МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

? 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

? 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$. Ответ?

? 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

Ответ?

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

? 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

© МФТИ, 2020

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$$2\cos\frac{7x+3x}{2}\cos\frac{7x-3x}{2} - \sqrt{2}\left(\cos^2 5x - \sin^2 5x\right) = 2\sin\frac{7x+3x}{2}\cos\frac{7x-3x}{2}$$

$$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt{2}\cos^2 5x = 2\sin 5x\cos 2x - \sqrt{2}\sin^2 5x$$

$$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)(2\cos 2x - \sqrt{2}\cos 5x - \sqrt{2}\sin 5x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} (1)\ \cos 5x - \sin 5x = 0 \\ (2)\ 2\cos 2x - \sqrt{2}\cos 5x - \sqrt{2}\sin 5x = 0 \end{array}\right.$$

1) $\cos 5x - \sin 5x = 0$

$\sin 5x - \cos 5x = 0$

$\sqrt{2}\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$5x - \frac{\pi}{4} = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi n}{5} + \frac{\pi}{20},\ n \in \mathbb{Z}$

2) $2\cos 2x - \sqrt{2}\cos 5x - \sqrt{2}\sin 5x = 0$

$2\cos 2x = \sqrt{2}(\sin 5x + \cos 5x)$

$2\cos 2x = 2\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 2x = 0$

$\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

$\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$2\sin\frac{5x + \frac{\pi}{4} + 2x - \frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{5x + \frac{\pi}{4} - 2x + \frac{\pi}{2}}{2} = 0$$

$$\sin\left(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{8}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{8}\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{7}\pi n + \frac{\pi}{28},\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2}{3}\pi n + \frac{\pi}{12},\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

3) Убедимся, что найденные множества корней не пересекаются.

Действительно, уравнения

$\frac{\pi n}{5} + \frac{\pi}{20} = \frac{2}{7}\pi k + \frac{\pi}{28}$,

$\frac{\pi m}{5} + \frac{\pi}{20} = \frac{2}{3}\pi t + \frac{\pi}{12}$,

$\frac{2}{7}\pi l + \frac{\pi}{28} = \frac{2}{3}\pi s + \frac{\pi}{12}$

не имеют решений в целых числах.

Запишем ответ.

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}n,\ n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№3 $\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$

ОДЗ $y > 0$
$(-xy) > 0$
$\Rightarrow -x > 0$

$2y^2 + (-x-8)y - x^2 - 4x = 0$

Решим как квадратное уравнение относительно y

$D = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2$

$y = \frac{x+8 \pm (3x+8)}{4} = \left[\begin{array}{l} x+4 \\ -\frac{1}{2}x \end{array}\right.$

1) $y = x + 4 \Rightarrow x+4>0$

$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x^2-4x)} \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg(x+4)}$

$\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} x^{4\lg(x+4)} = (x+4)^{2\lg(x+4)} \cdot (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg(x+4)}$

$\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (-x)^{3\lg(x+4)} = 10^{2\lg^2(x+4) + \lg^2(-x)}$

$\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \lg\left((-x)^{3\lg(x+4)}\right) = 2\lg^2(x+4) + \lg^2(-x)$

$3\lg(x+4)\lg(-x) = 2\lg^2(x+4) + \lg^2(-x)$

Пусть $\lg(x+4) = a$, $\lg(-x) = b$

$2a^2 + b^2 - 3ab = 0$

$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$

$a = \frac{3b \pm b}{4} = \left[\begin{array}{l} b \\ \frac{1}{2}b \end{array}\right.$

• $a = b$

$\lg(x+4) = \lg(-x)$

$x + 4 = -x$

$2x = -4$

$x = -2$, $y = 2$ ОДЗ ✓

• $a = \frac{1}{2}b$

$\lg(x+4) = \frac{1}{2}\lg(-x) \Rightarrow 2\lg(x+4) = \lg(-x)$

$\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (x+4)^2 = -x$

$x^2 + 8x + 16 = -x$

$x^2 + 9x + 16 = 0$

$D = 81 - 64 = 17$

$x = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}$

$(x; y)$: $\left(\frac{-9-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)$ $y \notin$ ОДЗ

$\left(\frac{-9+\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$ ОДЗ ✓

2) $y = -\frac{1}{2}x$

$\left(\frac{x^4}{\frac{1}{4}x^2}\right)^{\lg(-\frac{1}{2}x)} = (-x)^{\lg(\frac{1}{2}x^2)}$

$\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (4x^2)^{\lg(-\frac{1}{2}x)} = (-x)^{\lg(-\frac{1}{2}x)} \cdot (-x)^{\lg(-x)} \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (-4x)^{\lg(-\frac{1}{2}x)} = 10^{\lg^2(-x)}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

$$(-4x)^{\lg(-\frac{1}{2}x)} = 10^{\lg^2(-x)}$$

$$\overset{ОДЗ}{\Longleftrightarrow} \lg\left((-4x)^{\lg(-\frac{1}{2}x)}\right) = \lg^2(-x)$$

$$\overset{ОДЗ}{\Longleftrightarrow} \lg(-\tfrac{1}{2}x)\cdot\lg(-4x) = \lg^2(-x)$$

$$\overset{ОДЗ}{\Longleftrightarrow} \left(\lg(-x)+\lg\tfrac{1}{2}\right)\left(\lg(-x)+\lg 4\right) = \lg^2(-x)$$

Пусть $\lg(-x) = a$

$$\left(a+\lg\tfrac{1}{2}\right)\left(a+\lg 4\right) = a^2$$

$$\cancel{a^2} + a\cdot(\lg 4+\lg\tfrac{1}{2}) + \lg 4\cdot\lg\tfrac{1}{2} = \cancel{a^2}$$

$$a(2\lg 2 - \cancel{2}\lg 2) = -2\lg 2\cdot(-\lg 2)$$

$$a = 2\lg 2 = \lg 4$$

$$\lg(-x) = \lg 4$$

$$-x = 4 \qquad \cancel{y=0}$$

$$x = -4$$

$$y = 2 \qquad \in ОДЗ$$

Ответ: $(-2;\ 2)$ $(-4;\ 2)$ $\left(\frac{-9+\sqrt{17}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$

№1 Разложим 16875 на простые множители:

$16875 = 3^3\cdot 5^4$

Тогда возможны два набора "3 восьми цифр, произведение которых $= 16875$: $(1;\ 3;\ 3;\ 3;\ 5;\ 5;\ 5;\ 5)$ или

$\cancel{(1;\ 3;}$

$(1;\ 1;\ 3;\ 9;\ 5;\ 5;\ 5;\ 5)$

(Каждая цифра должна быть представима в виде $3^a\cdot 5^b$, $0\le a\le 3$, $0\le b\le 4$; $a, b\in\mathbb{Z}$, сумма показателей степеней тройки равна трём, сумма показателей степеней пятёрки равна четырём).

Посчитаем количество чисел, состоящих из цифр первого набора. Зафиксируем положение пятёрок, разместим между ними (*) тройки. Всего есть $C_5^3 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$ возможностей это сделать.

[схема: ∨ 5 ∨ 5 ∨ 5 ∨ 5 ∨]

Мы разместили семь цифр, тогда единицу можем поставить на одно из восьми мест между ними.

∨ * ∨ * ∨ * ∨ * ∨ * ∨ * ∨ * ∨

Тогда всего чисел, задаваемых первым набором $8\cdot 10 = \underline{80}$

(*) между ними = между, до, или после (см. схему)

Посчитаем количество чисел, состоящих из цифр второго набора. Зафиксируем положение пятёрок, разместим единицы C_5^2 способами.

Разместили шесть цифр => семь доступных положений для ~~в~~ седьмой цифры девятки.

Разместили семь цифр => восемь ~~в~~ доступных положений для восьмой цифры тройки.

Тогда всего чисел, задаваемых вторым набором

$$C_5^2 \cdot 7 \cdot 8 = \frac{5!}{3!\,2!} \cdot 7 \cdot 8 = 10 \cdot 7 \cdot 8 = 560$$

Значит, всего чисел, описываемых в условии

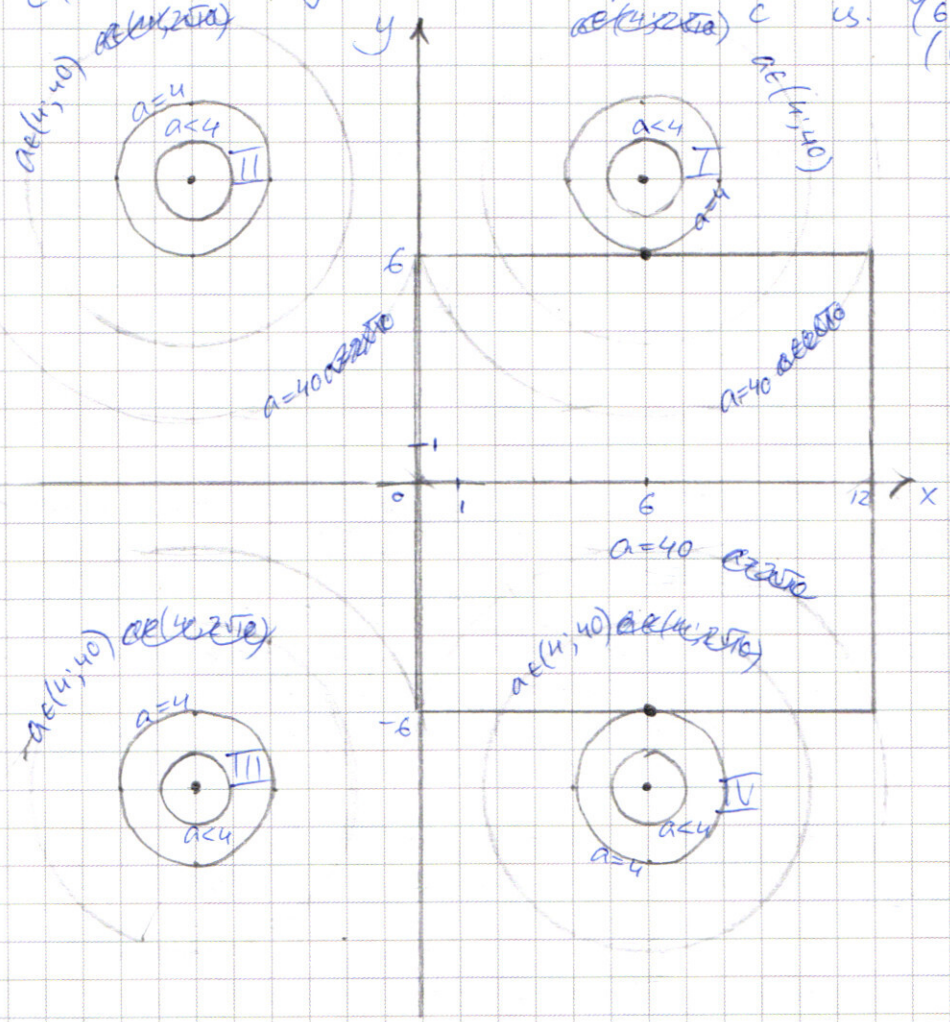
$$560 + 80 = 640$$

Ответ: 640

№5 $\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$

$\rightarrow$ квадрат с ц. $(6;0)$ и стороной 12

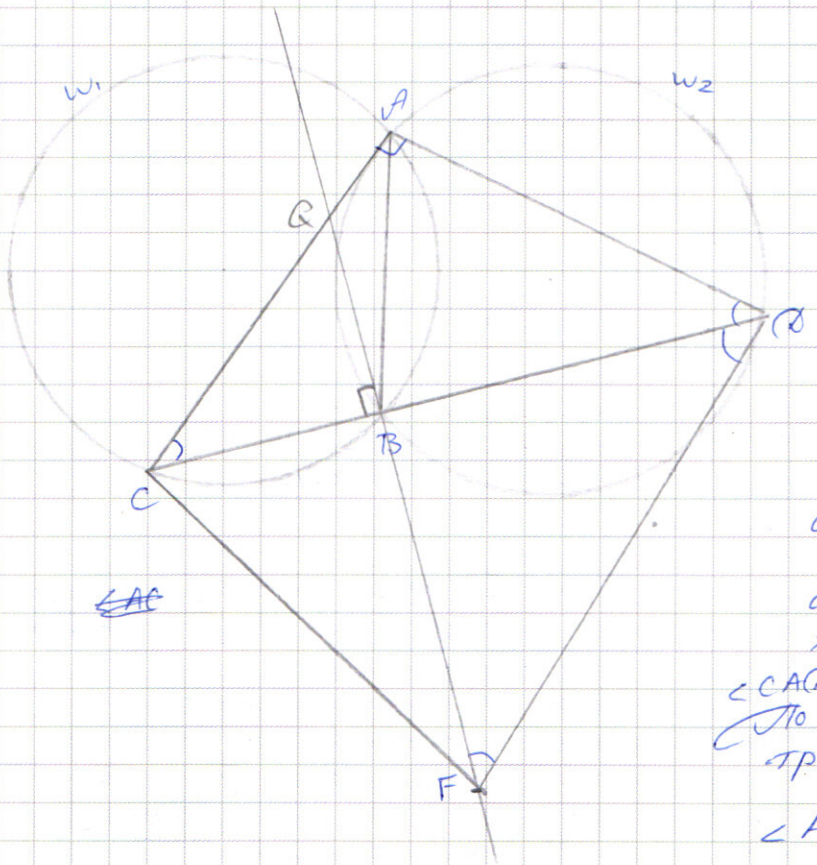
$\rightarrow$ фрагменты окружностей радиуса $\sqrt{a}$ с ц. $(6;8)$ $(-6;8)$ $(6;-8)$ $(-6;-8)$, ограниченные осями координат



№6

Решение

Дано
ω_1, ω_2
$r_1 = r_2 = 13$
$\omega_1 \cap \omega_2$ = т. A, B
т. C $\in \omega_1$
т. D $\in \omega_2$
$\angle CAD = 90°$



$\angle ADB = \angle ACB$, т.к. они вписаны в равные окружности ω_1, ω_2 и опираются на одну хорду AB.
$\angle CAD = 90°$ по условию
По т. о сумме углов треугольника ($\triangle CAD$):
$\angle ADB = \angle ACB = 45°$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~при $a<4$ решений нет~~
~~при $a=4$ два решения~~
~~при $a \in (4; 2\sqrt{10}]$ четыре решения~~
~~при $a \in (2\sqrt{10}; 10)$~~

Обозначим окружности I, II, III, IV по четвертям, в которых они расположены.

при $a<4$ решений нет
→ при $a=4$ ~~10~~ два решения (окр. I и IV касаются квадрата)
при $a \in (4; \cancel{2\sqrt{10}})$ четыре решения (окр. I и ~~II~~ IV каждая пересекает квадрат в двух точках).
~~при $a=2\sqrt{10}$ четыре решения (одна из точек пересечения окр. I с квадратом совпадает с точкой~~
при $a \in [40; 100)$ четыре решения (теперь окр. II и III тоже пересекают квадрат, но в силу симметрии (окр. I симметрична окр. II относительно Oy, окр. III симметрична окр. IV относительно Oy) точки пересечения окружностей I и ~~III~~ II с квадратом совпадают, точки пересечения окружностей III и IV с квадратом совпадают).

при $a=100$ два решения (все окружности пересекают квадрат в т. $(0;0)$, окружности I и IV пересекают квадрат в т. $(12;0)$.)

при $a>10$ решений нет ("полные" окружности пересекают квадрат, но это происходит в ~~не~~ четвертях, отличных от их соответственных номеров, что невозможно из-за модулей в исходном уравнении).

Ответ: $a=4$, $a=100$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81}-1)x \end{cases}$$

$$(3^{81}-1)(x-4) > 3^4(3^{x-4}-1)$$

$$85 + (3^{81}-1)x > 3^x + 4\cdot 3^{81}$$

$$(3^{81}-1)x > 3^x - 3^4 + 4\cdot 3^{81} - 4$$

$$(3^{81}-1)(x-4) > 3^x - 3^4$$

$$3^4(3^{x-4}-1)$$

$$x > 4$$

$$\log_3(\quad)$$

$$\log_3(x-4) + \log_3(3^{81}-1) > 4 + \log_3(3^{x-4}-1)$$

$$\log_3(x-4) - 4 > \log_3(3^{x-4}-1) - \log_3(3^{81}-1)$$

$$\log_3 \frac{x-4}{3^4} > \log_3 \frac{3^{x-4}-1}{3^{81}-1}$$

$$\cancel{\frac{x-4}{3^4}}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№7 $\begin{cases} y = 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$

Тогда $85 + (3^{81} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$

$(3^{81} - 1)(x - 4) > 3^x - 3^4$

$$\begin{cases} 2\cos 2x - \sqrt{2} = 0 \\ \cancel{\sin 5x - \cos 5x = 0} \\ \cos 5x - \sin 5x = 0 \end{cases}$$

$\sin 5x - \cos 5x$

$$\begin{cases} \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 5x - \cos 5x = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad 2x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n\in Z$$

$$x = \pm\frac{\pi}{8} + \pi n,\ n\in Z$$

$\sqrt{2}\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$5x - \frac{\pi}{4} = \pi n,\ n\in Z$

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5},\ n\in Z$

$(3^{81}-1)a > 3^4(3^a-1)$

If you are reading this, you should be proud of yourself

XOXO

③ $$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

ОДЗ

$\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

$y > 0$

$(-xy) > 0$

$\Rightarrow x < 0$

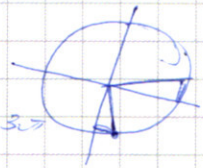
$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \frac{x^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = \frac{x^{4\lg y}}{10^{2\lg^2 y}}$

$y = 10^{\lg y}$

$(-x)^{\lg(-xy)} \overset{ОДЗ}{=} (-x)^{\lg(-x)+\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}\cdot(-x)^{\lg y} = 10^{\lg^2(-x)}\cdot(-x)^{\lg y}$

$\frac{x^{4\lg y}}{10^{2\lg^2 y}} = 10^{\lg^2(-x)}\cdot(-x)^{\lg y}$

$\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{4} = 3\pi$



$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$2y^2 + y(-x-8) - x^2 - 4x = 0$

$D = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2$

$y = \frac{x+8 \pm (3x+8)}{4} = \begin{cases} x+4 \\ -\frac{1}{2}x \end{cases}$

1) $y = x+4$

$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x^2-4x)} \overset{ОДЗ}{=} (-x)^{\lg(x+4)}\cdot(-x)^{\lg(-x)}$

$x^{4\lg(x+4)} = (x+4)^{2\lg(x+4)}\cdot(-x)^{\lg(x+4)}\cdot(-x)^{\lg(-x)}\cdot 10^{\lg^2(-x)}$

$\cancel{x^{4\lg(x+4)}\cdot 10^{\lg^2 x}\cdot x^{\lg 4}} = \cancel{10^{2\lg^2(x+4)}\cdot(x+4)^{2\lg x}\cdot(x+4)^{2\lg 4}\cdot(-x)^{\lg(x+4)}\cdot 10^{\lg^2(-x)}}$

$\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left((-x)^{3\lg(x+4)} = 10^{2\lg^2(x+4)+\lg^2(-x)}\right)\lg$

$3\lg(x+4)\lg(-x) = 2\lg^2(x+4) + \lg^2(-x)$

$2a^2 + b^2 - 3ab = 0$

$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$

$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$

$a = \frac{3b \pm b}{4} = \begin{cases} b \\ \frac{1}{2}b \end{cases}$

$a = b$ $\quad \lg(x+4) = \lg(-x)$

$x+4 = -x$

$2x = -4 \quad x = -2$

$a = \frac{1}{2}b$

$\lg(x+4) = \frac{1}{2}\lg(-x)$

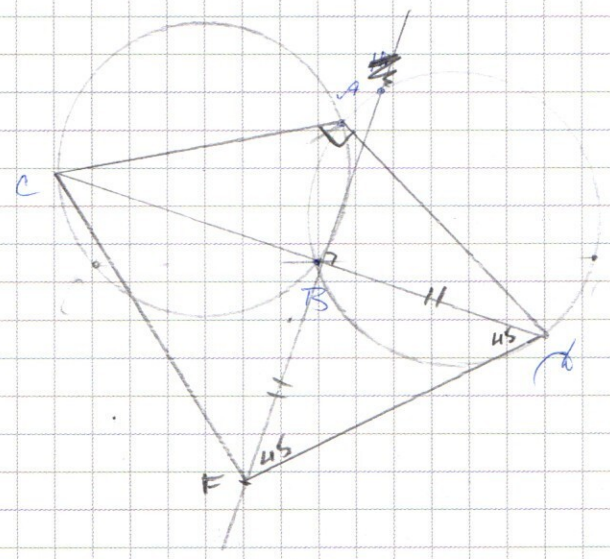
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



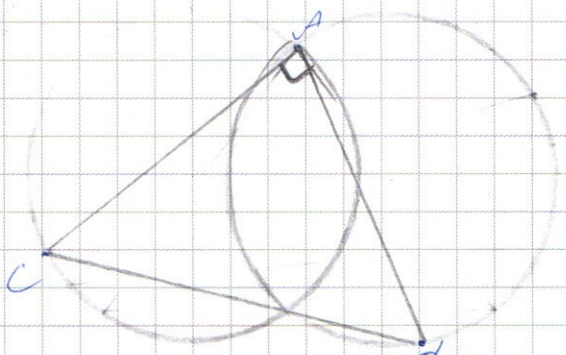
$B \in CD$

$\angle CAD = 90^\circ$

$BF = BD$

$z = 13$

Найти CF



① 16875 | 5
3375 | 5
675 | 5
135 | 5
27 | 3
9 | 3
3 | 3
1

$25 \times 25 = 125$, $125 + 50 = 625$, $625 \times 27 = 4375 + 1250 = 16875$

$16875 = 3^3 \cdot 5^4$

$3+4=7$

$7+1=8$

(1)

восьмизн. числа

* * * * * * * *

| ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |

✓ 5 ✓ 5 ✓ 5 ✓ 5 ✓

$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$

$10 \cdot 8 = 80$?

?!?

② $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$-\sqrt{2}\cos 10x = -\sqrt{2}\cos 3x\cos 7x + \sqrt{2}\sin 3x \sin 7x$

$\cos 7x - \sqrt{2}\cos 3x \cos 7x + \cos 3x = \sin 7x - \sqrt{2}\sin 3x \sin 7x + \sin 3x$

$a - \sqrt{2}ab + b$

$2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2\sin 5x \cos 2x$

$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt{2}\cos^2 5x = 2\sin 5x \cos 2x - \sqrt{2}\sin^2 5x$

$\cos 5x(2\cos 2x - \sqrt{2}) = \sin 5x(2\cos 2x - \sqrt{2})$

$(2\cos 2x - \sqrt{2})(\cos 5x - \sin 5x) = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x, y \in \mathbb{Z}$ количество пар (x, y)

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81}-1)x \end{cases}$$

$3^x + 4\cdot 3^{81} < 85 + (3^{81}-1)x$

$(3^{81}-1)x > 3^x + 4\cdot 3^{81} - 3^4 - 4$

$(3^{81}-1)x > 3^x - 3^4 + 4(3^{81}-1)$

$(3^{81}-1)(x-4) > 3^x - 3^4$

$(3^{81}-1)(x-4) > 0$

$3^x - 3^4 > 0$

$(x-4) > 0$

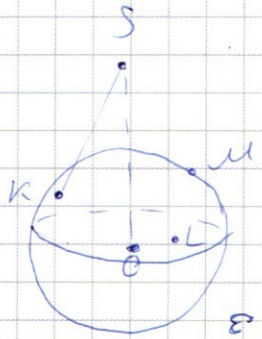
$x-4>0 \Rightarrow$ оба больше нуля

1) $x > 4$

$3^x + 4\cdot 3^{81} > 3^4 + 4\cdot 3^{81}$

$85 + (3^{81}-1)x > 3^4 + 4\cdot 3^{81}$

$(3^{81}-1)x > 3^4 + 4\cdot 3^{81} - 3^4 - 4 = 4(3^{81}-1)$



$16875 = 5^4 \cdot 3^3$

а) 5 5 5 5 3 3 3 1

б) 5 5 5 5 9 3 1 1

а) . * * * . $C_4^3 \cdot C_5^4 = 4\cdot 5\cdot 9 = 180$

б): * * * * * . $C_6^2 \cdot 8\cdot 9 = 15\cdot 8\cdot 9 = 1080$

$20 + 120\cdot 9 = 1100$

$1100 + 180 = 1280$

$\frac{2}{7}n + \frac{2}{3}k = \frac{1}{28} + \frac{1}{12} = \frac{2}{3}k - \frac{1}{28}$

$\frac{2}{7}n + \frac{2}{3}k = \frac{1}{28} + \frac{1}{12}$

$\frac{2}{7}n = \frac{2}{3}k + \frac{1}{12} - \frac{1}{28} = \frac{2}{3}k - \frac{1}{28}$

$9n = 14k - 1$

$\frac{2}{7}n + \frac{5}{4} = \frac{2}{3}k + \frac{1}{20}$

$\frac{2}{7}n = \frac{1}{20} - \frac{5}{4} = \frac{1}{20} - \frac{25}{4} = \frac{2}{3}k - \frac{5}{4}$

$20n - 14k = 1$

$12n + 3 = 14k + 5$

$\frac{2}{7}n + \frac{3}{4} = \frac{2}{3}k + \frac{5}{12}$

$91 - 91 + 91 - 8 + 8$

$91 - 8 + 4 - 4 + 8$

$\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{6}$ $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

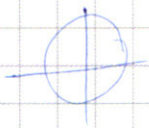
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$x+8+3x+8 = 4x+16$

$x+4$

$x + \cancel{8} - 3x - \cancel{8} = -2x$

$\frac{-2x}{4} = -\frac{x}{2}$



Ответ

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$

$\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} =$

$\cancel{= 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - 2\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\cos^2\frac{\beta}{2}\right) =}$

$\cancel{= 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - 2 + 2\cos}$

$= 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cancel{\cos^2\frac{\beta}{2}} - 2\left(\cancel{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)\sin^2\frac{\beta}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 + 1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2} =$

$= \cos\alpha + \cancel{\sin\beta}\cos\beta$

$\cos 5x(2\cos 2x - \sqrt{2}\cos 5x) = \sin 5x(2\cos 2x - \sqrt{2}\sin 5x)$

$2\cos 2x - \sqrt{2}\cos 5x - \sqrt{2}\sin 5x = 0$

$\cancel{4\cos^2 4x}$

$4\cos^2 x - 2 - \sqrt{2}\cos(4x+x) - \sqrt{2}\sin(5x+x) = 0$

$\cos 5x = \cos(4x+x) = \cos 4x\cos x - \sin 4x\sin x =$

$= (2\cos^2 2x - 1)\cos x - 2\sin 2x\cos 2x\sin x =$

$= (2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1)\cos x - 4\sin^2 x\cos x(2\cos^2 x - 1) =$

$= \cancel{2}\,8\cos^4 x + 2 - 8\cos^2 x - 1$

$\cancel{\cos 3x = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x = 2\cos^3 x - \cos x - \sin^2 x\cos x =}$

$\cancel{= 2\cos^3 x - \cos x(1-\sin^2 x)(2-\cos^2 x) =}$

$\cancel{= 4\cos^3 x -}$

$\cos 3x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cancel{\sin^2 x}\cos x(1-\cos^2 x) =$

$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\cancel{\sin 3x = \sin 2x\sin x + \cos 2x\cos x = 2\sin^2 x\cos x + (1-2\sin^2 x)\cos x =}$

$\sin 3x = \sin 2x\cos x + \sin x\cos 2x = 2\sin x\cos^2 x + \sin x(2\cos^2 x - 1) =$

$= \sin x(4\cos^2 x - 1) = \sin x(3 - 4\sin^2 x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$4 - 4\sin^2 x$

$\cos 5x = \cos 2x\cos 3x - \sin 2x\sin 3x = (2\cos^2 x - 1)(4\cos^3 x - 3\cos x) -$

$- 2\sin x\cos x(3\sin x - 4\sin^3 x) = 8\cos^5 x - 4\cos^3 x - 6\cos^3 x + 3\cos x -$

$\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$ $- 6\sin^2 x\cos x + 8\sin^4 x\cos x$

$2\cos 2x = 2\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{\pi}{8}\cdot\frac{2}{3}$

$4\frac{\pi}{8}\cdot\frac{2}{7} = \frac{1}{28}$ $\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

$\sin\frac{5x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + 2x}{2}\cos\frac{5x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - 2x}{2} = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10^{\lg(x+4)} = 10^{\frac{1}{2}\lg(-x)} = \left(10^{\lg(-x)}\right)^{\frac{1}{2}}$

$(x+4) = \sqrt{-x}$

$-x - \sqrt{-x} + 4 = 0$

$D = 1 + 16 = 17$

$-x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$

?

(5) равно два решения

$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$

$\cancel{|y-x+6| + |y+x-6| = 12}$

$\cancel{x = y+6}$

$x-6-y=0$

$y = x-6$

$(x+6)^2 + (y-8)^2 = a$

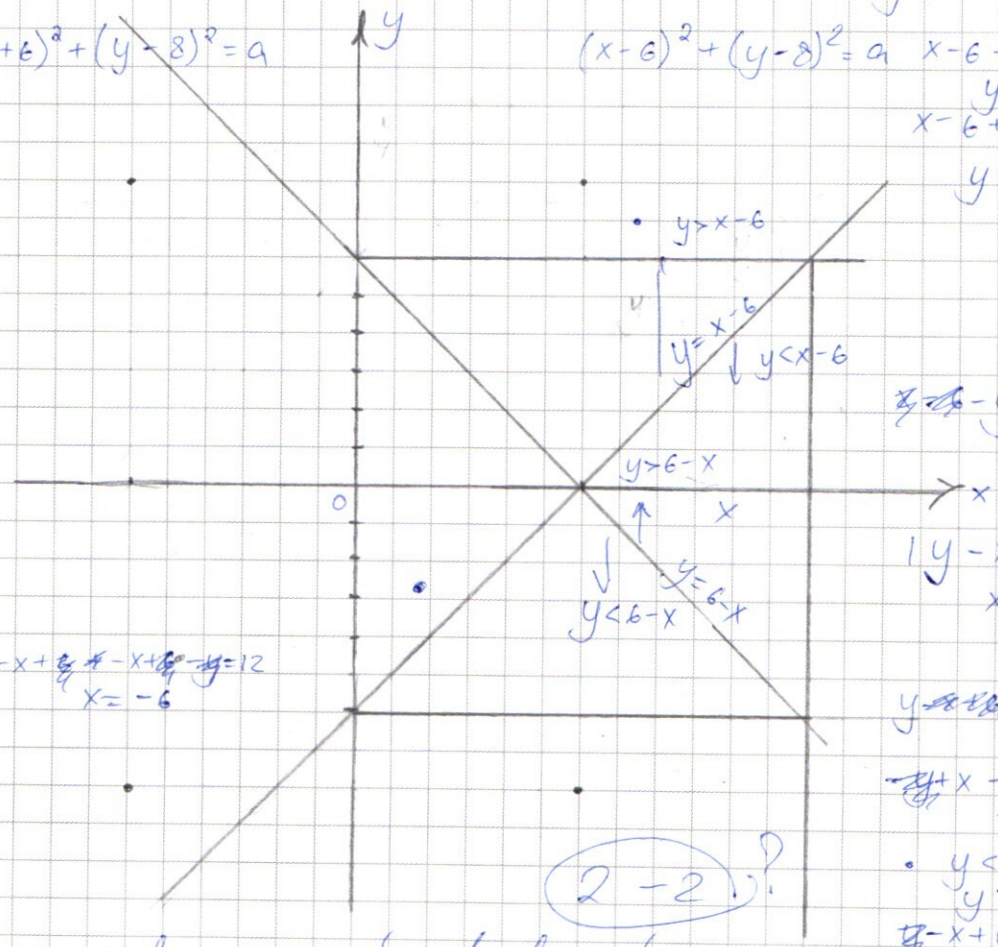
$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a$

$x-6-y=0$

$y = x-6$

$x-6+y=0$

$y = 6-x$



$\cancel{y-6} - y + \cancel{y} + 6 - y = 12$

$y = -6$

$|y-x+6| + |y+x-6| = 12$

$x-6 \qquad 6-x$

$\cancel{y} - x + \cancel{6} + x - \cancel{6} - \cancel{y} = 12$

$x = -6$

$y + y = 12$

$y = 6$

$-x - 6 + x - 6 = 12$

$x = 12$

• $y < 6-x$

$y > x-6$

$-x + 6 - x + 6 = 12$

$x = 0$

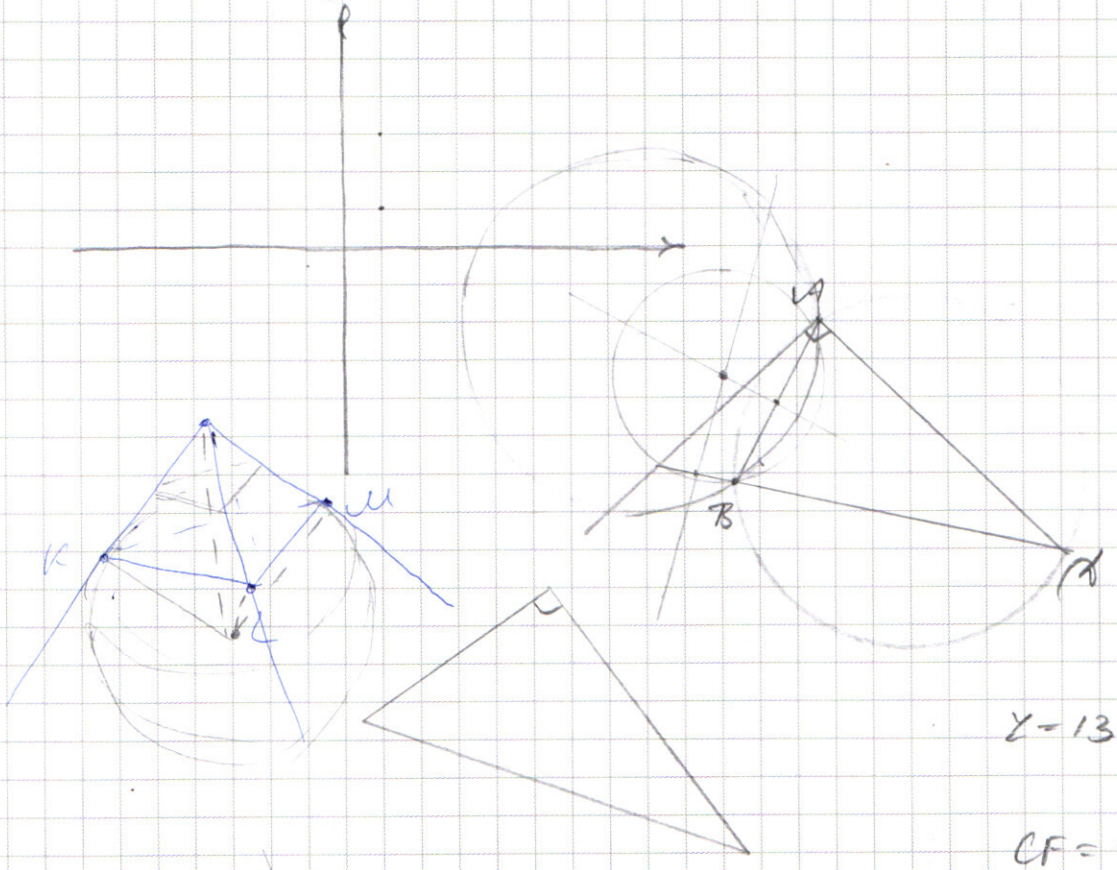
2 − 2 ?

количество решений в верхней полуплоскости равно количеству решений в нижней полуплоскости, поскольку квадрат симметричен отн. Ox

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

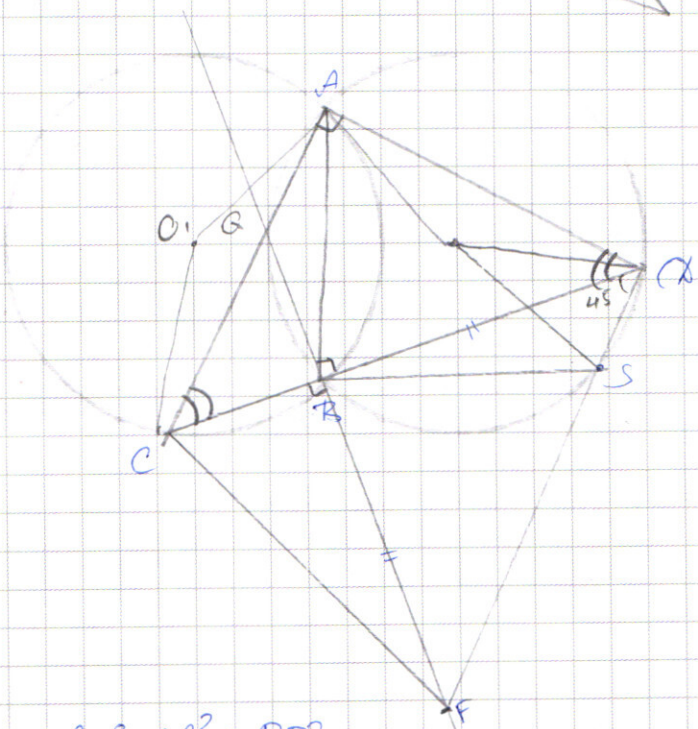
Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$(|x|-1)^2 + (|y|-1)^2 = 4$



$x = 13$

$CF = ?$



пусть $\angle TBK$ и $\angle AC = \angle AQ$
~~[illegible]~~
если они перес.

$\triangle BQF$ $BQ = BF$

$\angle Q = 45^\circ$ $QS \cap w_1$

$\Rightarrow$ $\triangle BCS$ x x

$BS = x\sqrt{2} = \sqrt{26}$

$\angle ACB = \angle AQB$
(окр. равны, хорда)

$\frac{AB}{\sin} = \sqrt{26}$

$CF^2 = CB^2 + BF^2 = BQ^2 + BQ^2 = QQ^2 - BQ^2 + BQ^2 =$
$= QQ^2 = AQ^2 + AQ^2$

$\frac{AB}{\sqrt{2}} = \sqrt{13}$

$AB = \sqrt{26}$

$\frac{2 \cdot \sqrt{26} \cdot 13}{\sqrt{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)