, \dots, 9\}$$

$$3) (1): A_1 = \frac{8!}{4! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280 - \text{число вар. в 1 сл.}$$

$$(2): A_2 = \frac{8!}{2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1} = 8 \cdot 2520 = 20160 - \text{число вар. 2 сл.}$$

$$A = A_1 + A_2 = 20160 + 280 =$$

$$3) (1): A_1 = \frac{8!}{4! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280 - \text{число чисел в 1 сл.}$$

$$(2): A_2 = \frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 280 \cdot 3 = \text{число чисел в 2 сл.}$$

$$A = A_1 + A_2 = 280 \cdot 4 = 1120 - \text{всего чисел}$$

Ответ: $A = 1120$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow a \geq 0, \text{ т.к. иначе } \emptyset \Rightarrow \text{нет реш., а нужно два}$$

$$1) (2): \underline{\alpha}: x \geq 0; y \geq 0: (x-6)^2 + (y-8)^2 = a$$

1. часть окр. в I четв. $C_1(6; 8)$
и радиус. $\sqrt{a} = r$

2. точка $C(6; 8)$ при $a=0$

(не подх., т.к. реш. два (аналог. для ост. случаев))

$$\underline{\beta}: x \geq 0; y \leq 0: (x-6)^2 + (-y-8)^2 = a$$

часть окр. в IV четв. $C_2(6; -8)$, $r = \sqrt{a}$
($a > 0$ см. п. 1)

$$\underline{\gamma}: x \leq 0; y \geq 0: (-x-6)^2 + (y-8)^2 = a$$

часть окр. в II четв. $C_3(-6; 8)$, $r = \sqrt{a}$

$$\underline{\varphi}: x \leq 0; y \leq 0: (x+6)^2 + (y+8)^2 = a$$

часть окр. в III четв. $C_4(-6; -8)$
 $r = \sqrt{a}$

$$2) (1): |x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$\underline{\alpha}: \begin{cases} x-6-y \geq 0, & x-6+y \geq 0 \\ x \geq y+6 & x \geq y+6 \end{cases} : x-6-y + x-6+y = 12$$

$$\begin{aligned} & \cancel{x-6-y} + \cancel{x-6+y} = 12 \\ & \cancel{x} - \cancel{6} - \cancel{y} + \cancel{x} - \cancel{6} + \cancel{y} = 12 \\ & \cancel{y} \leq x-6 & \cancel{y} \geq 6-x \end{aligned}$$

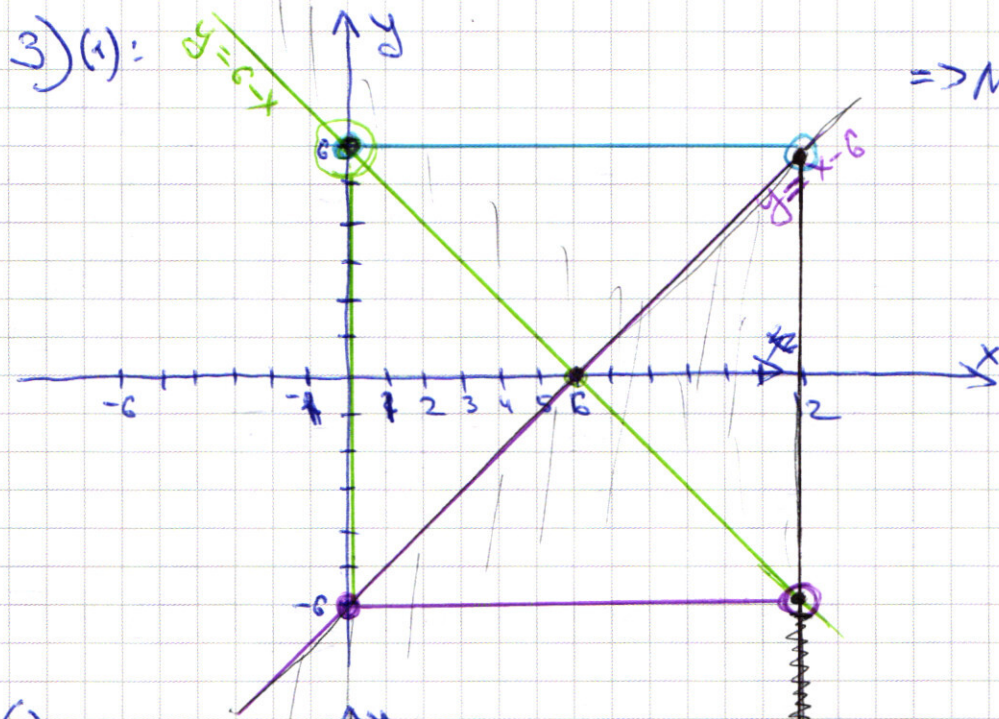
Задача 55

β: $x - 6 - y \geq 0$; $x - 6 + y < 0$; $x - 6 - y - x + 6 - y = 12$
 $x \geq y + 6$ $y \leq x - 6$ $x < -y + 6$
 $y \leq 6 - x$
 ~~$x + y - 6 \geq y + 6 + x$~~

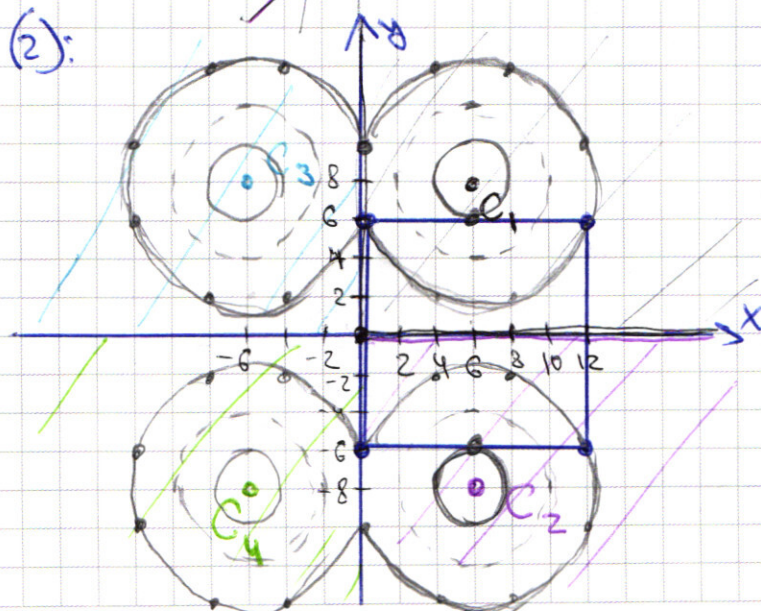
γ: $x - 6 - y < 0$; $x - 6 + y \geq 0$; $-x + 6 + y + x - 6 + y = 12$
 $x < y + 6$ $x \geq -y + 6$
 $y > x - 6$ $y \geq 6 - x$
 $2y = 12$
 $y = 6$

φ: $x - 6 - y < 0$; $x - 6 + y < 0$; $-x + 6 + y - x + 6 - y = 12$
 $x < y + 6$ $x < 6 - y$
 ~~$x + y - 6 < y + 6 + x$~~
 $-2x = 0$
 $x = 0$

3) (1): $y = 6 - x$ => Мн. (1) - квадрат



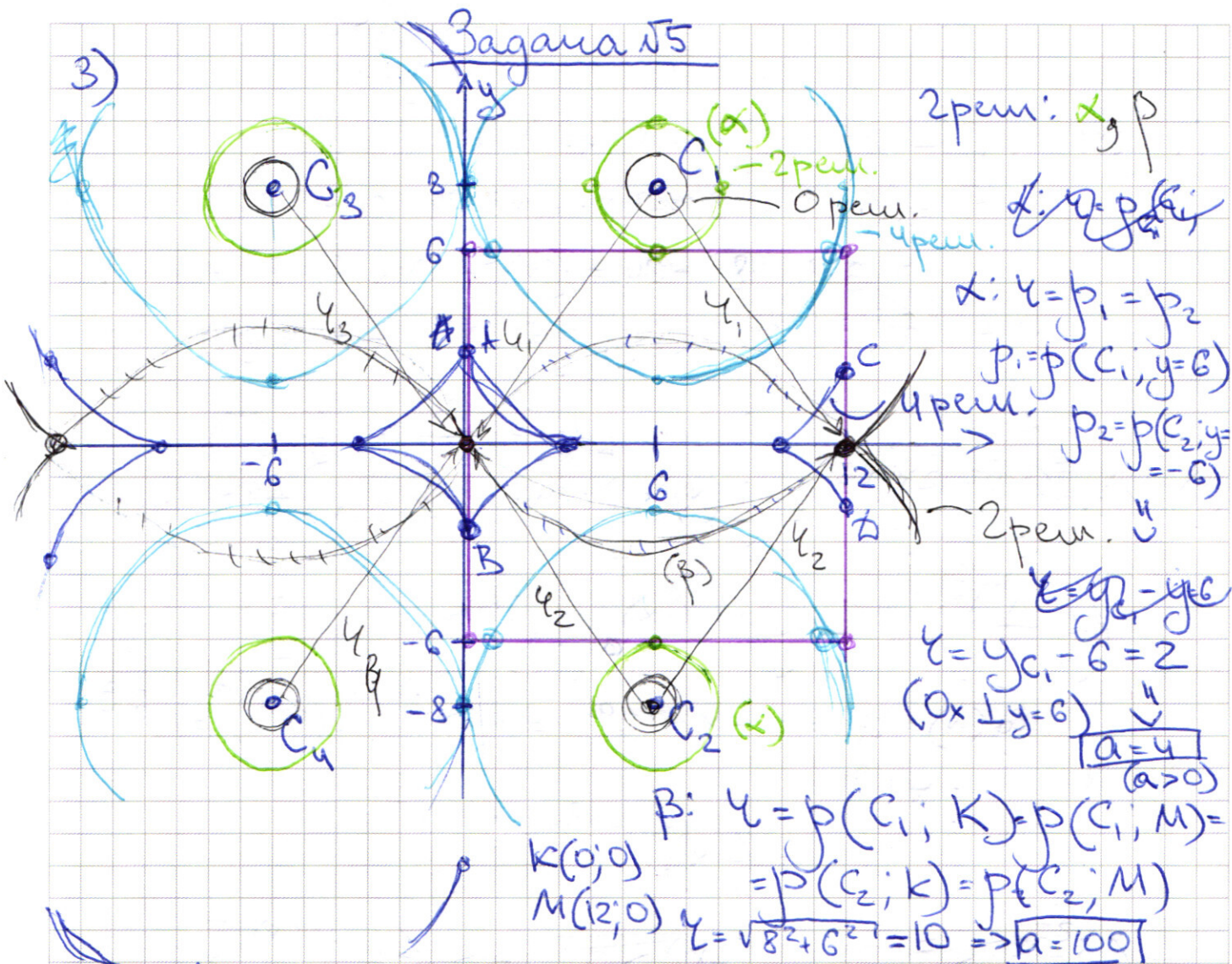
(2):



$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \sqrt{a}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 15



из симметрии:

4) При $\uparrow y$ окружн. енач. кас. кв. в двух точках, затем ~~касается~~ пересекают в 4-х т. (ω_1 и $\omega_2 \cap$), затем опять в 4, но это точки, образ. $\cap \omega_1 \cap \omega_3$, ω_2 и ω_4 ~~в точках~~ и ω_1 и ω_2 , затем A и B сл. в одну т. как и C и D $\Rightarrow$ 2 т. кас., а после все т. $\cap$ окр. $Ox \cap Oy$ нах. за пред. кв. и окр. кв. не пересекаются $\Rightarrow$ два ~~знач.~~ ~~знач.~~ а

Ответ: $\boxed{a \in \{4, 100\}}$

Задача №3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases} \quad \begin{matrix} 1) \text{ ОДЗ: } \begin{cases} -xy > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases} \end{matrix}$$

2) (2): $2y^2 - y(x+8) - x(x+4) = 0$

$$\Delta = (x+8)^2 + 8(x+4)x = x^2 + 64 + 16x + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 48x + 64 = (3x)^2 + 3x \cdot 2 \cdot 8 + 8^2 = (3x+8)^2$$

$$y = \frac{x+8 \pm (3x+8)}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4x+16}{4} = x+4 & (a) \\ y = -\frac{2x}{4} = -\frac{x}{2} & (b) \end{cases}$$

3) (1): $\left(\left(\frac{x^2}{y}\right)^2\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y}$ ~~$(\lg(-x))$~~ $\begin{matrix} -x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$ не ОДЗ)

$$\left(\left(\frac{x^2}{y}\right)^2\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$\lg(-x) = a \Rightarrow -x = 10^a \Rightarrow (-x)^{\lg(-x)} = (10^a)^a = 10^{a^2}$$

4) (a): ~~$\left(\left(\frac{x^2}{y}\right)^2\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x(x+4))}$~~

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^2 > 0 \quad (-x) > 0 \Rightarrow (-x)^{\lg(-x)} > 0$$

$(x^2 > 0, y > 0)$

4) ~~$y = x+4$ (a)~~

~~$x^2 = (y-4)^2$~~

~~$-x = 4-y$~~

~~$y=4$~~

~~$(4-y)^{\lg(4-y)}$~~

~~$= (4-y)^{\lg 4}$~~

~~$\Rightarrow (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot (4-y)^{\lg y} = (4-y)^{\lg 4}$~~

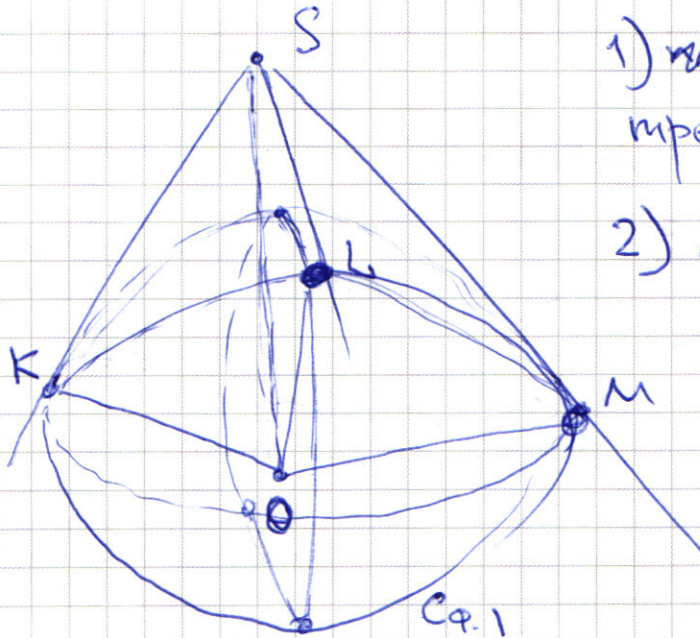
~~$\frac{1}{(4-y)^{\lg y}} \Rightarrow$~~

(b): ~~$y = -\frac{x}{2}$~~

~~$-x = 2y$~~

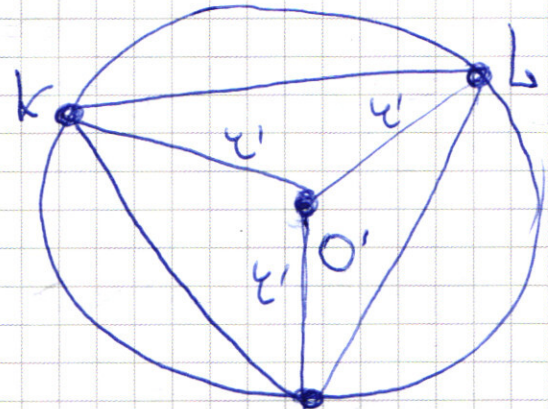
~~$2y^{\lg 2y} = 2y^{\lg y} \cdot 2y^{\lg y}$~~

Задача 54



1) $\triangle KLM$ - сеч. угла т.ок. KLM - т.р. к KLM

2) $K, L, M \in$ одн. окр. - сеч. $Сф. 1$



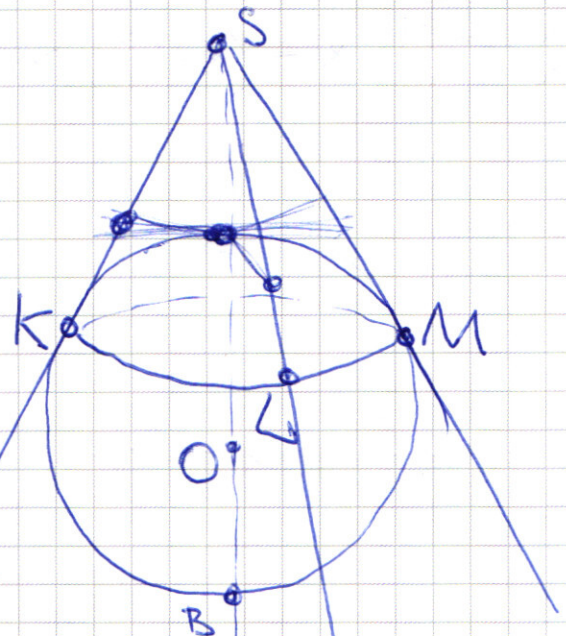
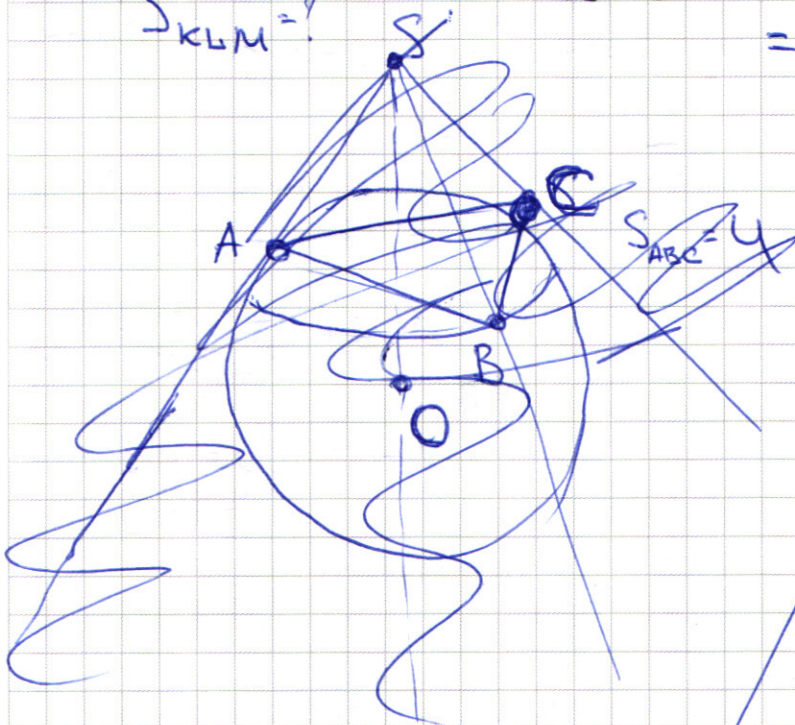
$$OK = OL = OM = r_{сферы} = r$$

$$\angle KSO = ?$$

$$S_{KLM} = ?$$

$$\angle SKO = 90^\circ = \angle SLO = \angle SMO$$

(сф. кас. угла)



3) Пусть т. кас. т. $\alpha - A$ ($S_\alpha = 4$), а т. β ($S_\beta = 9$) - B , тогда пирам. с осн. α и верш. в S подобна пирам. в верш. в S и осн. β ($SO \perp \alpha, SO \perp \beta$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{SA}{SB} \right)^2 = \left(\frac{SA}{SA + 2r} \right)^2 = \frac{S_\alpha}{S_\beta} = \frac{4}{9}$$

($SO \perp \alpha, SO \perp \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta \Rightarrow A, O, B, S$ леж. на одн. прам.)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 57

$$1) \begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 3^{81} \cdot x + (85 - x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

5.17

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 85 + (3^{81} - 1)x > y + 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 85 - x + 3^x > 3^{81} (4 - x) \Leftrightarrow 3^x + 3^{81} \cdot x - x > 3^{81} \cdot 4 - 85$$

$$2) 3^{81} \cdot x - (x - 3^x) > 4 \cdot 3^{81} - 85$$

$$\begin{aligned} x=4 & \quad 3^{81} \cdot 4 - (4 - 3^4) = 3^{81} \cdot 4 + 77 > 3^{81} \cdot 4 - 85 \\ x=5 & \quad 3^{81} \cdot 5 - (5 - 3^5) = 3^{81} \cdot 5 + 24 > 3^{81} \cdot 4 - 85 \\ x=3 & \quad 3^{81} \cdot 3 - (3 - 3^3) = 3^{81} \cdot 3 + 24 \end{aligned}$$

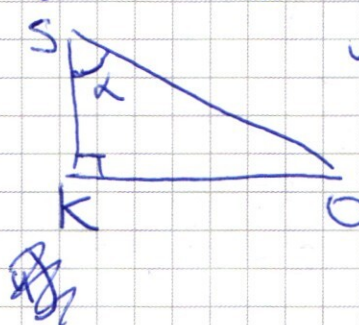
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 14

$$3) \left(\frac{SA}{SA+24} \right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow 3SA = 2SA + 48 \Rightarrow SA = 48 \Rightarrow SO = 54$$

$$\Delta SOK, \sin \alpha = \frac{KO}{SO} = \frac{4}{54} = \frac{1}{5} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{1}{5}$$

($\angle SKO = 90^\circ$) $\angle KSO = \alpha$



$$4) \angle OSL = \angle OSM = \alpha = \angle KSO$$

$$(\angle SLO = \angle SMO = 90^\circ; OM = OL = 4)$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5}$$

O' лежит на SO $\Rightarrow$
(симм. отн. K, L, M)

SO' высота ΔKLM , т.к. $m. O'$ — центр опис. окр. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle SO'K = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KO' = 4' = KO \cdot \sin(90 - \alpha) = 4 \cos \alpha$$

($\Delta KOO'$) $\Rightarrow SO' = KO' / \tan \alpha$

$SO' \in SB \Rightarrow$ пирам. $SKLM$ подобна пир. с верш. S , а осн. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_{KLM}}{4} = \left(\frac{SO'}{SA} \right)^2 \Rightarrow S_{KLM} = 4 \cdot \left(\frac{4 \cos^2 \alpha}{(1/5)} \right) =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{4 \cdot 24}{25 \cdot \frac{1}{5} \cdot 4} \right) = \frac{24}{25} \cdot 4 = \frac{16 \cdot 24}{100} = \frac{240 + 144}{100} = \frac{384}{100} = 3.84$$

Ответ: $\angle KSO = \alpha = \arcsin \frac{1}{5}; S_{KLM} = 3.84$

Задача №3

4) (б): ~~$2y^{\lg 2y} \cdot (-x)^{\lg y} = 2y^{\lg 2}$~~

4) (б): $-x = 2y \Rightarrow (2y)^{\lg 2y} \cdot (2y)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2^3}$

~~$(2y)^{\lg 2^3}$~~ = $(2y)^{\lg 8}$

$$(2y)^{\lg 2y^2} = \left(\frac{x^2}{y}\right)^{\lg y^2}$$

$$(2y)^{\lg 2y^2} = \left(\frac{4y^2}{y}\right)^{\lg y^2}$$

$$(2y)^{\lg y^2} \cdot (2y)^{\lg(y^2)} = (4y)^{\lg y^2}$$

$$\frac{((2y)^{\lg y^2})^2}{(4y)^{\lg y^2}} = 1$$

$$2^{\lg y^2} = (2y)^{\lg y^2} \quad y > 0, 2 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = 2; y = 1 \Rightarrow x = -2y = -2$$

$\boxed{(-2; 1)}$ - неогр. по ОДЗ

4) (а): $-x = 4 - y$

$$\left(\frac{(4-y)^2}{y}\right)^{2\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot (4-y)^{\lg y}$$

$$\left(\frac{(4-y)^2}{y}\right)^{2\lg y} = (4-y)^{\lg(y(4-y))}$$

$$(4-y)^{4\lg y} \cdot y^{-2\lg y} = (4-y)^{\lg(y(4-y))}$$

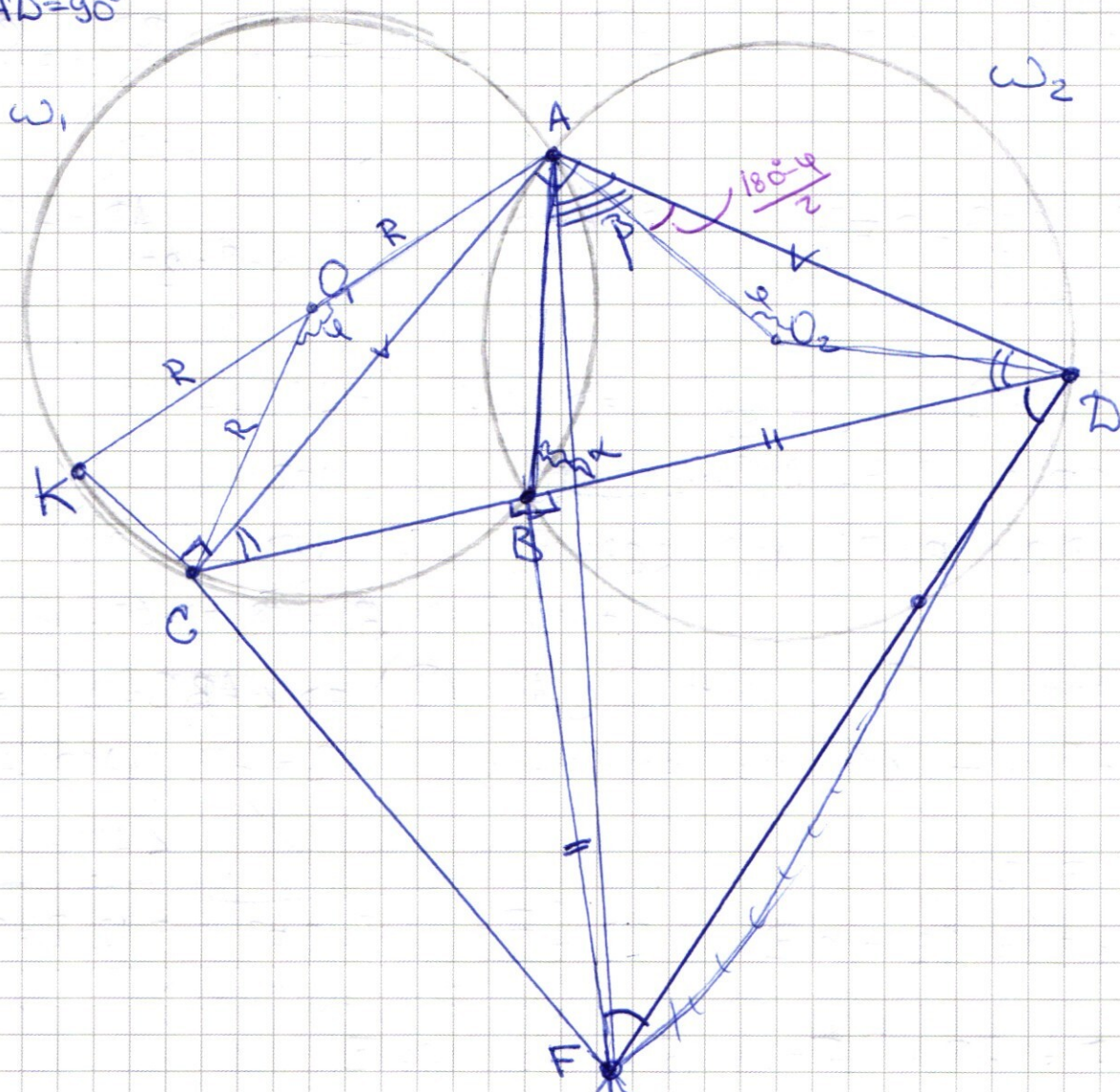
$$y^{-2\lg y} = (4-y)^{\lg \frac{y(4-y)}{y^4}}$$

$$y^{\lg y^{-2}} = (4-y)^{\lg \frac{4-y}{y^3}} = (4-y)^{\lg(\frac{4}{y^3} - y^{-2})}$$

$$y^{\lg y^{-2}} = \frac{(4-y)^{\lg \frac{4-y}{y^3}}}{(4-y)^{\lg y^{-2}}} \quad (y(4-y))^{\lg y^2} = (4-y)^{\lg \frac{4}{y^3}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 16

$$R=13 \quad CF=?$$
$$\angle CAD=90^\circ$$


1) $\triangle ACB$ given. $\angle C = 90^\circ$; $\triangle ADB$ given. $\angle D = 90^\circ$, AB common.
 no th. sin: $2R = \frac{AB}{\sin(\angle C)} = \frac{AB}{\sin(\angle D)} \Rightarrow \angle ADB = \angle ACB \Rightarrow AC = AD$

При этом $\triangle ABC$ - равноб. и прямоуг. $\Rightarrow \angle ACB = 45^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle AQB = 90^\circ$ (центр. угол. дир. на $\overset{\frown}{AB}$) $\Rightarrow AB =$
 $= \sqrt{2R^2} (\triangle AQB) \Rightarrow AB = 13\sqrt{2}$

Задача №6

2) ~~$\triangle BDF$~~ $\triangle BDF$: $\angle DBF = 90^\circ$ (BF-высота), $BF = BD \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle BDF = \angle BFD = 45^\circ$

$$\angle ADF = \angle ADB + \angle BDF = 90^\circ$$

3) $\triangle ABC \sim \triangle ADB$: $\frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{BD}{\sin \beta} = \frac{CB}{\sin \beta} = 2R$

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2$$

(т.т. $\triangle CBF$)

$$AD = AC$$
$$\alpha + \beta = 135^\circ$$

$$AC = AD = 2R \cos\left(\frac{180^\circ - \gamma}{2}\right) \Rightarrow \angle AOC = \angle AOD = \gamma$$

4) $\triangle ACB$: $CB^2 + AC^2 - 2CB \cdot AC \cos 45^\circ = AB^2$
 $\triangle ADB$: $BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cos 45^\circ = AB^2$ (т.т. $\cos$)

$$AC = AD = BD = CB \Rightarrow AB - \text{рег.}$$

высота и бисс. $\triangle ACD$ ($AC = AD$) $\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AB \perp F$ пер. на сгн. прам., $CB = AB$ ($\triangle ACB$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow CB = R \cdot \sqrt{2}$$

$$BF = BD = CB = 13\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = 13 \cdot 2 = 26$$

($\triangle CFB$, т.т. $\text{Пиф.$)

5) $AF = AB + BF = 13\sqrt{2} + 13\sqrt{2} = 26\sqrt{2}$

$$\angle CBF = 45^\circ (BF = CB = BD) \Rightarrow \angle ACF = \angle ACB + \angle BCF = 90^\circ = \beta$$

$\Rightarrow S$

$$CB^2 + AD^2 - 2CB \cdot AD \cos 45^\circ = BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cos 45^\circ$$

$$CB(CB - AD) = BD(BD - AD) \cdot \cos 45^\circ$$

$$CB = BD \quad \text{или} \quad CB^2 - BD^2 = (CB - BD)AD\sqrt{2}$$

$$(CB + BD = AD\sqrt{2}) \quad \text{или} \quad CB = BD \Rightarrow \varnothing$$

$$CB = BD = AD \quad \text{или} \quad CB = BD = AD$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6

$$5) CF = \sqrt{CD^2 + DF^2 - 2 \cdot CD \cdot DF \cdot \cos 45^\circ} \quad (= \text{th. } \cos \angle CDF)$$

$$= \sqrt{(AD\sqrt{2})^2 + (BD\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2 \cdot AD \cdot BD \cos 45^\circ} =$$

$$= \sqrt{2(AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos 45^\circ)} = \sqrt{2} \cdot AB = 13 \cdot 2 = 26$$

AB² (Δ ABD по th. cos) CF = 26

$$6) BC = 10 \Rightarrow BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = \sqrt{(26-10) \cdot 36} = 6 \cdot 4 = 24$$

(Δ CBF th. Пиф.)

$$FD = BF\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$$

(Δ BFD th. Пиф.)

$$AF = \sqrt{AD^2 + DF^2}$$

(∠ ADF = 90°, th. Пиф.)

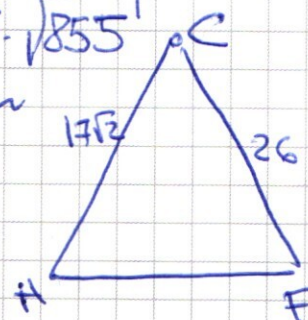
$$AD^2 = \frac{(CB + BD)^2}{2} = \frac{(10 + 24)^2}{2} = \frac{34^2}{2} = 578 = 17^2 \cdot 2 = AC^2$$

(Δ ACD)

$$AF = \sqrt{17^2 \cdot 2 + 24^2 \cdot 2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{24^2 + 17^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{85} = \sqrt{170}$$

~~$$AC^2 + CF^2 = 26^2 + 17^2 \cdot 2 = 24^2 \cdot 2 + 17^2 \cdot 2$$~~

$$S_{AFC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



$\begin{array}{r} \times 24 \\ 24 \\ \hline 48 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times 25 \\ 25 \\ \hline 125 \\ 50 \\ \hline 525 \end{array}$
= 576		

Задача №6

$$\begin{aligned} S_{AFC} &= S_{ACFD} - S_{ADF} = S_{ACFD} - \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DF = \\ &= S_{ACD} + S_{CBF} + S_{BFD} - \frac{1}{2} AD \cdot DF = \\ &= \frac{1}{2} AD \cdot AC + \frac{1}{2} CB \cdot BF + \frac{1}{2} BF \cdot BD - \frac{1}{2} AD \cdot DF = \\ &= \frac{1}{2} (17^2 \cdot 2 + 10 \cdot 24 + 24 \cdot 24 - 17 \cdot \sqrt{2} \cdot 24\sqrt{2}) = \\ &= \frac{1}{2} (17^2 \cdot 2 + 10 \cdot 24 + 24^2 - 17 \cdot 24 \cdot 2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 (17^2 + 5 \cdot 24 + 24 \cdot 12 - 17 \cdot 24) = \\ &= 17^2 + 24 \cdot 17 - 24 \cdot 17 = 289 \end{aligned}$$

Ответ: $\boxed{CF=26; S_{AFC}=289}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3

$$5) (y(4-y))^{\lg y^{-2}} = (4-y)^{\lg 4/y^3} \quad x=4-y$$

$$(y(4-y))^2 \lg y = (4-y)^{\lg 4/y^3}$$

$$y^{-2 \lg y} = (4-y)^{\lg(4/y^3 + y^2)}$$

~~$$y^{\lg y^{-2}} = 4^{\lg 4/y^3 + y^2} - y^{\lg y}$$~~

$$y^{\lg y^{-2}} \cdot (4-y)^{\lg y^{-2}} = 4^{\lg 4/y^3} - y^{\lg 4/y^3}$$

