

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

Решение: разложим 16875 на простые множители:
 $16875 = 5^4 \cdot 3^3$. ~~В~~, а-ко в нашем 8-значном числе
возможны цифры 5, 9 (= 3^2), 3 и 1. Из них
обязательно четыре 5, одна 3 и одна 1, т.к. цифр
восемь, а простых множ-й семь, а 9 может заменить две 3.
Итак, четыре 5 могут быть расставлены на восемь мест
 C_8^4 способами. $C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$. Для оставшихся четырех
мест возможны два случая:

- 1) 3.9.1.1 кол-во способов $C_1 = 4 \cdot 3 = 12$.
- 2) 3.3.3.1 кол-во способов $C_2 = 4$ (всего 4 способа поставить
одну 1 на одно из четырех мест).

Итого: $C = C_8^4 \cdot C_1 + C_8^4 \cdot C_2 = 70(12 + 4) = 1120$.

Ответ: 42.

N2.5

$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$ 2 решения. а-?

$[(x-6)-y]^2 + [(x-6)+y]^2 = a$

Построим график 1-го ур-я: $\begin{cases} x-6-y=0 \\ x-6+y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = x-6 \\ y = -x+6 \end{cases}$

Возможны 4 случая:

1) $\begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq -x+6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y \leq x-6 \\ y < -x+6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y > x-6 \\ y \leq -x+6 \end{cases}$

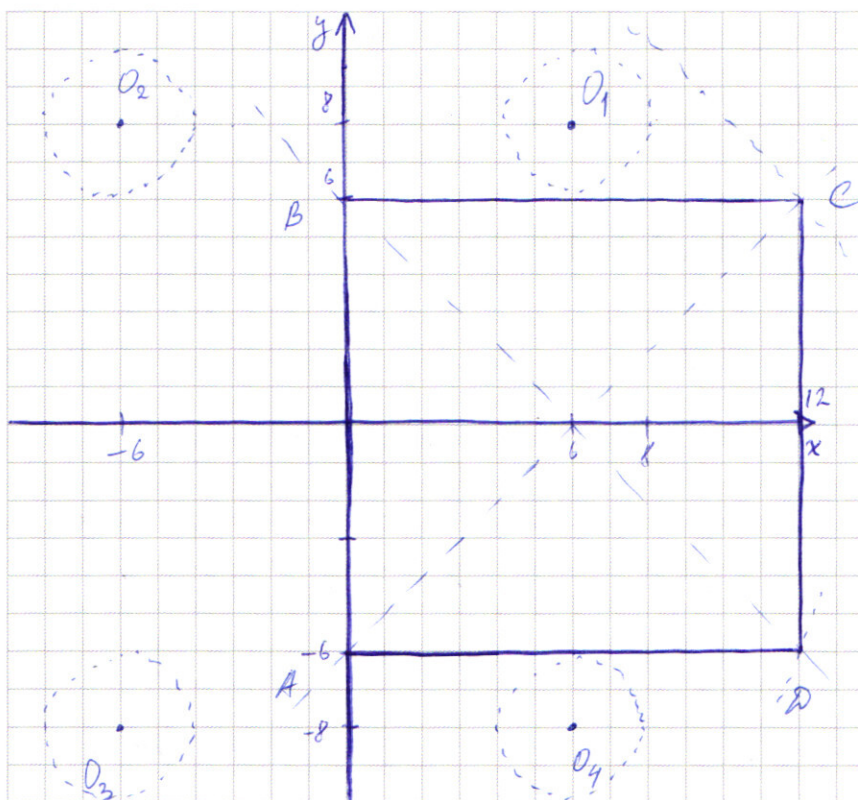
4) $\begin{cases} y > x-6 \\ y \geq -x+6 \end{cases}$

$x=12$

$y=-6$

$x=0$

$y=6$



2-е ур-е - 4 окр
с центрами $O(6;8)$,
 $O_2(-6;8)$, $O_3(-6;-8)$,
 $O_4(6;-8)$ и радиусом
 $R = \sqrt{a}$

По рисунку видно,
что 2 решения систе-
мы имеет ~~тогда~~ тогда,
когда окружности с
центрами O_1 и O_4 каса-
ются квадрата:

$$R = 2 = \sqrt{a}$$

↓

Второй случай, когда $R = O_3C = O_2D$ $a = 4$

Теперь 1 и 4 окр-и не пересекаются с ABCD, а 1 и 3
каждая в 1 точке, а остальной квадрат будет состоять из точек
1 и 3 окр-ий

$$R = \sqrt{18^2 + 12^2} = \sqrt{18^2 + 14^2} = 2\sqrt{130} = \sqrt{a}$$

$$a = 520$$

Ответ: $a = \{4\}, \{520\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

Дано: K, L, M - точки кас.-я.

$$S(ABC) = 9; S(A_1B_1C_1) = 4.$$

$$(ABC), (A_1B_1C_1) \perp SO$$

O - центр впис. сферы.

Найти: $\angle KSO, S(KML)$

Решение: $(ABC), (A_1B_1C_1) \perp SO$
по условию

$$ABC \parallel A_1B_1C_1$$

и

По теор. Фалеса, $AB \parallel A_1B_1, BC \parallel B_1C_1, AC \parallel A_1C_1 \Rightarrow$ ввиду μ -ва соответствующих углов,

Коэф. подобия:

$$k^2 = \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{9}{4} \Rightarrow k_1 = \frac{3}{2}.$$

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (или
элементарно центральное проектирование др др).

С такими же коэф. относятся $\triangle AQC \sim \triangle A_1Q_1C_1$ (по этой же причине
и с такими же относятся $\triangle SQC \sim \triangle S_1Q_1C_1$ (I)).

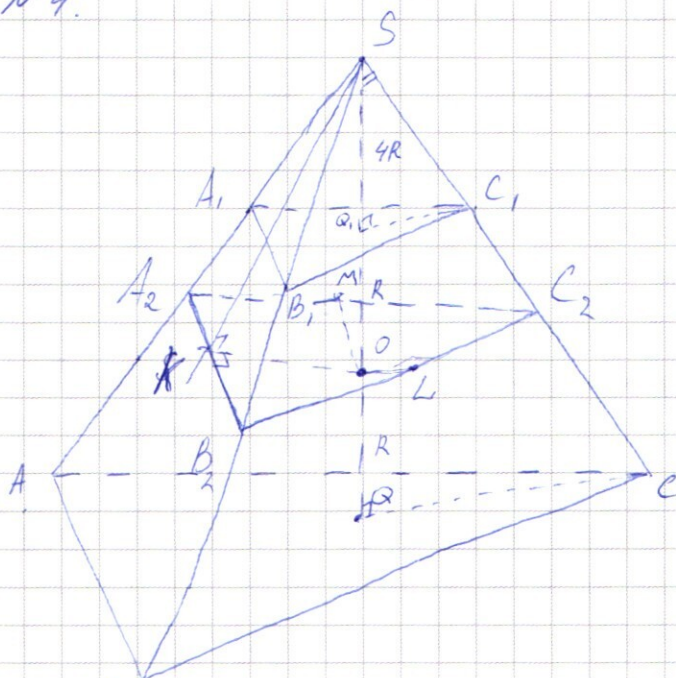
$$\text{Значит } \frac{SQ}{SQ_1} = \frac{3}{2} = \frac{SQ + Q_1O}{SQ_1} = 1 + \frac{Q_1O}{SQ_1} \Rightarrow \frac{Q_1O}{SQ_1} = \frac{1}{2}$$

П.к. сфера кас. ABC и $A_1B_1C_1$ по условию, то $Q_1O = 2R$, где
 R - радиус сферы. Тогда $SQ_1 = 4R$.

П.к. SK - касан., то $KO = R$. Тогда $\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{KO}{SQ + Q_1O} = \frac{R}{4R + R} = \frac{1}{5}$.

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5} = \angle LSO = \angle MSO \quad (\text{п.к. } OL = OM = R, SO - \text{общ.})$$

Получим, как расщепляется сегмент. Имеем 3 равных прямоуг.
треуг. $\triangle KSO, \triangle LSO, \triangle MSO$. с общей гипотенузой SO .

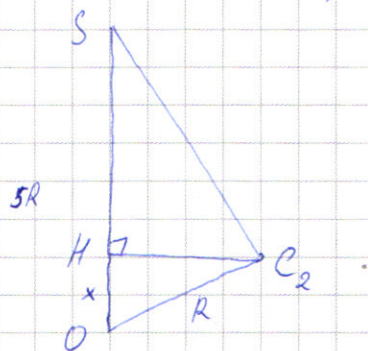


Очевидно, что если мы в каждом опустим высоты на SO , то все они придут в одну некоторую точку H . (на рисунке её нет)

$$SO \perp (KH, LH, MH) \Rightarrow SO \perp (KLM) \Rightarrow (KLM) \parallel (ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$$

и ~~ж~~ треугольник, содержащий K, L, M подобен $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ согласно рассуждениям, подобным аксиоматическим тем, что изометричны. Кроме того, $\triangle A_2SH \sim \triangle C_2SH \sim \triangle C_1SQ_1 \sim \triangle CSQ$ (I).

$$k_2 = \frac{SH}{SQ_1}$$



$$SQ_1 = 4R; \quad SH =$$

$$\text{Найдём } SH. \quad C_2O = \sqrt{HO \cdot SO} = \sqrt{x \cdot 5R}$$

$$R = \sqrt{(5R - SH) \cdot 5R}$$

$$R^2 = (5R - SH)^2 \cdot 25R^2$$

$$R = \sqrt{5R \cdot x}$$

$$R^2 = 5Rx \Rightarrow x = \frac{R}{5} = OH \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SH = 5R - \frac{R}{5} = \frac{24R}{5} \Rightarrow$$

$$k_2 = \frac{24R}{5 \cdot 4R} = \frac{6}{5} = \frac{SH}{SQ_1} = \frac{C_2H}{C_1Q_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{с теми же коэф. подобия } \triangle A_2HC_2 \text{ и } \triangle A_1Q_1C_1 \Rightarrow$$

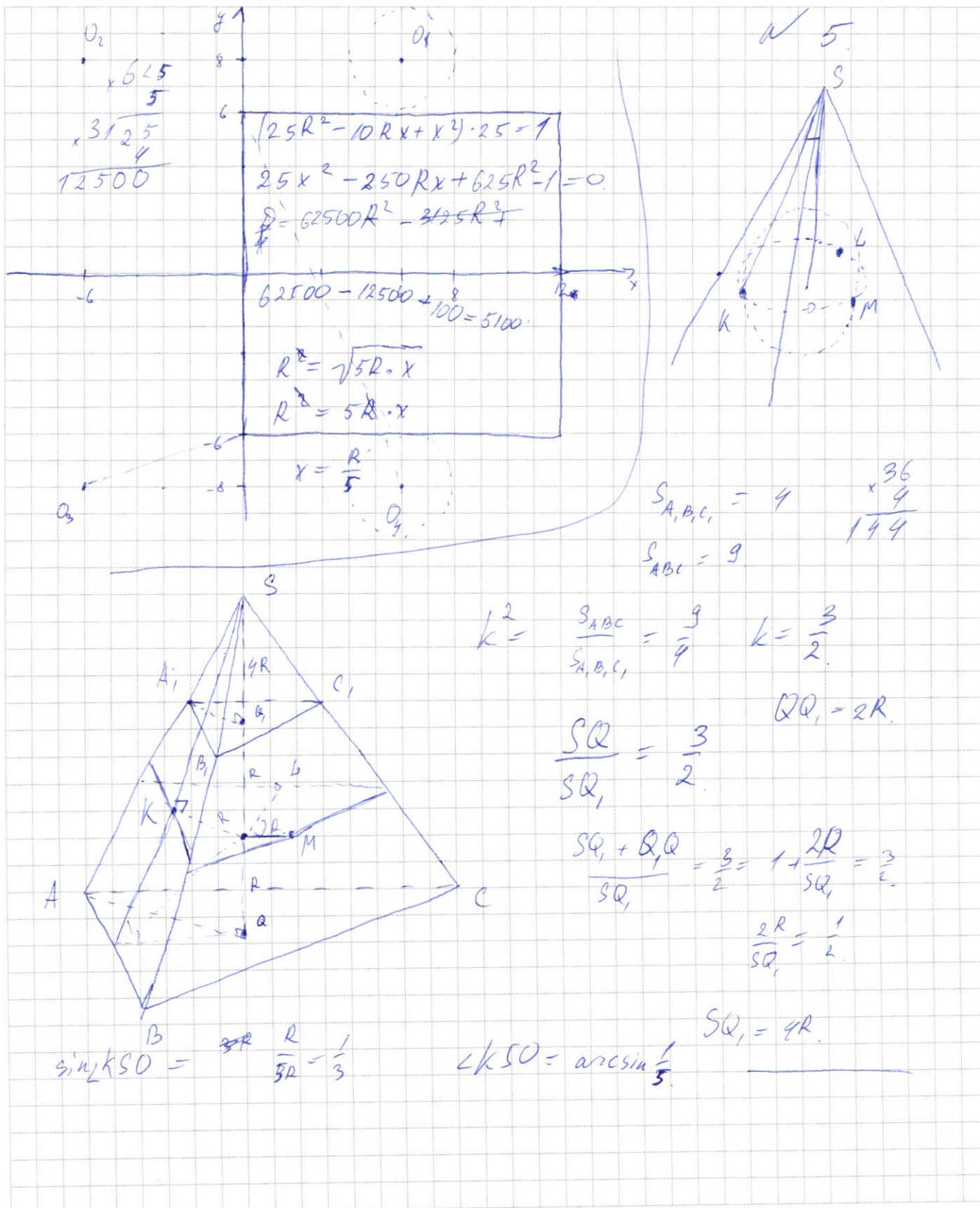
$$\Rightarrow \text{с теми же коэф. подобия } \triangle A_2B_2C_2 \text{ и } \triangle A_1B_1C_1$$

(оба подобия следуют из рав-ва углов и-у соотв. парал. прямых)

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_2B_2C_2}} = \frac{1}{k_2^2} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{A_2B_2C_2} = 24 \cdot \frac{144}{25}$$

$$\text{Ответ: } S_{A_2B_2C_2} = S_{KLM} = \frac{144}{25}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



N 2.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x.$$

$$2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2\sin 5x \cos 2x \quad | : \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - (\cos 5x + \sin 5x)(\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)(\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 \\ \sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} 5x = 1 \\ \sqrt{2} \cos 2x = \sqrt{2} \sin(5x + \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 5x = \arctg 1 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \cos 2x = \cos(5x + \frac{5\pi}{4}) \end{cases}$$

$\Leftarrow$

$$2x + \frac{2\pi k}{2} = 5x + \frac{5\pi}{4}$$

$\Downarrow$

$$3x = \frac{2\pi k}{2} - \frac{5\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5} \\ x = \frac{2\pi k}{3} - \frac{5\pi}{12} \\ n, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}; \quad x = -\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-\sqrt{2} \sin 5x \cos 2x + \sqrt{2} \cos 5x \cos 2x - \cos^2 5x + \sin^2 5x = 0.$$

$$\cos^2 5x (\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x) - \sin 5x (\sqrt{2} \cos 2x - \sin 5x) = 0.$$

$$2 \cos^2 5x - 1 = \cos 10x + 1$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x. \quad | : \cos^2 5x$$

$$2 \cos^2 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x \cdot \cos 5x = 2 \sin 10x \cos 2x.$$

$$(\cos 10x + 1) \cos 2x$$

$$\cos 10x \cos 2x + \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x \cdot \cos 5x = \sin 10x \cos 2x.$$

$$\cos 10x (\cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x) = (\sin 10x - 1) \cos 2x.$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\begin{cases} 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \\ y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$\sqrt{3}$

$$(2y^2 - 8y + 4) - 4 + (x^2 + 4x + 4) - 4 - xy = 0$$

$$(\sqrt{2}y - 2)^2 - (x + 2)^2 - xy = 0.$$

$$\frac{x^{\lg y}}{y^{2 \lg y}} = (-x)^{\lg(-xy)} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$\frac{x^{\lg y}}{(-x)^{\lg y} \cdot y^{2 \lg y}} = (-x)^{\lg(-x)}$$

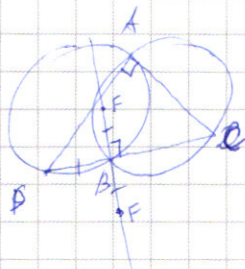
$$\frac{(-x)^{3 \lg y}}{y^{2 \lg y}} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$\frac{(-x)^{3 \lg y}}{(-x)^{\lg(-x)}} = y^{2 \lg y}$$

$$\left(\frac{x^4}{(-x)y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$$

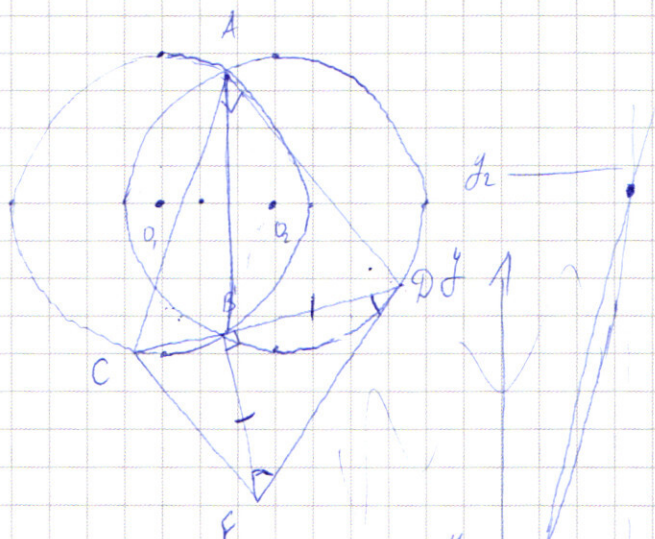
$$\left(\frac{-x^3}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \Rightarrow$$

$$-x^3 = (-x)^3 \quad x < 0.$$



№6.

CF-9



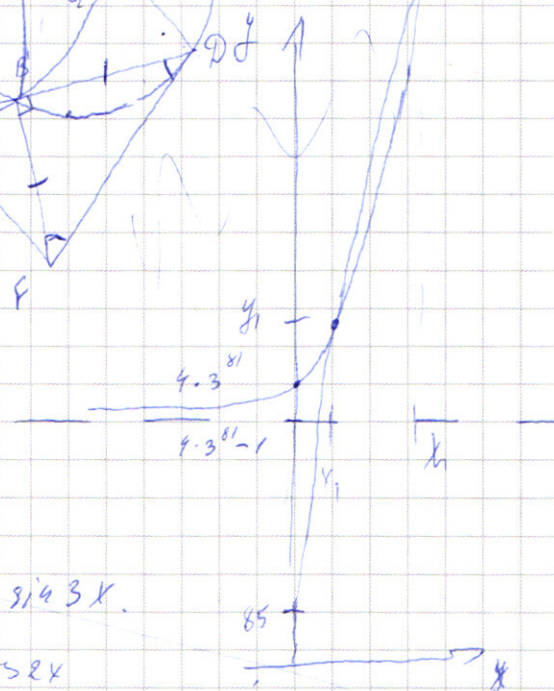
90 + 90

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)/x \end{cases}$$

$$y = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y = 85 + (3^{81} - 1)/x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)/x$$



$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x.$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x \cdot \sin \left(5x + \frac{3\pi}{4} \right) = \cos 10x.$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 5x + \sin^2 5x - \sqrt{2} \sin 5x \cos 2x = 0.$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) + (\cos 5x - \sin 5x) (\sin 5x + \cos 5x) = 0.$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (\sqrt{2} \cos 2x - \sin 5x - \cos 5x) = 0.$$

$$\cos 5x = \sin 5x$$

$$\tan 5x = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}.$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = \sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2} \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = \sqrt{2} \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right).$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

abcdefgh

$$abcdefgh = 16875.$$

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1$$

XXXX

$$C_8^4 = 0$$

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 70$$

$$1) \quad 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

$$2) \quad 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$$

$$4$$

$$70 \cdot 12 + 70 \cdot 4 = 70 \cdot 16$$

~~~~~  
~~~~~  
~~~~~  
N/2



$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x - \sin 7x = \sqrt{2} \sin(7x + \varphi_1), \quad \sin \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \varphi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(7x + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\varphi_1 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2} \sin\left(7x + \frac{3\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \sin\left(5x + \frac{3\pi}{4}\right) \cos(2x) = \cos 10x = 0$$

$$2 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x \right) \cos 2x = \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

$$(-x)^{3/8} y^{-1/8} = y^{2/8} y$$

$$(-x)^{1/8} \frac{y^3}{x} = y^{2/8} y$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{1/8} = (-x)^{1/8} y^{1/8} \quad \begin{matrix} x < 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

$$\frac{x^{4/8}}{y^{2/8}} = (-x)^{1/8} \cdot (-x)^{1/8}$$

$$\left(\frac{x^3}{y^2(-x)}\right)^{1/8} = (-x)^{1/8} \quad \frac{(-x)^{3/8} y}{(-x)^{1/8} y} = y^{2/8} y$$

$$\frac{(-x)^{3/8} y}{y^{2/8}} = (-x)^{1/8} y^{2/8} \quad (-x)^{1/8} \frac{y^3}{x} = y^{2/8} y$$

$$(-x)^{3/8} y^{1/8} \cdot (-x)^{-1/8} = y^{2/8} y$$

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases}$$

I)  $\begin{cases} x \geq 6+y \\ x \geq 6-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x-6 \\ y \leq -x+6 \end{cases}$

$$x-6-y + x-6+y = 12.$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

II)  $\begin{cases} x \geq 6+y \\ x < 6-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x-6 \\ y < -x+6 \end{cases}$

$$x-6-y - x+6-y = 12.$$

$$y = -6.$$

III)  $\begin{cases} x < 6+y \\ x < 6-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > x-6 \\ y \leq -x+6 \end{cases}$

$$-x+6+y - x+6-y = 12$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

$$R = \sqrt{a} = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10} = \sqrt{40}.$$

$$18 \quad 14 \quad \sqrt{6^2 + 12^2}$$

$$9 \quad 7$$

$$\sqrt{81 + 49} = \sqrt{130}$$

$$\begin{array}{r} \times 130 \\ 9 \\ \hline 520 \end{array}$$

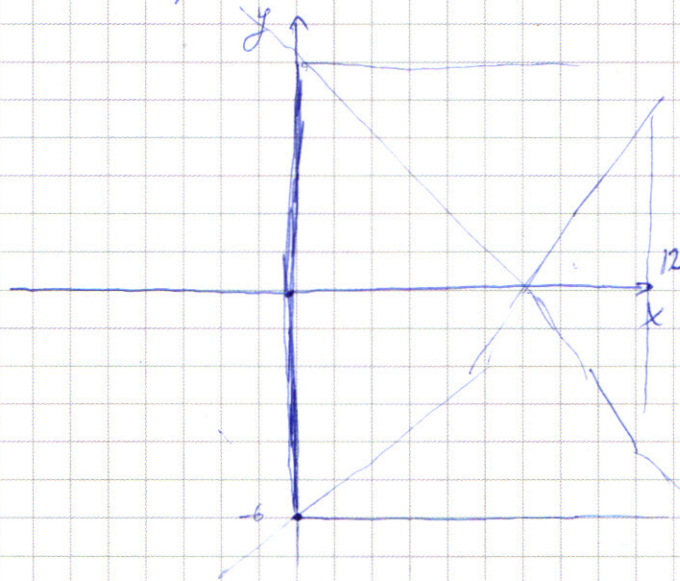
$$Q(6; 8)$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a. \quad R = \sqrt{a}.$$

2/sem.



IV)  $\begin{cases} x < 6+y \\ x \geq 6-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > x-6 \\ y > -x+6 \end{cases}$

$$-x+6+y + x-6+y = 12.$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a. \quad R = \sqrt{a}.$$