

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

*32 *16 \16 76 - 32*

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r}
 1. \quad 16875 \div 5 = 3375 \\
 3375 \div 5 = 675 \\
 675 \div 5 = 135 \\
 135 \div 5 = 27 \\
 27 \div 3 = 9
 \end{array}$$

$16875 = 3^3 \cdot 5^4 \Rightarrow 3+4=7$, а нам нужно 8 чисел $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ присутствует хотя бы одна единица $+ 5 \cdot 5 > 9$
 $3 \cdot 5 > 9$
 $3 \cdot 3 = 9$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ кроме 1, 3, 5 может быть цифра 9

1) одна 1, нет 9.

$$8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2!} \cdot 1$$

↑ ставим 1 ↑ ставим 3 ← пятёрки сами занимают свои места

$$= 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$$

2) одна 9, две 1. (одна 3 и четыре 5)

$$8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 280 \cdot 3$$

↑ ставим 9 ↑ ставим 3 ↑ ставим 1 ← пятёрки занимают свои места

Больше одной 9 быть не может $\Rightarrow$ рассмотрим все варианты.

Ответ: $280 + 280 \cdot 3 = 280 \cdot 4 = 1120$

2. $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 5x + \sqrt{2} \sin^2 5x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 5x (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x) = \sin 5x (2 \cos 2x - \sqrt{2} \sin 5x)$$

$$\sqrt{2} (\sin^2 5x - \cos^2 5x) = 2 \cos 2x (\sin 5x - \cos 5x)$$

$$\sqrt{2}(\sin 5x - \cos 5x)(\sin 5x + \cos 5x) = 2\cos 2x(\sin 5x - \cos 5x)$$

$$\sin 5x \neq \cos 5x$$

$$\sqrt{2}(\sin 5x + \cos 5x) = 2\cos 2x$$

$$\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2}\cos 2x$$

$$\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2}\cos^2 x - \sqrt{2}\sin^2 x$$

$$1 + 2\sin 5x \cos 5x = 2\cos^2 2x$$

$$1 + 2\sin 5x \cos 5x = 2 - 2\sin^2 2x$$

$$\cancel{1 + 2\sin 5x \cos 5x = 2 - 2\sin^2 2x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 5x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 5x = \cos 2x$$

$$\cos 45^\circ \cos 5x + \sin 45^\circ \sin 5x = \cos 2x$$

$$\cancel{\sin 5x \cos 45^\circ + \cos 5x \sin 45^\circ = \cos 2x}$$

$$\cancel{\sin(5x + \frac{\pi}{4}) = \cos 2x}$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} - 5x) = \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi n \\ 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 0 = 3x - \frac{\pi}{4} + 2\pi t \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi t}{3}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi t}{3}, t \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

$$3. \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^4}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Rightarrow x < 0$$

$$y > 0 \begin{cases} \left(\frac{x^2}{y}\right)^{2\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - 8y + 8 - 8 - x^2 - 4x - \frac{4}{y} + \frac{4}{y} - xy = 0 \end{cases}$$

$$2y^2 - 8y + 8 - 8 - x^2 - 4x - \frac{4}{y} + \frac{4}{y} - xy = 0$$

$$(\sqrt{2}y - 2\sqrt{2})^2 - (x+2)^2 - xy - 4 = 0$$

$$x^4 \lg y = y^2 \lg y \cdot (-1)^{\lg(-xy)} \cdot x^{\lg(-x)} \cdot x^{\lg(y)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5. \begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$$2) \cancel{+6} - y - \cancel{-6} - y = 12$$

$$y = -6$$

$$\begin{array}{lcl} X - 12 \geq 0 & X - 12 \leq 0 \\ \hline X \leq 12 \end{array}$$

$$4 + (|x| - 6)^2 = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in [4+0; 4+36] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in [4; 40]$$

$$2) \quad x - 6 - y + x - 6 + y = 12$$

$$\Rightarrow X=12 \quad X-6+y \geq 0 \Rightarrow y \geq -6$$

$$6^2 + (|y| - 8)^2 = a \quad x - 6 - y \geq 0 \Rightarrow 6 \geq y$$

$$\Rightarrow a \in [36 + 4; 36 + 64] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in [40; 100]$$

$$3) \cancel{x+6} + y + \cancel{x-6} + y = 12$$

$$y=6 \quad x-12 \leq 0 \quad x \leq 12$$

$x \geq 0 \quad \equiv \text{Пункт 2, тк}$

$$161 = 1-61$$

$$4) -x + 6 + y - x + 6 - y = 12$$

$$-2x + 12 = 12$$

$$X = 0$$

$$-6 - y \leq 0 \quad y \geq -6$$

$$-6 + y' \leq 0 \quad y' \leq 6$$

$$\equiv \pi_{y_{HKT}} \text{ 2.}$$

см. продолж стр 5.

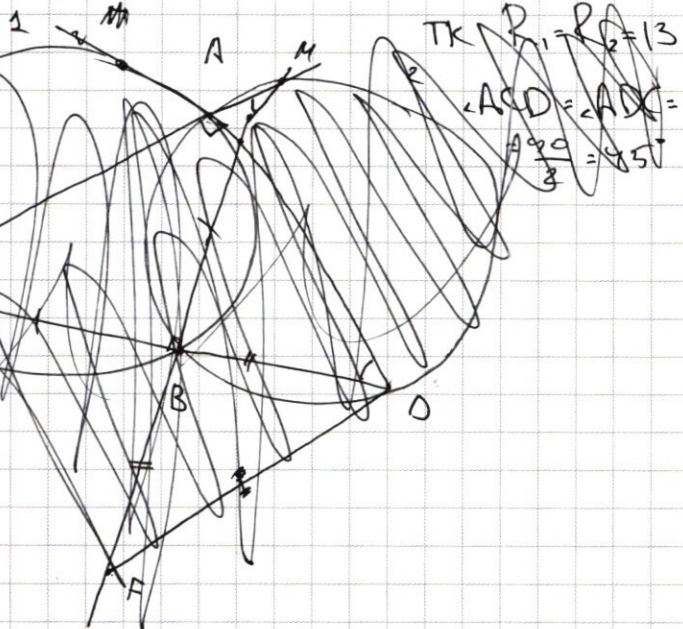
Oben $g \in [4; 100] \times 100$

6. a) ~~Probeden~~ ~~do~~ ~~n~~ ~~c~~

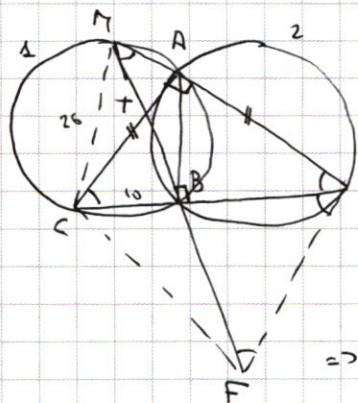
окр $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

~~Красивый прыжок
на другой стороне)~~

~~BMD~~ $\angle \text{grind } 90^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{MBF}$ $\text{da } 2\text{-tennen nra}$
 $\angle \text{CMB} = 45^\circ$

$$MB = CB$$


6. а)



так $R_1 = R_2 = 13$, углы
 $\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ \Rightarrow CA = AD$

Проведен DA до $\cap$ с $1 = M$
 $\angle BMD = \angle BCA = 45^\circ \Rightarrow \angle MBD = 90^\circ$

$\Rightarrow M-B-F$
 высота $\triangle MDF$ (р/б тр-к) $\Rightarrow$ медиана
 $DB =$ ~~медиана~~

$\Rightarrow CB$ - высота + медиана $\triangle CMF \Rightarrow CM = CF$ и $\angle CBM = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow CM$ - диаметр $\Rightarrow CM = 26 = CF$

Ответ: 26

б) $BC = 10$ $S_{\triangle ACF} = ?$

$$MB = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle CTB \sim \triangle MTA$

$$k = \frac{BT}{TM} = \frac{10}{24-10} = \frac{10}{14}$$

$$= \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$CT = 10\sqrt{2} \Rightarrow CA = 10\sqrt{2} + 14\sqrt{2} = 26\sqrt{2}$$

$$CF = 26$$

Найдем угол $\angle ACF$

$$\angle MCB = \angle BCF \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ACF = \angle ACB + \angle MCB = 45^\circ + \arcsin\left(\frac{12}{13}\right)$$

$$\Rightarrow S_{ACF} = \frac{1}{2} \sin \angle ACF \cdot AC \cdot CF = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{12}{13}\right) \cdot 26\sqrt{2} \cdot 26 =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{12}{13}\right) 338\sqrt{2}$$

$$\text{Ответ: } 338\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{12}{13}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. Пункты 2 и 3 показывают, что решений два $(x_0; \pm 6)$,
~~то есть $x=0$ и $y=\pm 6$~~

~~то есть $x=0$ и $y=\pm 6$~~ только, когда $x_0 = 0$

~~то есть $x=0$ и $y=\pm 6$~~

$$\Rightarrow a = 0^2 + 2^2 = 4$$

Пункты 1 и 4 показывают, что решений два $(12; y_0)$

только, когда $y_0 = 0$

$$a = 6^2 + 8^2 = 100$$

Ответ: $a = 4$

$$a = 100$$

что происходит в решении

Объяснение понятия с тем же ответом

допускает подходит пара $(x_0; y_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_0; -y_0)$ тоже подходит

нам нужно ровно два ~~решения~~

решения $\Rightarrow$ либо $x_0 = 0$ находим

y_0 , либо $y_0 = 0$ ищем два подхо-

дящих x_0 .

это не! другое
решение, а
объяснение
того, что происходит
внутри, на стр. 3
написан разбор вариантов
раскрытия подруг.

~~$SK = SM = SL$ — кас и др. точки
 $KPS, MOS, LOS \Rightarrow K, M, L$ лежат
на одной сфере $\Rightarrow$ лежат на одной окр и эта
окр $\perp OS$~~

~~$3. \begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ x^2 + y^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0$~~

переходим к выражению

$$2y^2 - xy - 4x = x^2 + 8y$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 4 = \frac{x^2}{y^2} + 8 \cdot \frac{1}{y}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 4 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 8 \cdot \frac{1}{y}$$

7. $y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$

$y < 85 + (3^{81} - 1)x$

$\Rightarrow$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$4 < x < 85 + \frac{5}{3^{81} - 1}$$

(ф-ция монотонно возрастает на этом промежутке, подставим и увидим, что $x \in (4; 85)$ подходит)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.

$$x - 6 + x - 6 = 12$$

$$2x = 24 \quad (x = 12)$$

$$\cancel{x} - \cancel{6} - y - \cancel{x} + \cancel{6} - y = 12$$

$$y = -6$$

$$x - 6 > y \quad y < 6$$

6-51

$6 \rightarrow y$

$$5: \int |x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$1) (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 9$$

$$|x - y - 6| + |x + y - 6| = 12$$

$$x^2 - 12|x| + 36 + y^2 - 16|y| + 64 = 4$$

$$\cancel{-x} + \cancel{6} + y + \cancel{x} - \cancel{6} + y$$

$$\boxed{y = 6}$$

$$-x + 6 + y - x + 6 - y$$

$$-x = 0$$

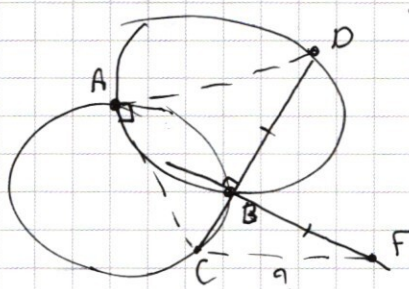
$$\sqrt{x=0}$$

5

$$36 + (|y| - 8)^2 = 100$$

второе ур - оир.

R-13


$$BC = 10$$

ACF - ?

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

1,5

$$2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = \sin \alpha + \sin \beta$$

$$2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = \cos \alpha + \cos \beta$$

$$\sin 210 + \sin 90 = 1 + (-0,5)$$

$$\frac{1}{2} \sin \frac{210+90}{2} \sin \frac{210-90}{2} =$$

$$= \sin 150 \sin 60 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

$$\sin 150 \cos 60 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\cos 210 + \cos 90 = 0 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$2 \sin \frac{210+90}{2} \sin \frac{210-90}{2} =$$

$$2 \cos 150 \cos 60$$

$$1 - 2 \sin^2 x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

$$2 \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 150 + \sin 150 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\cos 60 + \sin 120 = 0,5 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$2 \cos 45$$

$$\cos 45 \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

10/11

$$\cos 0 + \sin 90 = 2$$

$$\cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45 \cdot \cos 45 = \frac{1}{2}$$

$$\pi = \frac{\pi}{4} +$$

$$\frac{\pi}{20} \Rightarrow \frac{\pi}{10}$$

$$\sin 0 + \cos 90$$

$$\begin{matrix} y > 0 \\ -xy > 0 \\ x < 0 \end{matrix}$$

$$\left(\frac{x}{y} \right)^{\log y} = (-x)^{\log(-xy)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$(y^2 - 2xy + x^2) - 2x^2 + y^2 - 4x - 8y = 0$$

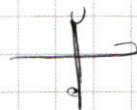
$$\sin(2x+3x) = \sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x$$

$$\cos(2x+3x) = \cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x$$

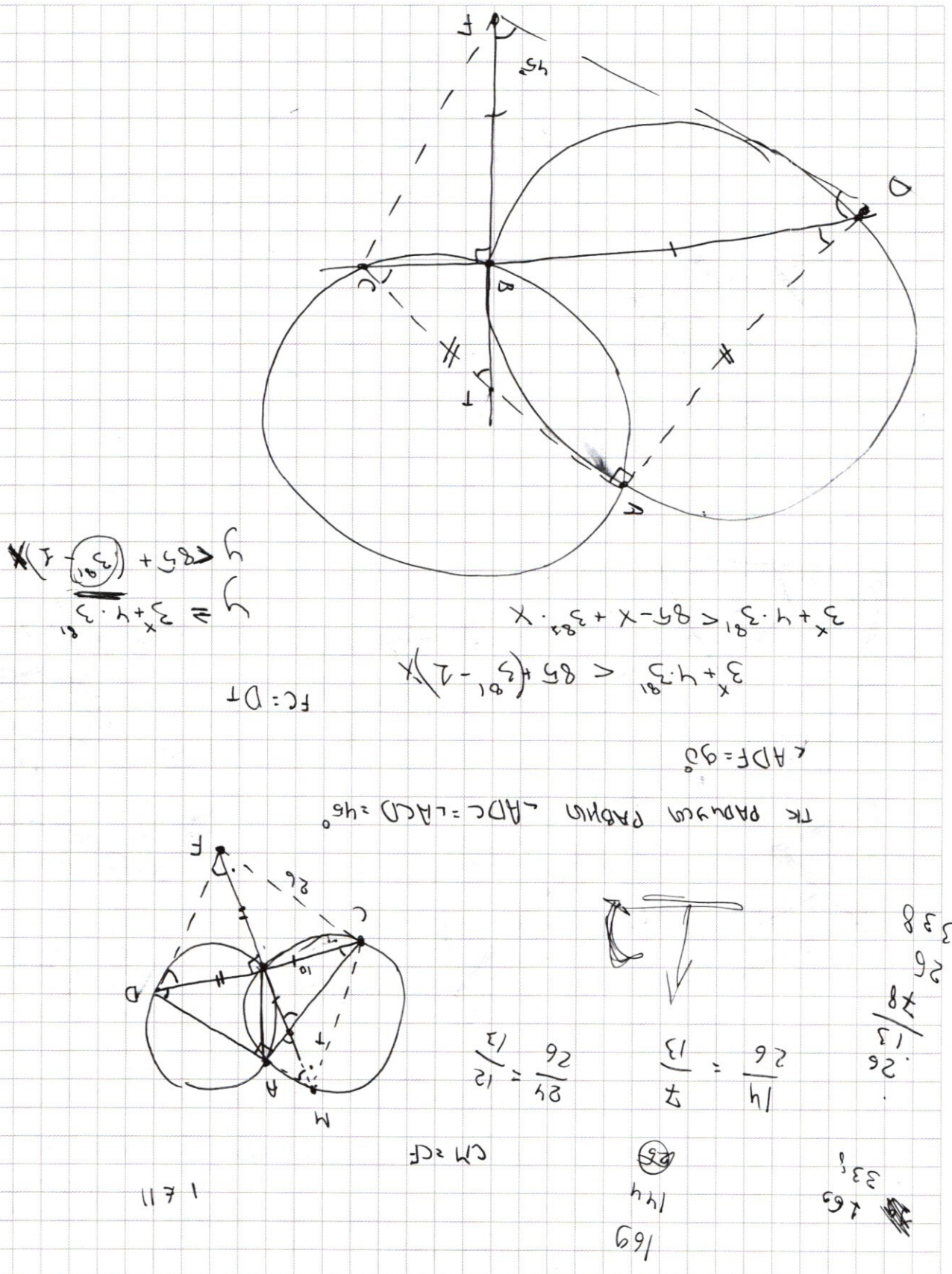
$$(y-x)^2 - (\sqrt{2}x + \sqrt{2})^2 - 2 + (y-4)^2 - 16 = 0$$

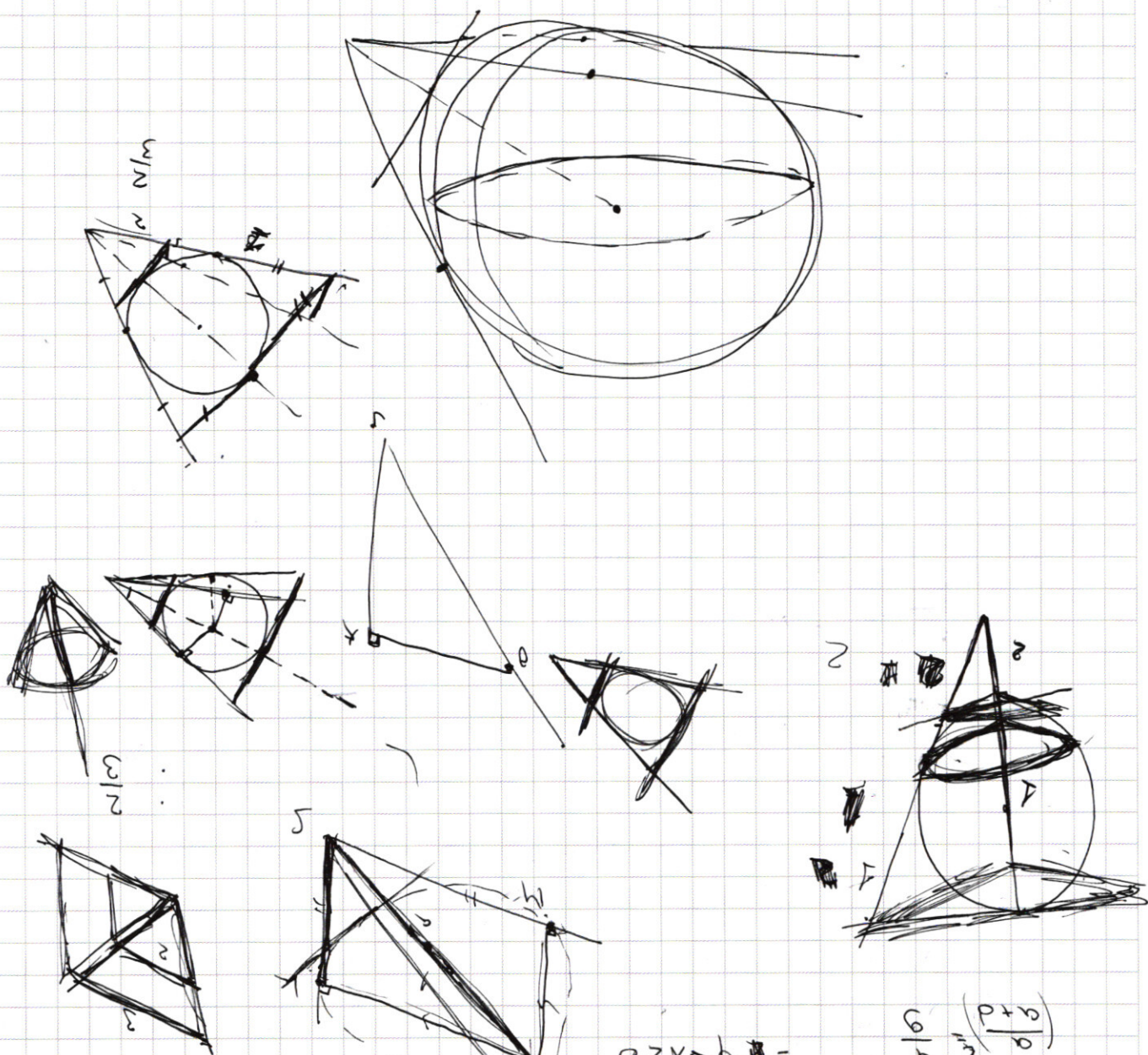
$$60 - 30$$

$$30 - 60$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





5. KLM

$$0 < x < y < z$$

$$\frac{6}{n} \cdot \frac{(p+n)}{2}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = x_1 - x_2 - x_3 - \dots - x_n$$

$$0 = x_1 - x_2 - x_3 - \dots - x_n$$

$$(x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

$$x_1^2 = x_2^2$$

$$0 < x < y$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2(y-2)^2 - 8 - xy - (x+4)^2 + 4 = 0$$

$$2(y-2)^2 - (x+4)^2 - xy - 4 = 0$$

$$2 + \frac{y}{x} - t - t \frac{x}{y} - \frac{4t}{y} - \frac{8t}{x} = 0$$

~~$$1 - \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 0$$~~

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + x3^{81} - x$$

$$3^x \cdot 3^{81} + 4 \cdot 3^{81} < 85 + 85 \cdot 3^{81}$$

$$3 \cdot 3^{81} + 4 \cdot 3^{81} < 1 + 84 \cdot 3^{81}$$

$$1 + 3 \cdot 3^{81} + 3 \cdot 3^{81}$$

$$3^{83} + 4 \cdot 3^{81}$$

$$2 + 3 \cdot 3^{83}$$

$$13 \cdot 3^{81}$$

$$2 + 2 \cdot 3^{81} + 3^{81}$$

$$3 \cdot 3^{81} + 4 \cdot 3^{81} \leq 2 + 83 \cdot 3^{81}$$

$$3^{81} \cdot 9 \leq 2 + \dots$$

$$3 \cdot 3^{81} + 4 \cdot 3^{81} \leq 1 + 3 \cdot 84$$

$$3 \cdot 3^{81} \leq$$

$$3 \cdot 3^{81} + 4 \cdot 3^{81}$$

$$3^{80} \cdot 85 \quad 85 \cdot 3^{81}$$

