

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

~~1~~

- ~~1~~ [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

~~2~~

- ~~2~~ [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

~~3~~

- ~~3~~ [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

~~5~~

- ~~5~~ [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

~~6~~

- ~~6~~ [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

~~6~~

- ~~6~~ Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{2} \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$1) \cos 7x + \cos 3x = 2 \cos \frac{7x+3x}{2} \cos \frac{7x-3x}{2} = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$2) \sin 7x + \sin 3x = 2 \sin \frac{7x+3x}{2} \cos \frac{7x-3x}{2} = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\downarrow$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cancel{2 \cos 2x \cos 5x}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) \cdot (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$3) \cos 5x + \sin 5x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 5x \right) + \sin 5x =$$

$$= 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - 5x + 5x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - 5x - 5x}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right)$$

$$4) \cos 5x - \sin 5x = \cos 5x - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 5x \right) =$$

$$= -2 \sin \frac{5x + \frac{\pi}{2} - 5x}{2} \sin \frac{5x - \frac{\pi}{2} + 5x}{2} =$$

$$= -2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

Получаем:

$$\cancel{2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right)} \cdot \cancel{(2 \cos 2x - \sqrt{2} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right))} = 0$$

$$\cancel{2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right)}$$

$$\left(-2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \right) (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right)) = 0$$

$$\left(-2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \right) (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cdot 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right)) = 0$$

$$-\sqrt{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) (2 (\cos 2x - \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right))) = 0$$

$$5) \cos 2x - \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = -2 \sin \frac{2x + \frac{\pi}{4} - 5x}{2} \sin \frac{2x - \frac{\pi}{4} + 5x}{2} =$$

$$= -2 \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \right) \sin \left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} \right)$$

$$\text{Тогда: } -\sqrt{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot 2 \left(-2 \left(\sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \right) \sin \left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right) \right) = 0$$

$$\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$1) \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad 2) \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) = 0$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pi n$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi k$$

$$\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} - \pi k \quad | \cdot 2$$

$$3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi m$$

$$\frac{7x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi m \quad | \cdot 2$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi m}{7}, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}, \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi m}{7}, \text{ где } n, k, m \in \mathbb{Z}$

$$\textcircled{3} \quad \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad (1)$$

Разделим (2) на
множителем

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad (2) \quad 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

Заметим, что
логарифмируем
 $> 0 \Rightarrow y > 0$ ($\lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y}$)

$$-xy > 0, y > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \lg(-x)^{\lg(-xy)}$$

Рассмотрим первый
случай, когда

$$x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y \Rightarrow$$

$$\left(\frac{(-2y)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2} \Rightarrow \begin{aligned} 4y^2 \lg y &= 2y \lg 2y^2 \\ 2y^2 \lg y &= y \lg 2y^2 \quad | :2 \\ 2y^2 &= y \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2^{4 \lg y} \cdot y^{\lg y^2} = 2^{\lg 2y^2} \cdot y^{\lg 2y^2}$$

$$\frac{2^{4 \lg y}}{2^{\lg 2y^2}} = \frac{y^{\lg 2y^2}}{y^{\lg y^2}} \Rightarrow 2^{\lg y^4 - \lg 2y^2} = y^{\lg 2y^2 - \lg y^2}$$

$$2^{\lg \frac{y^2}{2}} = y^{\lg 2} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = -4$$

прологарифмируем по основанию 2

$$\log_2 2^{\lg \frac{y^2}{2}} = \log_2 y^{\lg 2}$$

$$\lg \frac{y^2}{2} \log_2 2 = \log_2 y \cdot \lg 2$$

$$\lg \frac{y^2}{2} = \lg 2 \log_2 y$$

$$\frac{\lg \frac{y^2}{2}}{\lg 2} = \log_2 y$$

$$\log_2 \frac{y^2}{2} = \log_2 y \Rightarrow \frac{y^2}{2} = y \Rightarrow y \neq 0$$

$$\boxed{y = 2} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = -2y = -4}$$

Рассмотрим второй случай:

$$y - x - 4 = 0 \Rightarrow x = y - 4 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg y(4-y)}$$

$$\frac{(y-4)^{4 \lg y}}{y^2 \lg y} = (4-y)^{\lg y(4-y)}$$

$$\frac{(y-4)^{4 \lg y}}{(4-y)^{\lg y(4-y)}} = y^2 \lg y$$

$$(4-y)^{4 \lg y - \lg y(4-y)} = y^2 \lg y^2 \Rightarrow$$

$$4 - y = y \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow \boxed{y = 2} \Rightarrow$$

$$x = 2 - 4 = \boxed{-2}$$

Ответ: $x = -4; y = 2$
 $x = -2; y = 2$

① Разложим искомое число на простые

множителем:

$$\begin{array}{r|l} 16875 & 3 \\ 5625 & 3 \\ 1875 & 3 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & \end{array} \Rightarrow 3^3 \cdot 5^4$$

Заметим, что четыре "5" будет точно, а в строке с "3" могут быть 9, 3, 1. Тогда

с 9, получаем $\frac{8 \cdot 7 \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2! \cdot 4!}}{8!} (1)$
с 3, получаем $\frac{\frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{3!}}{3!} (2)$ $\Rightarrow (1) + (2) =$

$$= 56 \cdot 15 + \frac{8!}{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} =$$

$$= 56 \cdot 15 + \frac{4! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{4! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$= 56 \cdot 15 + 56 \cdot 5 =$$

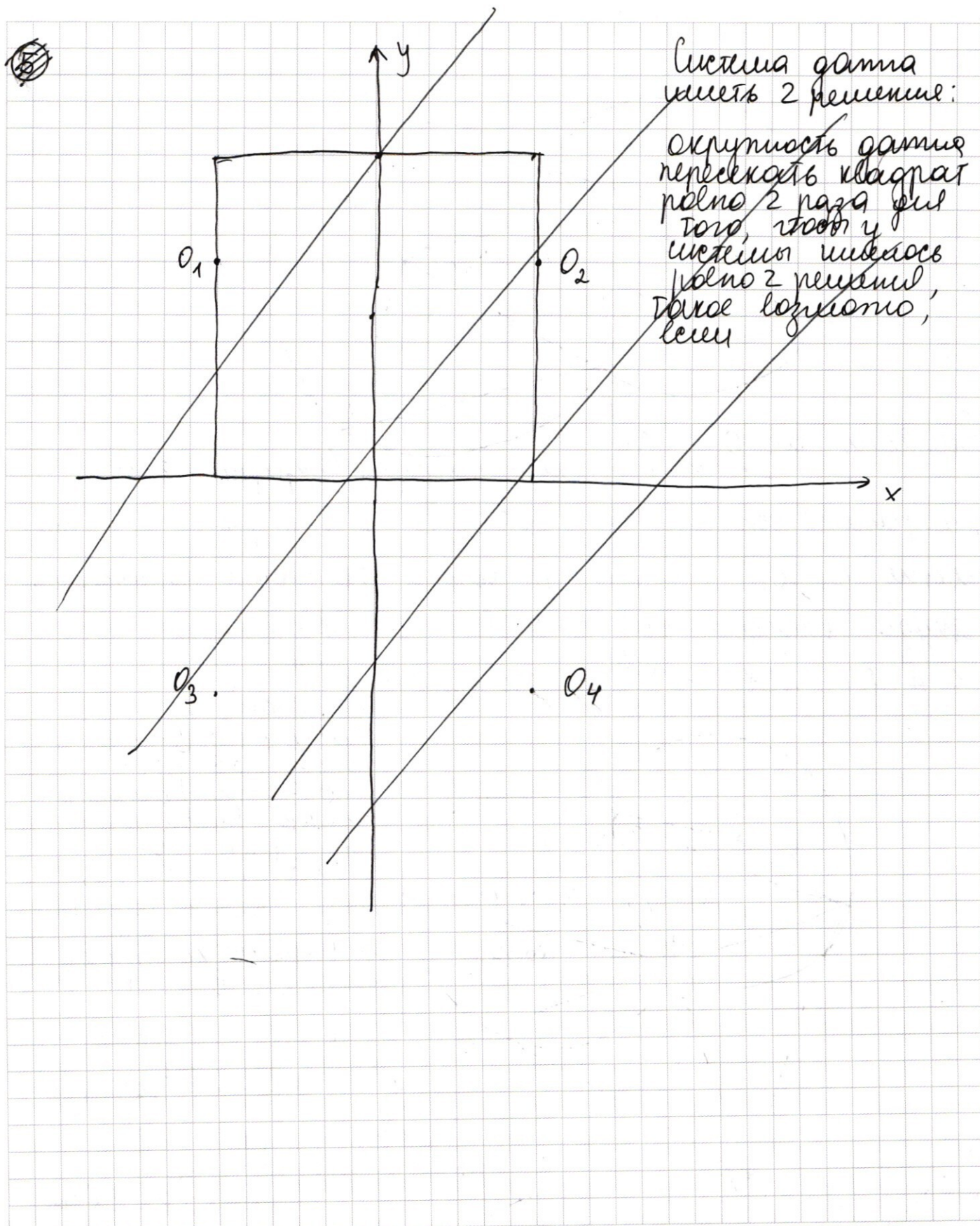
$$= 56 \cdot 20 = 1120$$

Ответ: 1120

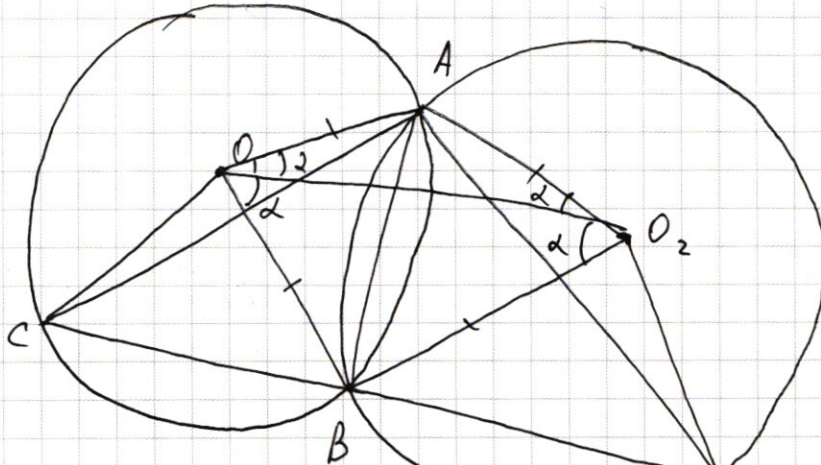
⑤ $\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$

Рассмотрев первое уравнение можно заметить, что это квадрат со стороной 12, с центром (0;6).
Рассмотрев второе уравнение можно заметить, что это окружность с центром в точке (6;8), однако на x и y стоят модули, тогда это 4 окружности с центрами (6;8); (-6;8); (6;-8); (-6;-8)

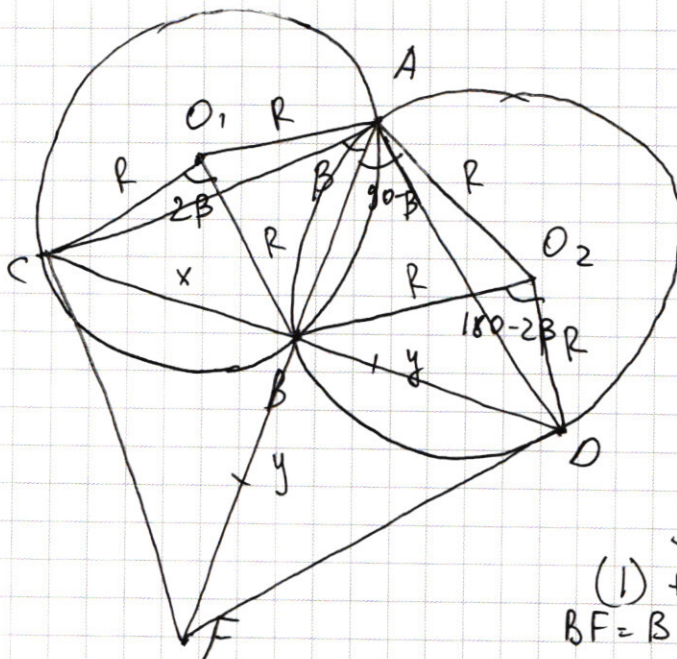
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



6



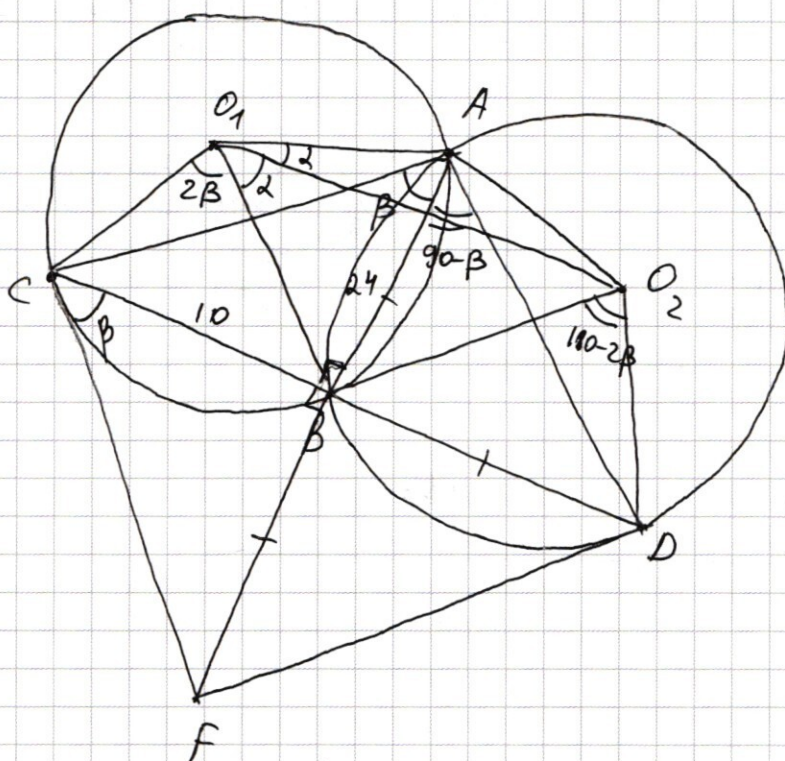
1) Заметим, что $O_1A = AO_2 = O_1B = O_2B$, как радиусы окружностей $\Rightarrow$ построим, что $\triangle BO_1A = \triangle AO_2B$, и они равнобедренные также $\triangle CO_1A$ и $\triangle AO_2D$ также являются равнобедренными откуда вытекает, что $\triangle ACD$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$. (AB - ось симметрии)



Отметим, что
 Пусть $\angle CO_1B = 2\beta$,
 тогда $\angle CAB = \beta$ (т.к.
 $\angle CO_1B$ - центральный, а
 $\angle CAB$ - вписанный)
 Тогда $\angle BAD = 90 - \beta \Rightarrow$
 $\angle BO_2D = 180 - 2\beta$
 Пусть $BC = x$, тогда $BD = y$
 По Теореме косинусов
 где $\triangle CO_1B$ и $\triangle BO_2D$
 $x^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 2\beta$ (1)
 $y^2 = R^2 + R^2 + 2R^2 \cos 2\beta$ (2)
 (1) + (2) $\Rightarrow x^2 + y^2 = 4R^2$
 $BF = BD = y \Rightarrow CF^2 = 4R^2 \Rightarrow$
 $CF = 2R = 2\sqrt{6}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2)



Из $\triangle O_1CB \Rightarrow$
по теореме косинусов
 $CB^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 2\beta$
 $100 = 2R^2(1 - \cos 2\beta) \Rightarrow$

$$1 - \cos 2\beta = \frac{50}{R^2}$$

$$\cos 2\beta = 1 - \frac{50}{R^2} \Rightarrow$$

$$\cos 2\beta = \frac{R^2 - 50}{R^2} = \frac{169 - 50}{169} = \frac{119}{169} \Rightarrow$$

$$\cos 2\beta = 2\cos^2 \beta - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{119}{169} + 1 = 2\cos^2 \beta \Rightarrow$$

$$\frac{288}{169} = 2\cos^2 \beta \Rightarrow$$

$$\cos^2 \beta = \frac{288}{2 \cdot 169} = \frac{144}{169}$$

$$\cos \beta = \frac{12}{13} \Rightarrow$$

$$\sin \beta = \frac{5}{13} \Rightarrow$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \sin \beta = \frac{5}{13}$$

$$\tan^2 \beta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Rightarrow \tan^2 \beta + 1 = \frac{1}{\frac{144}{169}} \Rightarrow \tan^2 \beta = \frac{169}{144} - 1 \Rightarrow \tan^2 \beta = \frac{25}{144} \Rightarrow$$

$$\tan \beta \text{ в } \triangle ACB \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \tan \beta \Rightarrow BC = AB \tan \beta = \frac{20}{12} \Rightarrow$$

$$AB = \frac{BC}{\tan \beta} = \frac{10}{\frac{5}{12}} = \frac{10 \cdot 12}{5} = 24 \Rightarrow$$

Из $\triangle CBF$ найдем $BF \Rightarrow BC^2 + BF^2 = CF^2 \Rightarrow BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = 24 \Rightarrow$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AF, \text{ где } AF = AB + BF = 48 \Rightarrow$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 48 = 5 \cdot 48 = 240$$

Ответ: 1) 26

2) 240

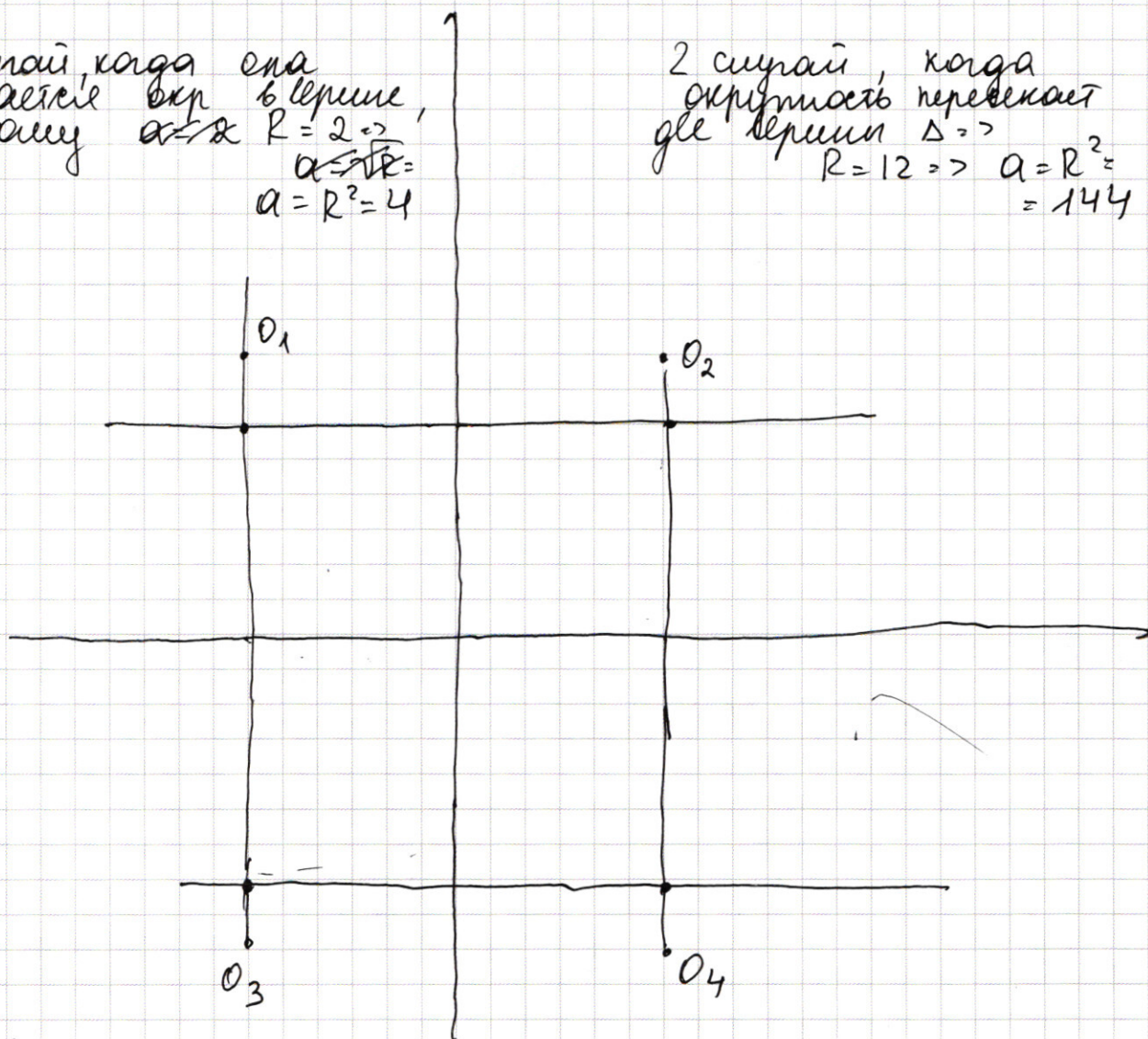
⑤
$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Расс-и первое уравнение
можно заметить что это
фигура ограниченная
прямыми
 $x = \pm 6, y = \pm 6 \Rightarrow$ это
квадрат со стороной 12

(2) Второе уравнение, это уравнение прямой,
с центром в точке $(6; 8)$, однако на x и y
стоят модули, поэтому это четыре окружности
с центрами $(-6; -8); (6; 8); (-6; 8); (6; -8)$ и $R = \sqrt{a} \Rightarrow$
 $a = R^2$

1 случай, когда она
касается окр. сверху,
постоян $a = R^2 = 4$
 $a = R^2 = 4$

2 случай, когда
окр. пересекает
где вершин $\Delta \Rightarrow$
 $R = 12 \Rightarrow a = R^2 = 144$



Ответ: $a = 4$

$a = 144$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2) \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

~~$$\cos 2 \cos \frac{7x+3x}{2}$$~~

$$2 \cos \frac{7x+3x}{2} \cos \frac{7x-3x}{2} =$$

$$= 2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x =$$

$$\textcircled{2} \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) =$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

~~cos~~

~~$$2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x = \sin(\frac{\pi}{2} - 3x) + \sin 5x$$~~

$$= 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - 5x + 5x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - 5x - 5x}{2}$$

$$2 \sin \frac{\pi}{4} \cos(\frac{\pi}{4} - 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - 2 \cos(\frac{\pi}{4} - 5x)) = 0 \quad \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} - 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2(\cos 2x - \cos(\frac{\pi}{4} - 5x))) = 0$$

$$= 2 \sin \frac{2x + \frac{\pi}{4} - 5x}{2} \sin \frac{2x - \frac{\pi}{4} + 3x}{2}$$

$$= 2 \sin(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}) \sin(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8})$$

$$\cos 5x - \cos(\frac{\pi}{2} - 5x) = -2 \sin \frac{5x + \frac{\pi}{2} - 5x}{2} \sin \frac{5x - \frac{\pi}{2} + 5x}{2}$$

$$= -2 \sin \frac{\pi}{4} \sin(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin(5x - \frac{\pi}{4}) \sin(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}) \sin(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\sin(5x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pi n \quad 5x = \frac{\pi}{4} + \pi n \Rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{5}$$

$$\textcircled{3} \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$(1) \quad 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$\underline{2y^2} - \underline{xy} - \underline{x^2} - \underline{4x} - \underline{8y} - \underline{4+4} = 0$$

$$\star 2y^2 - xy - 8y + 4 - (x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$y(\cancel{2y} - \cancel{x} - \cancel{8}) + 4 - (x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$(\cancel{2y^2} - \cancel{xy} - \cancel{8y}) + 4 - (x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$(1) \quad \textcircled{2y^2} - xy - x^2 - 4x - \textcircled{8y} = 0 \Rightarrow \cancel{2y(y+4)} - x(y+4) - x^2 = 0$$

$$\cancel{y^2 + y^2} - \cancel{xy} - \cancel{x^2} - \cancel{4x} - \cancel{8y} = 0$$

$$\cancel{2y^2} - \cancel{xy} - \cancel{x^2} - \cancel{4x} - \cancel{8y} = 0$$

$$\cancel{y^2 + y^2} - \cancel{xy} - \cancel{x^2} - \cancel{4x} - \cancel{8y} = 0$$

$$\cancel{y^2 + y^2} - \cancel{xy} - \cancel{x^2} - \cancel{4x} - \cancel{8y} = 0$$

$$-4(x+2y)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$y(2y - x) - 4(x + 2y)$$

$$\cancel{4(2y - x)} - \cancel{4(2x + 2y)}$$

$$\cancel{2y(y - x)}$$

$$\cancel{4y^2} - \cancel{2y^2} - \cancel{4x} - \cancel{8y} = 0$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 4 - 8y + 4 = 0$$

$$2y^2 - xy - (x^2 + 4x + 4) - 8y + 4 = 0$$

$$2y^2 - xy - (x+4)^2 - 8y + 4$$

$$\cancel{y^2 - 8y + 4} - (x+4)^2$$

$$\cancel{y^2 + y^2} - \cancel{xy} - \cancel{(x+4)^2} - \cancel{4y} - \cancel{4y} + \cancel{4}$$

$$(y^2 - 4y + 4) - (x+4)^2$$

$$(y-4)^2 - (x+4)^2 + y^2 - xy - 4y$$

$$(y-4)^2 - (x+4)^2 - y(x+4) + y^2$$

$$(y-4)^2 - (x+4)^2 - y(y-x-4) = 0$$

$$(y-4-x-4)(y-4+x+4)$$

$$(y-x-8)(y+x)$$

$$(y-x-8)(x+y) - y(y-x-4) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$16 \lg y \cdot y^{2 \lg y} = 2 \lg 2y^2 \cdot y \lg 2y^2$$

$$16 \lg y \cdot y \lg y^2 = 2 \lg 2y^2$$

$$\frac{2 \lg y^4}{2 \lg 2y^2} = \frac{y \lg 2y^2}{y \lg y^2}$$

$$2 \lg \frac{y^4}{2} = y \lg \frac{2y^2}{y^2}$$

$$2 \lg \frac{y^4}{2} = y \lg 2 \Rightarrow y = 2$$

~~2 \lg 2~~

~~2 \lg 2~~

$$\begin{matrix} \lg 2 \\ \lg 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} y = 2 \\ x = -4 \end{matrix}$$

$$y = x + 4 \Rightarrow x = y - 4$$

$$\lg_2 2 \cdot \lg \frac{y^2}{2} =$$

$$\lg \frac{y^2}{2} = \lg_2 y \cdot \lg 2$$

$$\lg \frac{y^2}{2} = \lg 2 \lg_2 y \Rightarrow \frac{\lg \frac{y^2}{2}}{\lg 2} = \lg_2 y$$

$$\lg_2 \frac{y^2}{2} = \lg_2 y$$

$$\left(\frac{y-4}{y^2} \right)^4 \lg y = (4-y) \lg((4-y)y) \quad \frac{y^2}{2} = y \Rightarrow y^2 = 2y \quad y \neq 0$$

$$\left(\frac{y-4}{y} \right)^2 \lg y^2 = (4-y) \lg \lg(4-y) + \lg y =$$

$$\left(\frac{y-4}{y} \right)^2 \lg y^2 = (4-y) \lg(4-y) \cdot \lg(4-y) \lg y$$

$$\Rightarrow \frac{(y-4)^4 \lg y}{y^{2 \lg y}} = (4-y) \lg(4-y)$$

$$\frac{(y-4)^4 \lg y}{y^2} = (4-y) \lg y (4-y)$$

$$\frac{(y-4)^4 \lg y}{y^2 \lg y} = \frac{(4-y) \lg y (4-y) \lg y + \lg(4-y)}{(4-y) \lg y (4-y) \lg(4-y)}$$

$$\frac{(y-4)^4 \lg y}{y^2 \lg y} = (4-y) \lg y (4-y) \lg(4-y)$$

$$(y-4)^4 \lg y = y^2 \lg y - (4-y) \lg y \cdot (4-y) \lg(4-y)$$

$$\frac{(4-y)^4 \lg y}{(4-y) \lg y} = \frac{y^2 \lg y}{(4-y)^4 \lg y}$$

$$(4-y)^4 \lg y - \lg y (4-y) = y^2 \lg y$$

$$(4-y)^4 \lg y - 4 \lg y + \lg y^2 = y^2 \lg y^2$$

$$(4-y) \lg y^2 = y \lg y^2$$

$$4-y=y \Rightarrow 2y=4 \Rightarrow y=2$$

$$\begin{array}{r|l} 16875 & 3 \\ 5625 & 3 \\ 1875 & 3 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \\ -12 \\ \hline 40 \\ -3 \\ \hline 17 \\ -15 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \\ -15 \\ \hline 18 \\ -18 \\ \hline 0 \\ -6 \\ \hline 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5625 \\ -3 \\ \hline 26 \\ -24 \\ \hline 2 \\ -21 \\ \hline 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1875 \\ -18 \\ \hline 07 \\ -6 \\ \hline 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} 625 \\ -3 \\ \hline 25 \\ -25 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$33.5^4$$

$$C9$$

$$8.7 \cdot \frac{61}{4!2!} \neq$$

$$C3$$

$$+ 8! \cdot \frac{4!}{4!4!} - \frac{3!}{3!} =$$

$$\begin{array}{r} 625 \\ -5 \\ \hline 12 \\ -10 \\ \hline 25 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ -10 \\ \hline 15 \end{array}$$

4 и 5 - точно $\Rightarrow$ все остальное

9, 3, 1, 1

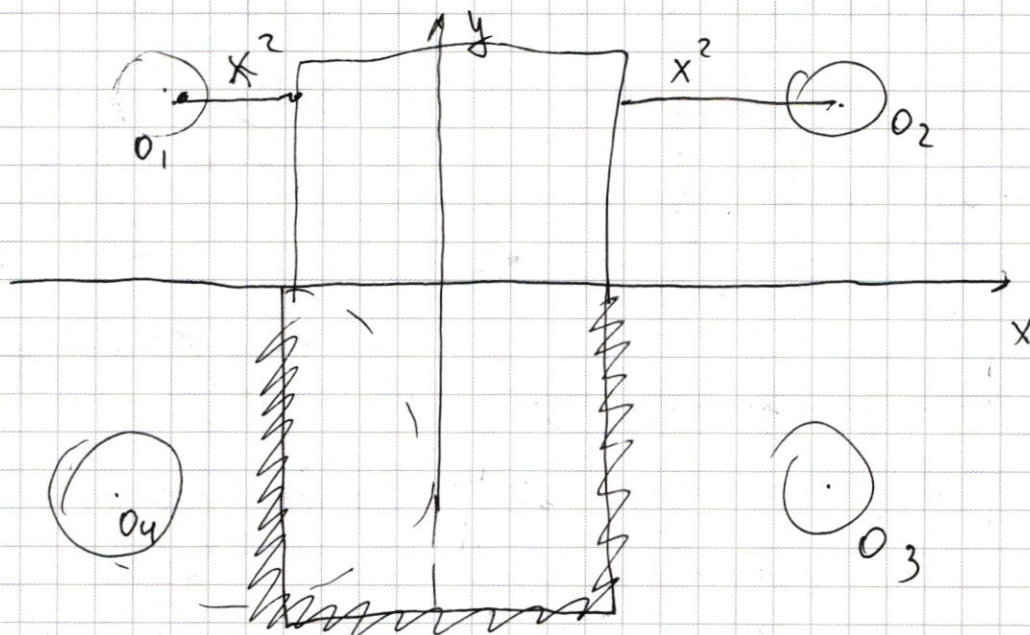
$$56 \cdot 15 + \frac{8!}{4!3!} = 1120$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & \text{кв со стороной 12 и координат, по} \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & \text{перпендикулярам} \end{cases}$$

Второе задает окр, с $r = \sqrt{a}$, или бы ур $(0; 6)$

$(x; y) \Rightarrow$ четное ур-ие $\Rightarrow$ 3 окр с координатами
 $(6; 8); (-6; 8); (-8; 6); (-8; -6)$



O_1 и $O_2 \Rightarrow$ быстрее как координаты при $a = x^2$

тако O_3 и $O_4 \Rightarrow$ посчитаем

при $\uparrow \uparrow$ O_1 и O_2 пересекают квадрат
в 4х углах, скорее, когда $a = 36 + 64 = 100$

но в этом случае O_3 и O_4 пересекает кв в 4х углах
даже при увелич a то есть $a > 14^2 + 6^2$

O_1 и O_2 не пересекают большие квадраты, а O_3 и O_4
предметы в 3х углах, скорее $a = \dots$ O_3 и O_4
пересекают кв в вершинах и получаем 2 решения,
при дальнейшем $\uparrow \uparrow a$ пересек с кв не будет $a = 49$
 $a = 244$

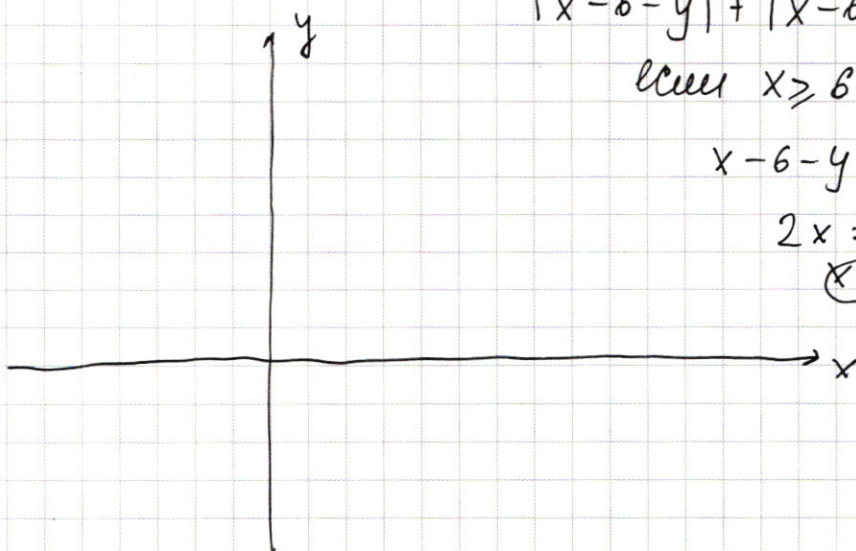
$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

если $x \geq 6+y \rightarrow$

$$x-6-y + x-6+y = 12$$

$$2x = 12$$

$$x = 6 \rightarrow$$



$$\cancel{x-6-y} + 6 - \cancel{x-y} = 12$$

$$-2y = 12$$

$$y = -6$$

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$x-6-y + x-6+y = 12$$

$$2x = 12$$

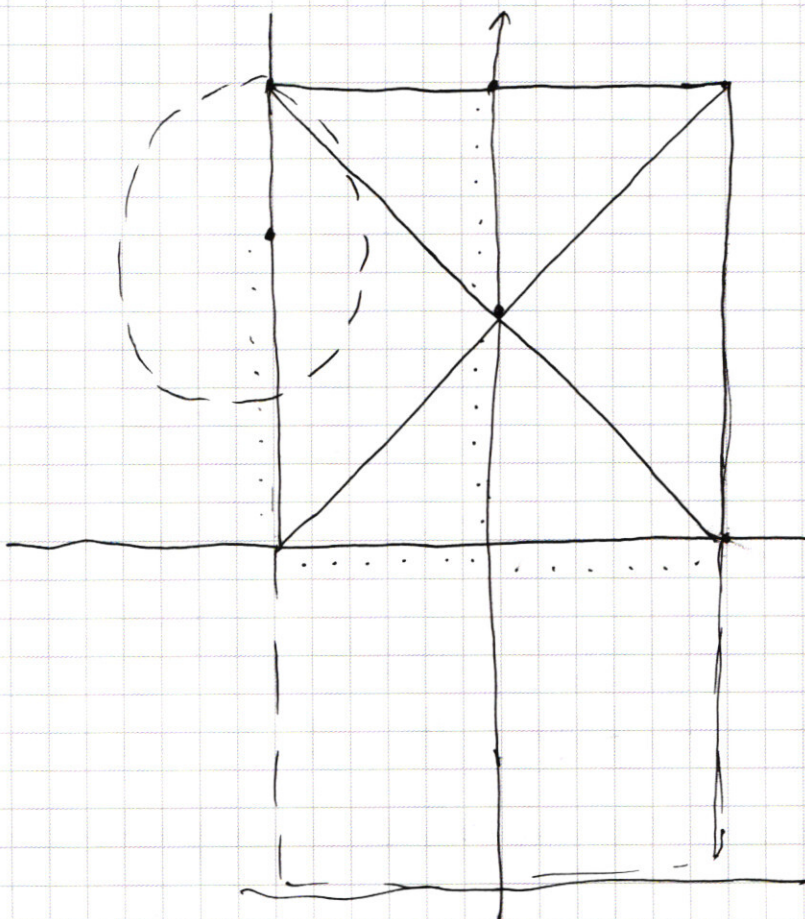
$$x = 6$$

$$y + 6 - \cancel{x} + \cancel{x-6+y} = 12$$

$$y = 6$$

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$(|x|-6)^2 + (|y|-6)^2 = a; (x,y) \in L \Rightarrow \sqrt{a}$$



$$\cancel{y+6-x} + \cancel{x-6+y} = 12$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

$$\cancel{x-6-y} + \cancel{x-6+y} = 12$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

$$\cancel{y+6-x} + \cancel{x-6+y} = 12$$

$$y = 6$$

$$\cancel{x-6-y} - \cancel{x-6-y} = 12$$

$$-2y = 12$$

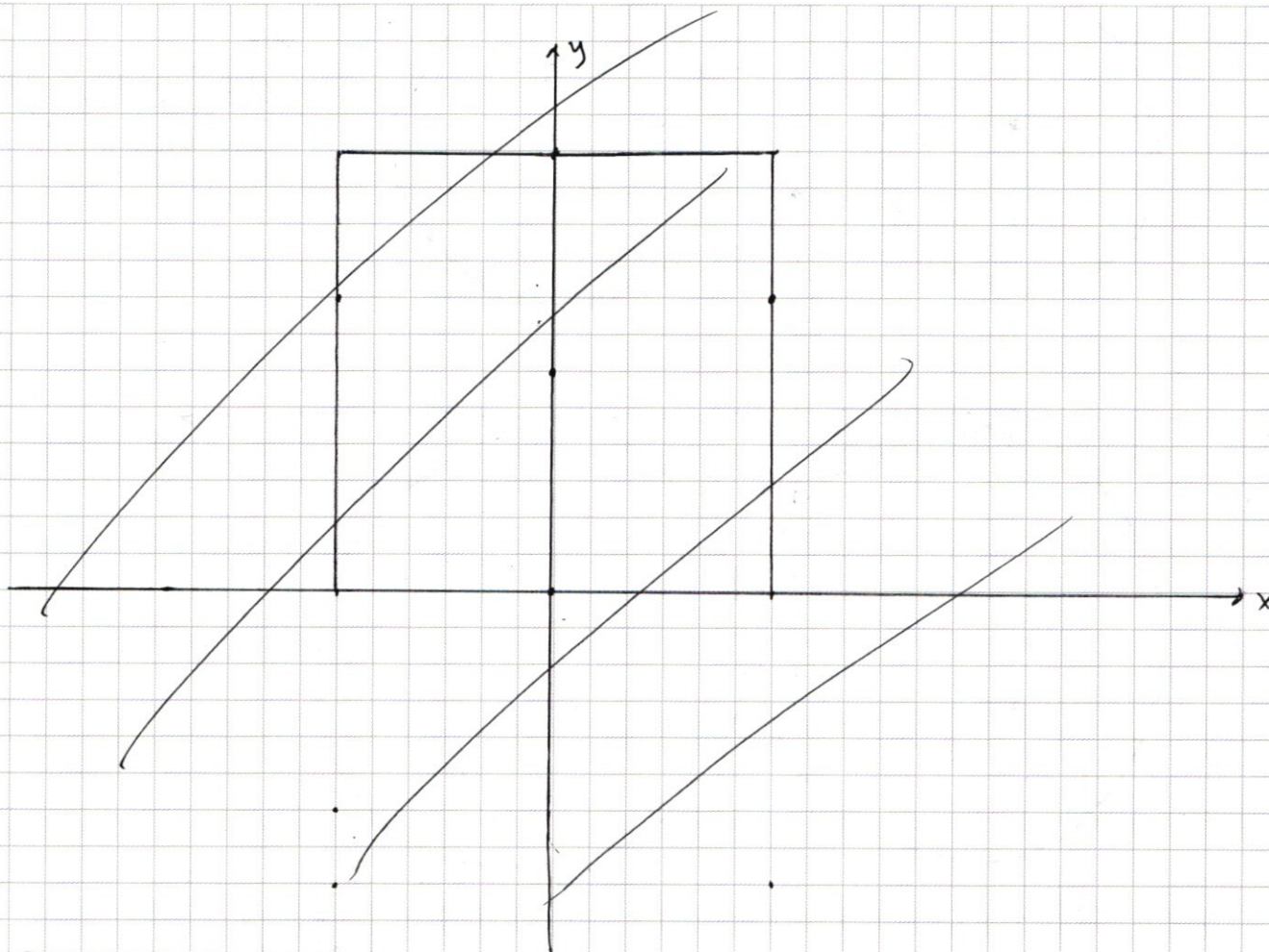
$$y = -6$$

$$\cancel{-x+6+y} - \cancel{x+6-y} = 12$$

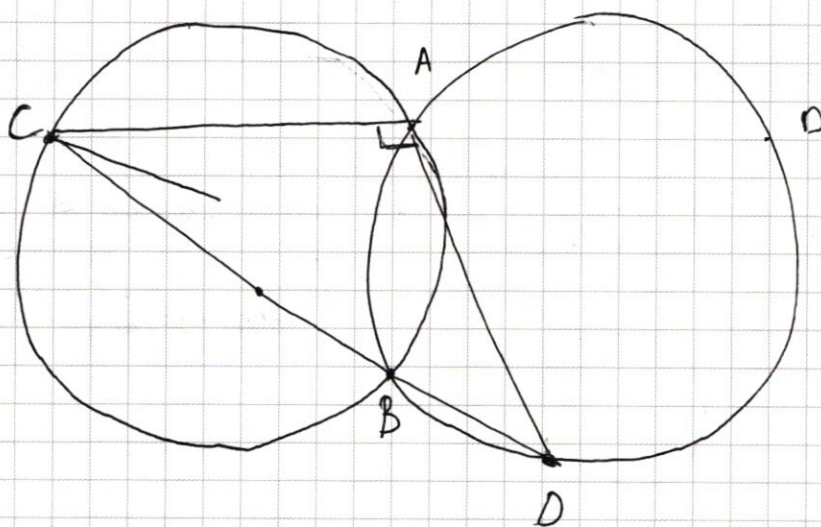
$$-2x = 12$$

$$x = -6$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



⑥



$$|x-y-6| + |x+y-6| = 12$$

$$y-x+6+x+y-6=12$$

$$2y=12$$

$$y=6 \rightarrow x=$$

$$x-y-6+x+y-6=12$$

$$2x=0$$

$$x=0$$

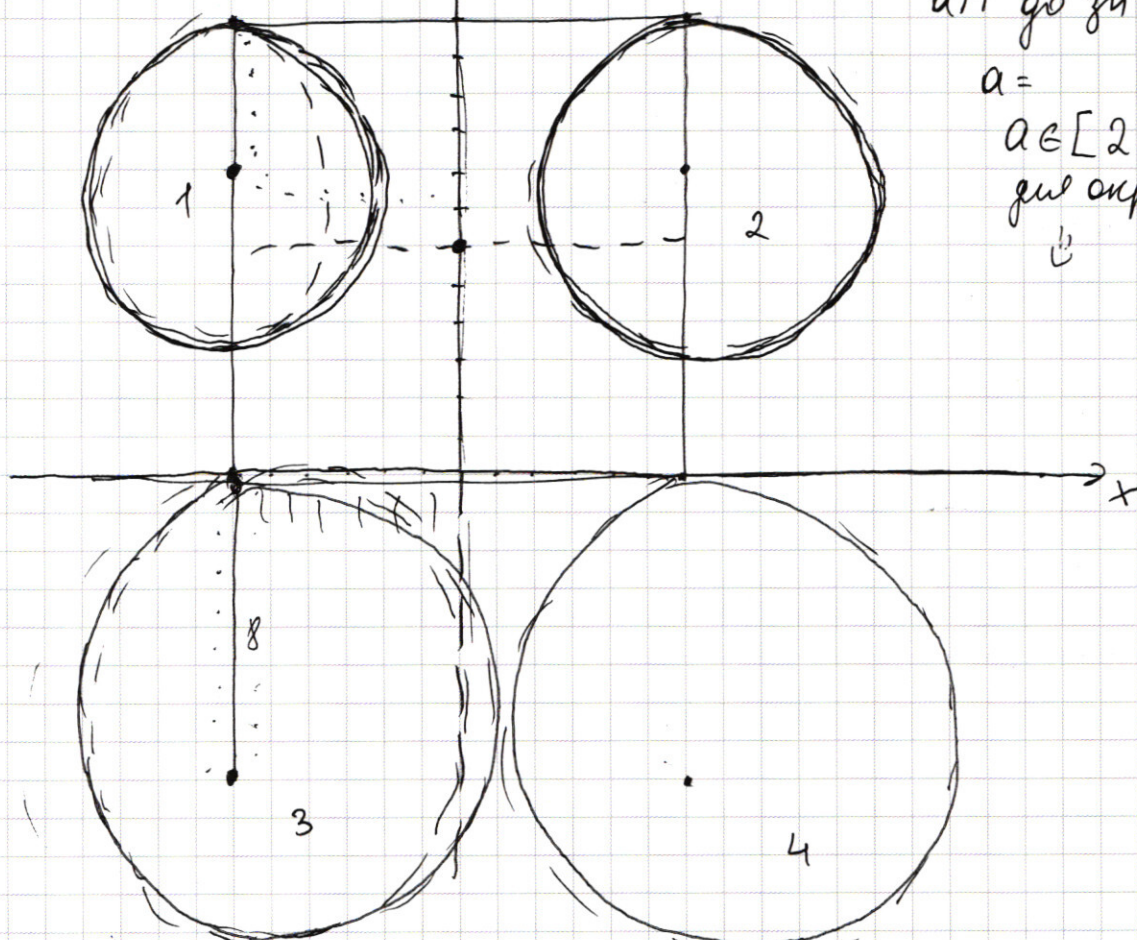
$$a=2$$

а11 go zu

$$a=$$

$$a \in [2; \sqrt{6})$$

для окр 1 и 2



$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 0$$

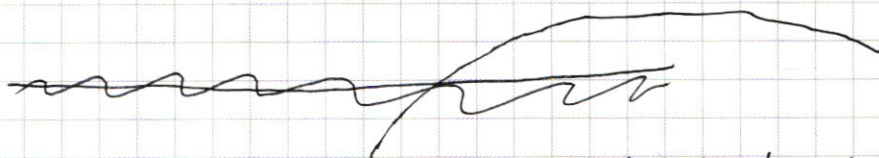
окр с т. $(-x; y)$

$(x; y)$

$(x; -y)$

$(-x; -y)$

$$r = \sqrt{a}$$



$$[6; 8]$$

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12 \Rightarrow$$

$$(-6; -8)$$

кв со стороной 6 и

с центром $(0; 6)$

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12 \Rightarrow$$

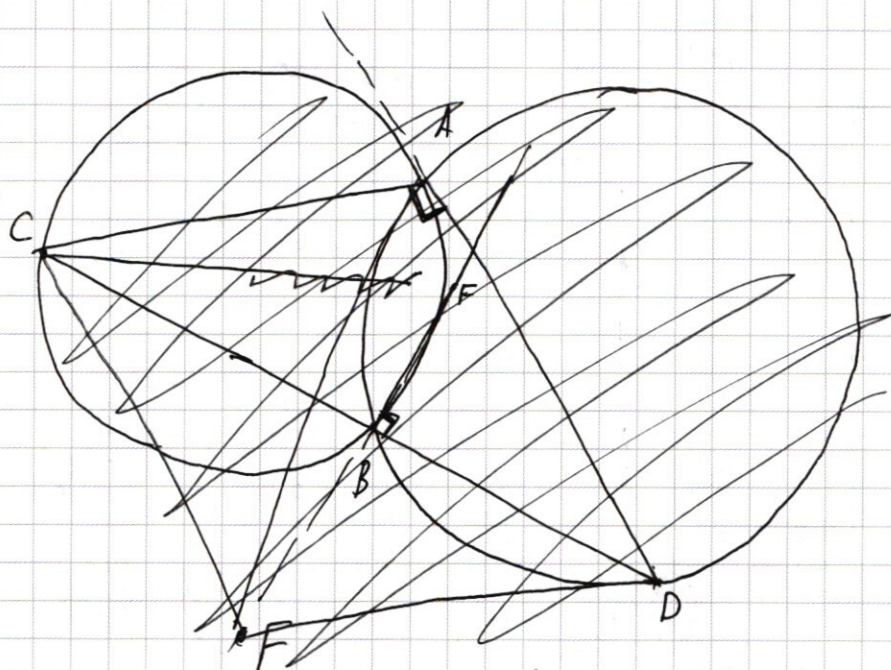
$$x=6, y=0 \Rightarrow$$

и



$\Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$x-6-y + x-6+y = 12$$

$$2x = 12 \Rightarrow x = 6$$

$$x-6-y - x+6-y = 12$$

$$-2y = 12 \Rightarrow y = -6$$

$$-x+6+y + x-6+y = 12$$

$$2y = 12 \Rightarrow y = 6$$

$$y \geq 23^x \cdot 24$$

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$[(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2] = a \text{ (окр)}$$

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$x-6-y + x-6+y = 12$$

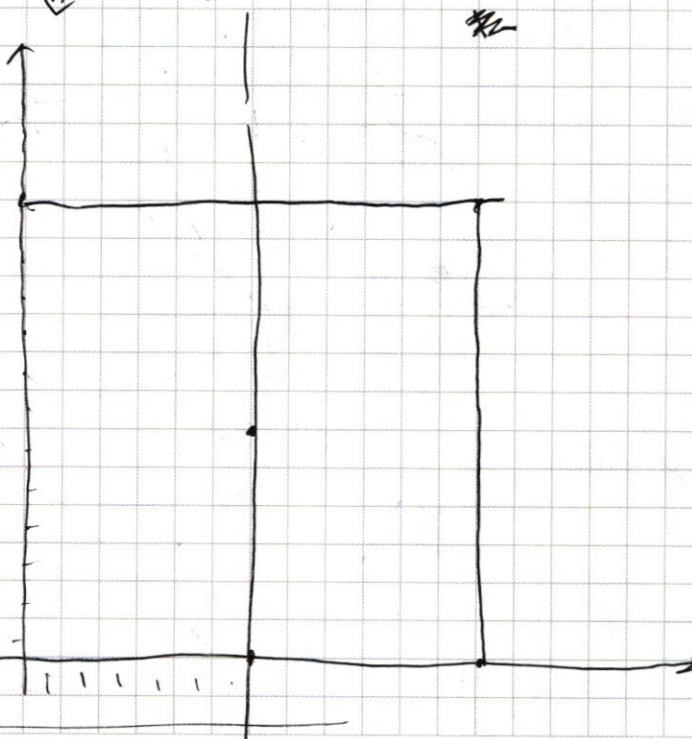
$$2x = 12$$

$$x = 6$$

$$x-6-y - x+6-y = 12$$

$$-2y = 12$$

$$y = -6$$



$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

$$O(6; 8)$$

$$\cos^2 2\beta = \frac{119}{169}$$

$$\cos^2 2\beta$$

$$1 - \cos 2\beta = \frac{100}{2R^2}$$

$$BF = \sqrt{4R^2 - 100} = \sqrt{4}$$

$$100 = 2R^2(1 - \cos 2\beta) \sqrt{\frac{169}{4}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{69}{119} \Rightarrow$$

$$1 - 2\sin^2 \beta =$$

$$100 = 2R^2 \cos^2 \beta$$

$$100 = 2R^2 \cos^2 \beta$$

$$100 = 2R^2(1 - \cos^2 \beta)$$

$$\cos 2\beta = 1 - \frac{100}{2R^2} = \frac{50}{R^2}$$

$$\frac{119}{169}$$

$$\frac{169}{50}$$

$$\frac{119}{169}$$

$$2\sqrt{134}$$

$$\frac{238 - 100}{238} = \frac{138}{238}$$

$$\frac{138}{238}$$

$$S_{ACF} = ?$$

$$2d = ?$$

$$y^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 2\beta$$

$$x^2 = R^2 + R^2 + 2R^2 \cos 2\beta$$

$$x^2 + y^2 = 2R^2 - 2R^2$$

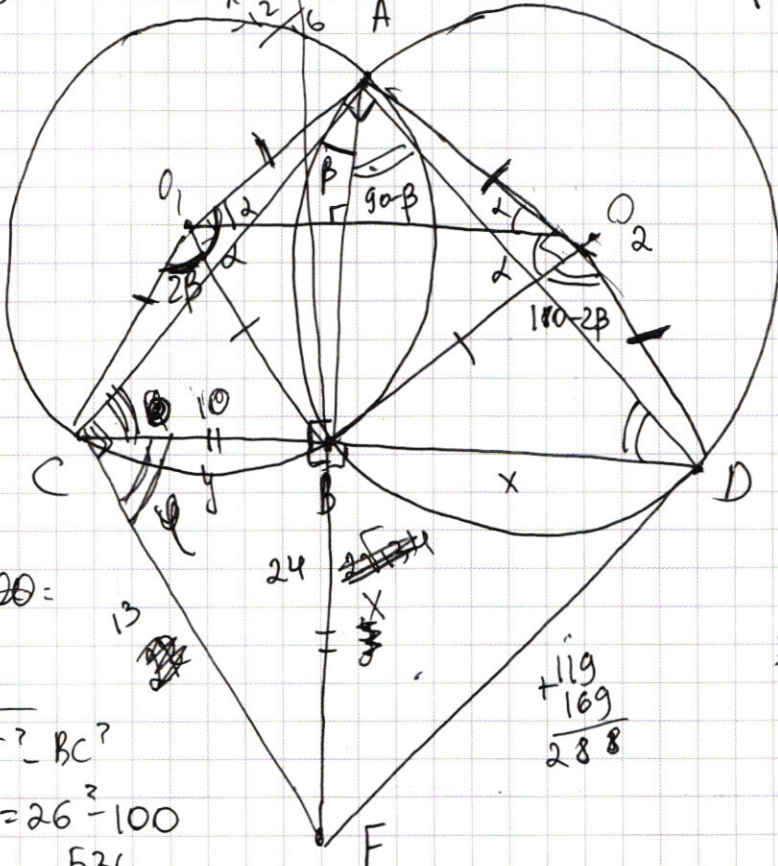
$$x^2 + y^2 = 4R^2$$

$$CF = 4R$$

$$CF = 2R$$

$$\sqrt{536}$$

$$\frac{536}{4} = 134$$



$$BF = \sqrt{26^2 - 100} =$$

$$BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = \sqrt{26^2 - 100} = \sqrt{536}$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$y^2 - 2xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$y > 0$$

$$-xy > 0, \text{ если } y > 0, x < 0$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$(y^2 - x^2) + y(y - x) - 4(x + 2y) = 0$$

$$(y - x)(y + x) + y(y - x) - 4(x + 2y) = 0$$

$$(y - x)(2y + x) - 4(x + 2y) = 0$$

$$(x + 2y)(y - x - 4) = 0$$

$$x = -2y \Rightarrow$$

$$x + 2y = 0$$

$$x = -2y$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy)$$

подставим в (1)

$$\frac{16y^4}{y^2} \lg y = (2y) \lg(2y^2)$$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right) \lg y = (2y) \lg 2y^2$$

$$(16y^2) \lg y = 2y \lg 2y^2$$

$$2y(4y) \lg y = 2y \lg 2y^2$$

$$(4y) \lg y = \lg 2y^2$$

случай)

$$x + 2y = 0$$

$$x = -2y \Rightarrow$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy)$$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right) \lg y = (2y) \lg 2y^2$$

$$(16y^2) \lg y = (2y) \lg 2y^2$$

умножим на основание 2

$$\lg y \lg_2 16y^2 = \lg 2y^2 \lg_2 2y$$

1 случай) $x = -2y$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = 2y^{\lg 2y^2}$$

$$16y^{2\lg y} = 2y^{\lg 2y^2}$$

$$16y^{\lg y^2} = 2y^{\lg 2y^2}$$

$$2^4 y^{\lg y^2} = 2y^{\lg 2y^2}$$

$$(x+2y)(y-x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ y-x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y \\ y+2y=4 \end{cases}$$

$$\boxed{x = -2y}$$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = 2y^{\lg 2y^2}$$

$$16y^{2\lg y} = 2y^{\lg 2y^2}$$

$$2^4 y^{\lg y^2} = 2y^{\lg 2y^2}$$

применим

$$\lg y \log_2 \frac{(y-4)^2}{y^2} = \log_2 (4-y) \cdot \lg y (4-y)$$

$$\frac{\lg y}{1} \cdot \frac{\lg y}{\lg y (4-y)}$$

$$2 \lg y \log_2 \frac{(y-4)^2}{y^2} = \log_2 (4-y) \lg y (4-y)$$

$$2 \lg y (\log_2 (y-4)^2 - \log_2 y^2) = \log_2 (4-y) (\lg y + \lg (4-y))$$

$$2 \lg y (2 \log_2 (y-4) - \log_2 y)$$

$$\left(\frac{(y-4)^2}{y}\right)^{2\lg y} = (4-y)^{\lg y (4-y)}$$

$$\frac{(y-4)^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = (4-y)^{\lg y (4-y)}$$

$$\boxed{y-x-4=0}$$

$$\boxed{y=x+4} \Rightarrow \text{второй случай}$$

$$x = y - 4$$

$$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg (4-y)y}$$

$$\lg y \Rightarrow y > 0$$