

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**  
**ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ**

**11 класс**

ВАРИАНТ 6

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в рз  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .
- б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 10$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 & (a) \\ \sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x & (b) \end{cases}$$

$$a) \cos 5x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0$$

$$-2 \sin \frac{\pi}{4} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$$

$$b) \sqrt{2} \cos 2x = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos 2x = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-2 \sin\left(-\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8} = \pi n \\ \frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi n \end{cases}$$

$$x = +\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{4}\pi n$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{4}\pi n \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Задача 3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (1-x)^{\lg(1-x)} & (2) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$1) x^2 + (y+4)x - 2y^2 + 8y = 0$$

$$D = (y+4)^2 + 8y^2 - 32y = (3y-4)^2$$

$$\begin{cases} x = y-4 & (a) \\ x = -2y & (b) \end{cases}$$

$$a) \left(\frac{(y-4)^2}{y}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$(y-4)^{4\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot (4-y)^{\lg y} \cdot y^{2\lg y}$$

$$(4-y)^{3\lg y - \lg(4-y)} = y^{2\lg y} \quad | \lg \quad 4-y > 0$$

$$(3\lg y - \lg(4-y)) \lg(4-y) = 2\lg y \cdot \lg y$$

$$2\lg^2 y - 3\lg y \lg(4-y) + \lg^2(4-y) = 0$$

$$D = 9\lg^2 y - 8\lg^2 y = \lg^2 y$$

$$\lg(4-y) = \frac{3\lg y \pm \lg y}{2}$$

$$\begin{cases} \lg(4-y) = 2\lg y \\ \lg(4-y) = \lg y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-y = y^2 \\ 4-y = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{17}-9}{2} \\ y = 2 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

$$b) \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y} \quad | \lg$$

$$2\lg y \lg \frac{(x^4)^2}{y} = \lg(2y^2) \lg 2y$$

$$2\lg y \lg 4y = \lg 2y^2 \lg 2y$$

$$2\lg y (2\lg 2 + \lg y) = (\lg 2 + 2\lg y) (\lg 2 + \lg y) \quad \lg 2 = p \quad \lg y = a$$

$$2a(2p+a) = (p+2a)(p+a)$$

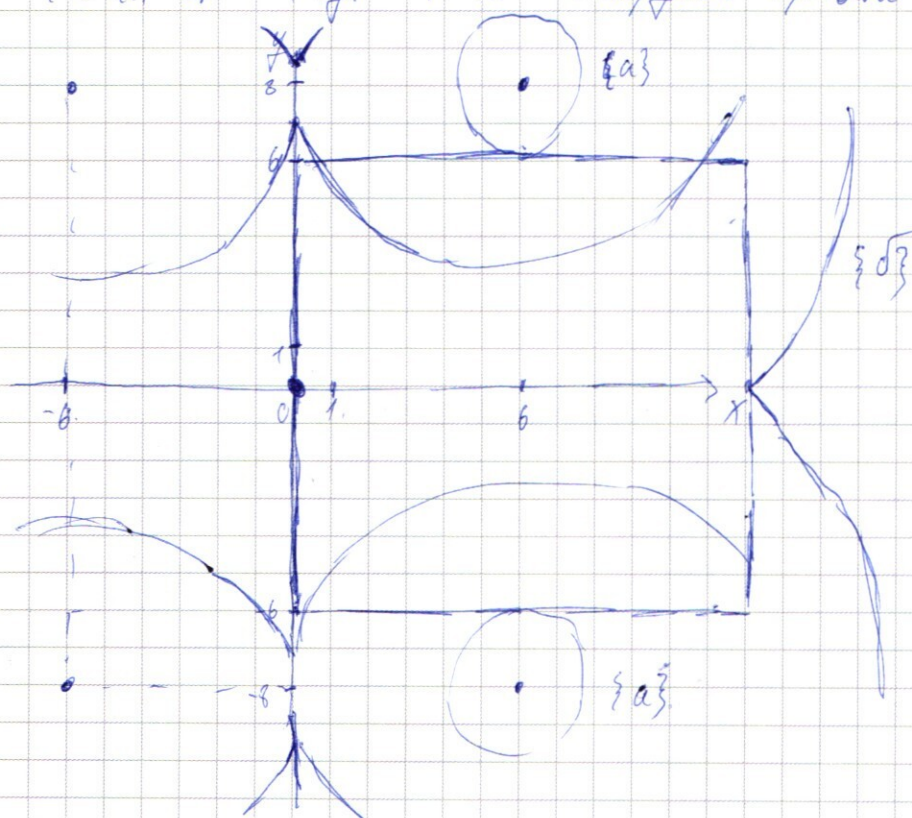
$$4pa + 2a^2 = p^2 + pa + 2pa + 2a^2 \Rightarrow pa = p^2 \Rightarrow a = p \Rightarrow y = 2$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ:  $(\frac{\sqrt{17}-2}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2})$ ;  $(-2; 2)$ .

Задача 5

$|x-6-y| + |x-6+y| = 12 \rightarrow$  квадрат с вершинами  $(0;6)$   $(12;6)$   $(12;-6)$   $(0;-6)$   
 $(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \rightarrow$  4 окруж. при  $a < 6$  с рад.  $\sqrt{a}$



a)  $\sqrt{a} = 2 \rightarrow a = 4$

b)  $\sqrt{a} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$a = 100$

Ответ: 4; 100.

Задача 1

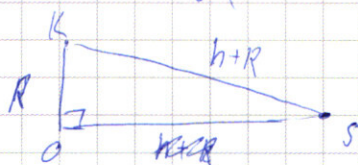
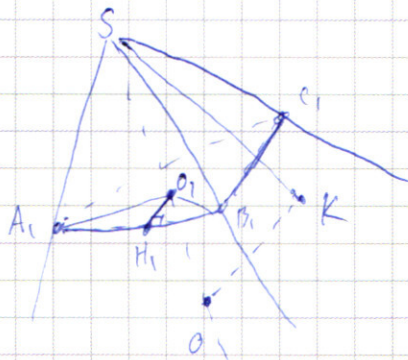
$16875 = 5^4 \cdot 3^3$

1)  $5^4 \cdot 3^3 \cdot 1 \rightarrow \frac{8!}{4! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 280$

2)  $5^4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \rightarrow \frac{8!}{4!} = 1680$

Ответ: 1960.

Задача 4



$S_{A_1B_1C_1}$   $\Delta A_1B_1C_1$  - сечение с площадью  $S_1$ ,  
данное вкл.

$$S_{A_1B_1C_1} = S'_1 + S'_2 + S'_3$$

$$S'_1 = S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot A_1B_1 \cdot O_1H_1, \text{ где } O_1H_1 - \text{высота из } O_1 \text{ на } A_1B_1$$

$$O_1H_1 = \frac{SO_1}{\cos \angle H_1SO_1}$$

$$A_1B_1 = \cot \angle S B_1 H_1 \cdot O_1H_1 + \cot \angle S A_1 H_1 \cdot O_1H_1$$

( $SH_1 \perp A_1B_1$  по п. 1.1.1)

$$S'_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cot \angle S B_1 H_1 + \cot \angle S A_1 H_1}{\cos^2 \angle H_1SO_1} \cdot SO_1^2$$

$$S'_1 \sim SO_1^2$$

Аналогично можно найти  $S'_2$  и  $S'_3$ , получим:

$$S_{A_1B_1C_1} \sim SO_1^2$$

Площадь с произвольной плоскостью:

$$S_{A_2B_2C_2} \sim (SO_1^2 + 2R)^2, \text{ где } R - \text{радиус сферы } SO_1 = h$$

$$\frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{(h+2R)^2}{h^2}$$

$$9h^2 = 4h^2 + 16Rh + 16R^2$$

$$5h^2 - 16Rh - 16R^2 = 0$$

$$h = \frac{16R \pm \sqrt{256R^2 + 5 \cdot 16R^2}}{10} = 4R$$

$$\sin \angle KSO = \frac{R}{h+R} = \frac{1}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$$

Угол  $\angle KSO = \angle LSO = \angle MSO$  ( $SK$ ;  $SL$ ;  $SM$  - касательные)

$$SK = SL = SM$$

Опустим высоты из  $K, L, M$  на  $SO$ . Они упадут на одну

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

и мы же точку на 2-м предельном пункте. Значит  
сечение  $KLM \perp SO$  (2 пересек. прямые  $KLM \perp SO$ ). Отсюда:

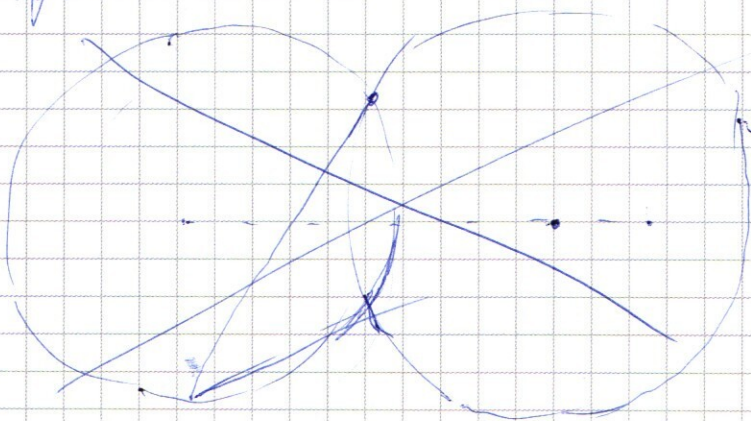
$$S \sim (h+R-R\sin\angle KSO)^2$$

$$S_{A,B,C} = \frac{(h+R-R(1-\sin\angle KSO))^2}{h^2} = \frac{(4+1-\frac{1}{5})^2}{16} = \frac{14^2}{15 \cdot 16} = \frac{36}{25}$$

$$S = \frac{36}{25} \cdot S_{A,B,C} = \frac{144}{25}$$

Ответ:  $\arcsin \frac{1}{5}; \frac{144}{25}$

Задача 6



а)  $\angle ADB = \frac{\angle ACB}{2}$  ( $\angle AOB$  — центр,  $\angle ADB$  — впис. угол на одну дугу  $AB$ )

$$\angle ACB = \frac{\angle AOB}{2}$$

$$\angle ADB = \angle ACB \text{ (окруж. равны)}$$

$$\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow \angle ADB = 45^\circ$$

$$\angle AO_2B = 90^\circ \Rightarrow AB = \sqrt{2}R$$

$$\angle CAB = \alpha$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \sqrt{2}AB = \frac{BD}{\cos \alpha}$$

$$\frac{BC}{BD} = \tan \alpha \Rightarrow \angle BFC = \alpha$$

$$BF = \cos \alpha \cdot CF \Rightarrow CF = \frac{BD}{\cos \alpha} = \sqrt{2}AB$$

$$CF = 2R = 26$$

$$\begin{cases} S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot AF \cdot \sin \alpha \\ \sin \alpha = \frac{BC}{BF} \\ AF = AB + BF \\ BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} \end{cases}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot (AB + \sqrt{CF^2 - BC^2}) \cdot \frac{BC}{\sqrt{CF^2 - BC^2}} = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 10 \left( 1 + \frac{\sqrt{2^2 - 1^2}}{\sqrt{26^2 - 10^2}} \right)$$

$$S_{ACF} = 130 \left( 1 + \frac{\sqrt{2 \cdot 13}}{24} \right)$$

Ответ:  $26$ ;  $130 \cdot \left( 1 + \frac{\sqrt{2 \cdot 13}}{24} \right)$ .

Задача 4

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 1 \cdot 8 \\ y \leq 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases} \rightarrow \Delta y = (3^{81} - 1) \Delta x$$

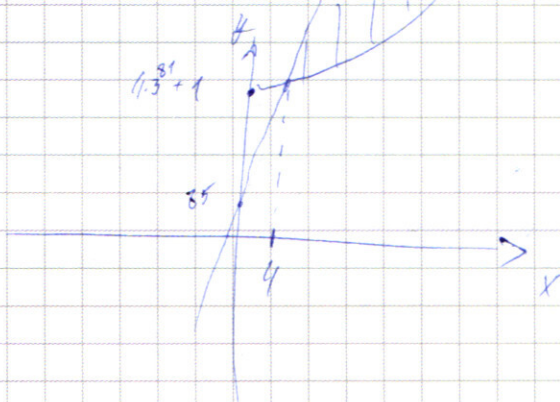


График пересекает экспоненту в точке  $x = 85$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.  $y^2 + y - 1 = 0$   $16845 = 25 \cdot 25 \cdot 27$

1)  $5^4 \cdot 3^3 \cdot 1 \rightarrow 125$   $\begin{array}{r} 16845 \\ -140 \\ \hline 184 \\ -145 \\ \hline 39 \end{array}$   $\begin{array}{r} 25 \\ \cdot 25 \\ \hline 625 \\ \cdot 25 \\ \hline 15625 \end{array}$   $\begin{cases} \alpha = \alpha + \beta \\ \beta = \alpha - \beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{a+b}{2} \\ \beta = \frac{a-b}{2} \end{cases}$

2)  $5^4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$   $y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$   $\begin{array}{r} 16845 \\ -145 \\ \hline 145 \\ -145 \\ \hline 0 \end{array}$   $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

2.  $\cos 4x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 2x + \sin 3x$   $\frac{1}{a^b} = a^{-b}$

$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$   $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$

$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$   $= -2 \sin \alpha \sin \beta$

$\sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x$   $\frac{1}{a^b} = b^{\frac{1}{a}}$

$\cos 5x = \sin 5x$   $\frac{1}{2} - 4 = \frac{\sqrt{17}-9}{2}$   $\cos 5x + \cos(\frac{\pi}{2} - 5x)$

$\sqrt{2} \cos 2x = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos(5x - \frac{\pi}{4})$   $\frac{1}{a^b} = b^{\frac{1}{a}}$

3.  $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} = (-x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} \rightarrow (-x)^{\frac{1}{2}} = (-x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$   $\begin{cases} x > 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$   $(-x)^{\frac{1}{2}} = (-x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}$   $\begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$x^2 + (y+4)x - 2y^2 + 8y = 0$   $(-x)^{\frac{1}{2}} = (-x)^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}$

$\Delta = y^2 + 8y + 16 + 8y^2 - 32y = 9y^2 - 24y + 16 = (3y-4)^2$

$x = \frac{-y-4 \pm (3y-4)}{2}$   $a) \left(\frac{y-4}{y}\right)^{\frac{1}{2}} = (1-y)^{\frac{1}{2}}(4-y)^{\frac{1}{2}}$   $4-4 < 0$

$\begin{cases} x = y-4 & (a) \\ x = -2y & (b) \end{cases}$   $(y-4)^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}} \cdot (4-y)^{\frac{1}{2}}$   $4-y > 0$

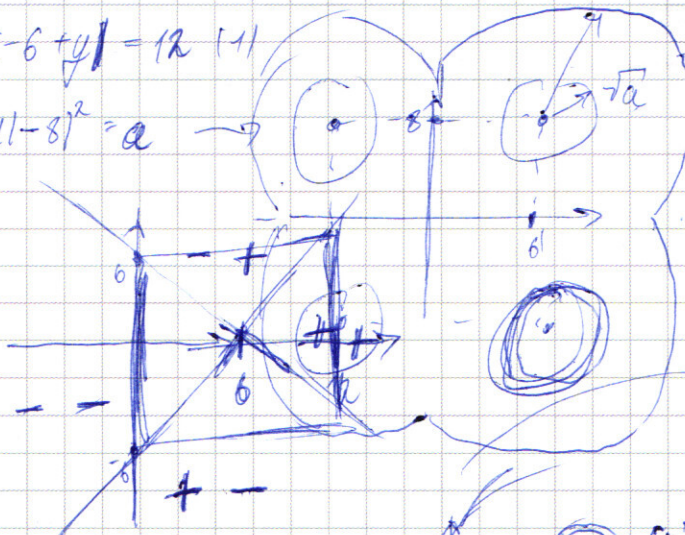
$y^{\frac{1}{2}}(4-y)^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}} \cdot (4-y)^{\frac{1}{2}}$   $4-y > 0$

$y^{\frac{1}{2}}(4-y)^{\frac{1}{2}} = (4-y)^{\frac{1}{2}}(4-y)^{\frac{1}{2}}$   $4-y > 0$

$(1+1n)^{\frac{1}{20}}$   $(1+3n)^{\frac{1}{12}}$

$$5. \begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ y \leq x-6 \\ y+x-6 \geq 0 \\ y \geq -x+6 \end{cases}$$



$$(24+7-3^p)3^{81} \vee p-4$$

$$p=4; 0 \neq 0$$

$$x=85$$

$$x \in [4; 85]$$

$$x \in [5; 84]$$

$$++ \quad 2x - 12 = 12$$

$$x = 12$$

$$-+ \quad -x+6+y + x-6+y = 12$$

$$y = 6$$

$$+- \quad x-6-y + -x+6-y = 12$$

$$y = -6$$

$$x = 82$$

$$-- \quad -x+6+y -x+6-y = 12$$

$$x = 0$$

$$a) \quad \sqrt{a} = 2$$

$$b) \quad \sqrt{a} = 10$$

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$y \geq 3^x + 4a$$

$$y < 85 + (a-1)x$$

$$85 + (a-1)x \leq 3^x + 4a$$

$$85 + (3^{81} - 1)x \leq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$3^9 = 24$$

$$4 = 81 \rightarrow 243$$

$$85 + (3^{81} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$3^x + 4a = 85 + (a-1)x$$

$$x=4: 81 + 4 \cdot 3^{81} = 85 + 4 \cdot 3^{81} - 4$$

$$x=5: 243 + 4 \cdot 3^{81} < 85 + 5 \cdot 3^{81} - 5$$

$$243 - 80 < 3^{81}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

114 205

$$S' = \frac{1}{2} a h \cos \alpha$$

$$S_i = S'_1 + S'_2 + S'_3 = (\alpha + \beta + \gamma) h^2$$

$$S_i \sim h^2$$

$$S_k \sim h^2$$

$$\frac{g}{4} = \frac{(h_1 + 2R)^2}{h_1^2}$$

$$gh_1^2 = 4h_1^2 + 16Rh_1 + 16R^2$$

$$gh_1^2 - 16Rh_1 - 16R^2 = 0$$

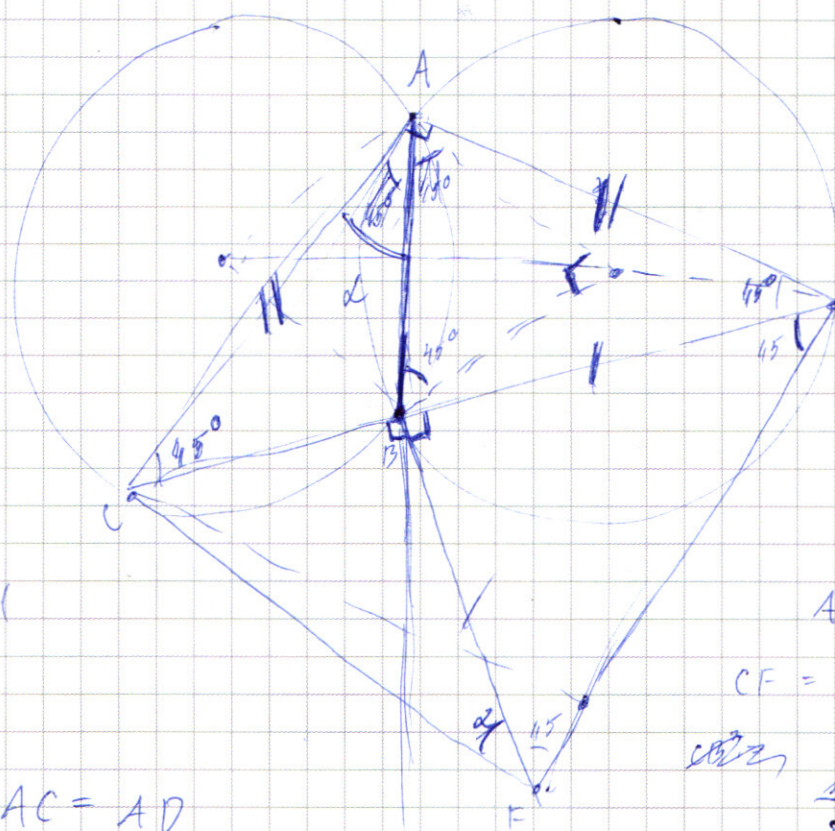
$$\frac{g}{4} = 16R^2 + 5 \cdot 16R^2 = 6 \cdot 16R^2$$

$$h_1 = 2 \quad \frac{g}{4} = 6 \cdot 16R^2 + 5 \cdot 16R^2 = 9 \cdot 16R^2$$

$$h_1 = \frac{3R \pm 12R}{5} = 4R$$

$$5 - \frac{1}{5} = \frac{24}{5}$$

$$CA^2 + AD^2 = CD^2$$



$$AC^2 + AD^2 = CF^2 + FD^2$$

$$CA^2 + AD^2 = CD^2$$

$$\angle ADB = \frac{\angle AOB}{2} = \angle ACD$$

150°                      45°

~~AB = \sqrt{2} R~~

$$AB = \sqrt{2} R$$

$$AC = AD$$

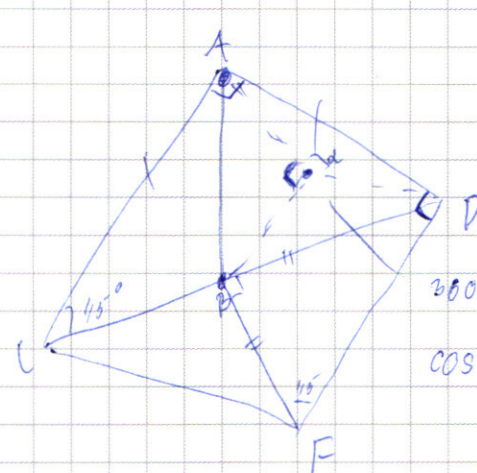
$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2}$$

~~cos alpha~~

$$\sqrt{2} AB = \frac{CB}{\sin \alpha} = \frac{BD}{\cos \alpha}$$

$$AC = AD$$

$$CB^2 = 2CB \cdot AB \cdot \cos \alpha = CB \cdot BD^2 = 2BD \cdot AB \cdot \cos \alpha$$



$$AD^2 = 2R^2(1 - \cos \alpha)$$

$$AB \cdot BD^2 = 2R^2(1 + \sin \alpha)$$

$$\begin{cases} CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \alpha \\ BD^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \alpha \\ (BD + BC)^2 = 2AC^2 \end{cases}$$

$$(1 + \tan \alpha)^2 BD^2 = 2AC^2$$

$$200^\circ - 90^\circ - \alpha = 240^\circ - \alpha$$

$$\cos(240^\circ - \alpha) = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\frac{CD}{DF} = \frac{AC}{BD}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 646 \rightarrow 546 \end{array}$$

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - \sqrt{2} AC \cdot CB$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} h \cdot CB$$

$$AC \cdot AB \cdot \cos \alpha = h \cdot BD$$

$$\frac{CB}{BD} = \tan \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{10}{26}$$

$$CF = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} BD$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ 50 \\ \hline 625 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \sqrt{2} AB = \frac{BD}{\cos \alpha}$$

$$BD = \cos \alpha$$

$$130 \cdot (1 + \sqrt{2} \cdot \frac{13}{24})$$