

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

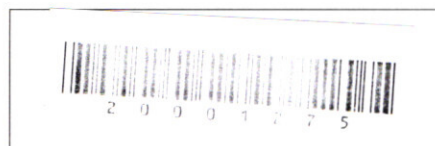
имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

www



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{3}$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg 8} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } x < 0 \quad y > 0$$

решим (2) как квадратное относительно y :

$$2y^2 - (x+8)y - (x^2 + 4x) = 0$$

$$D = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2$$

$$y = \frac{x+8 \pm (3x+8)}{4}$$

a) $y = x+4 \rightarrow (1)$

б) $y = -\frac{1}{2}x$

$$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x^2-4x)}$$

Логарифмируем по основанию $\lg$

$$\lg(x+4) \cdot \lg\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right) = \lg(-x(x+4)) \cdot \lg(-x)$$

$$\lg(x+4) (4\lg(-x) - 2\lg(x+4)) = (\lg(-x) + \lg(x+4)) \lg(-x)$$

Пусть $\lg(x+4) = b$; $\lg(-x) = a$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$\frac{a}{b} = 1$$

$$\frac{a}{b} = 2$$

$$\lg(-x) = \lg(x+4)$$

$$-x = x+4$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = -2 \\ y = 2 \end{matrix}}$$

$$\lg(-x) = \lg(x+4)^2$$

$$-x = (x+4)^2$$

$$x^2 + 9x + 16 = 0$$

$$x^2 + 9x + 16 = 0$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Пара $\left(x = \frac{-9 - \sqrt{17}}{2}, y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \right)$ не подходит, т.к. по ОДЗ $y > 0$

$$\boxed{\begin{matrix} x = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{matrix}}$$

$$\delta) \quad y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow x = -2y \rightarrow (1)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{16y^4}{y^2} \right)^{\lg y} &= (2y)^{\lg 2y^2} \\ (16y^2)^{\lg y} &= (2y)^{\lg 2y^2} \end{aligned}$$

Проверим по основанию $\lg$

$$\lg y \cdot \lg(16y^2) = \lg(2y^2) \lg 2y$$

$$2 \lg y (\lg y + \lg 4) = (\lg 2 + 2 \lg y) (\lg 2 + \lg y)$$

Пусть $\lg y = t$

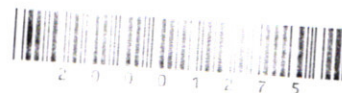
$$2t^2 + 2t \lg 4 = 2t^2 + (\lg 2)^2 + t \lg 2 + 2t \lg 2$$

$$4t \lg 2 = (\lg 2)^2 + 3t \lg 2$$

$$t = \lg 2$$

$$\boxed{\begin{matrix} y = 2 \\ x = -4 \end{matrix}}$$

Ответ: $(-4; 2), (-2; 2), \left(\frac{-9 + \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$16\ 875 = 3^3 \cdot 5^4 \Rightarrow$ восьмизнач. число состоит из содержит
4 цифры «5» и (3 цифры «3» и цифру «9» или 3 цифры «3»);
остальные места заполняются цифрами «1».

1) Если в числе три цифры «3»:

$$N_1 = C_8^4 \cdot C_4^3 = 280$$

2) Если в числе цифра «3» и цифра «9»:

$$N_2 = C_8^4 \cdot 4 \cdot 3 = 840$$

$$N_0 = N_1 + N_2 = 840 + 280 = 1120$$

Ответ: 1120 чисел.

№5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x-6|)^2 + (|y-8|)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Возведём (1) в квадрат, т.к. левая и правая части неотр.

$$(1) \quad (x-6-y)^2 + (x-6+y)^2 + 2|(x-6)^2 - y^2| = 144$$

$$2(x^2 + y^2 + 36) - 24x + 2|(x-6)^2 - y^2| = 144$$

$$(x-6)^2$$

$$(x-6)^2 + y^2 + |(x-6)^2 - y^2| = 72$$

a) $(x-6)^2 \geq y^2$

$$(x-6)^2 = 36$$

$$x = 12 \quad x = 0$$

$$y \in [-6; 6]$$

b) $(x-6)^2 < y^2$

$$y^2 = 36$$

$$y = 6 \quad y = -6$$

$$x \in (0; 12)$$

Получается, первое уравнение задает ^{а квадрат} бо стороной 12 и вершинами $(0; -6)$, $(0; 6)$, $(12; 6)$, $(12; -6)$

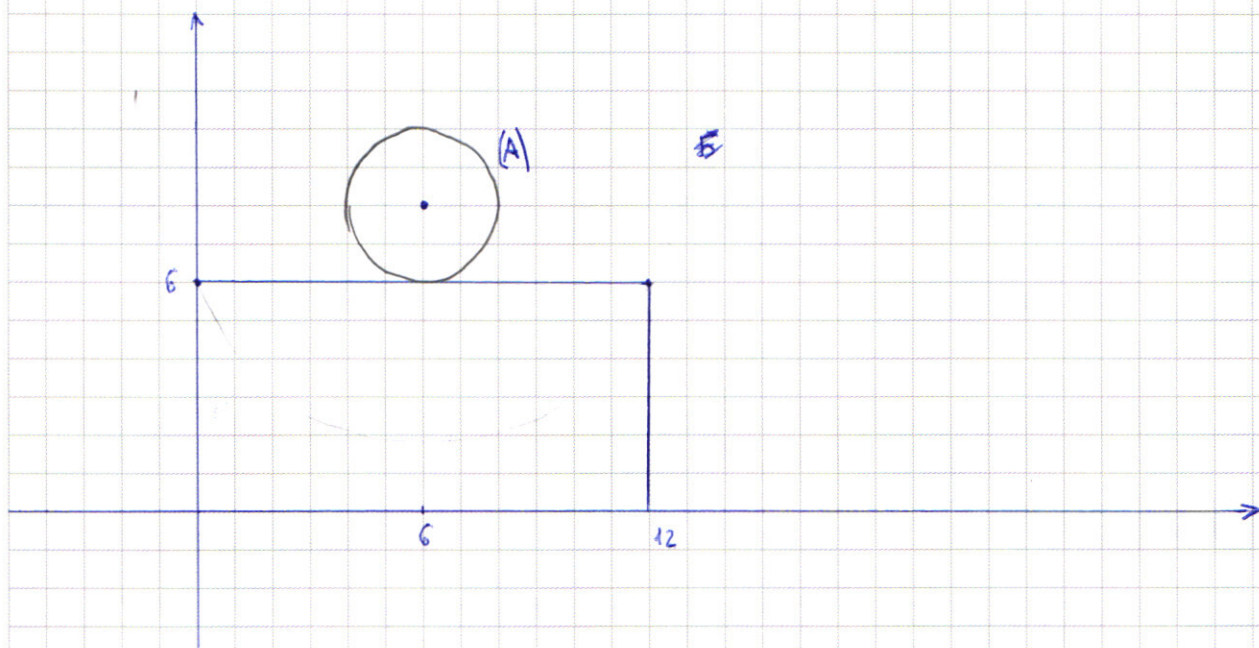
Заметим, что $x \geq 0 \Rightarrow$ в уравнении (2) модуль раскрывается со знаком $+$ всегда.

$$(2) \quad (x-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

Заметим, что, если система имеет решение, где $y > 0$, то $(x; y)$, то пара $(x; -y)$ также будет решением.

Значит, рассмотрим только случай $y > 0$, где система должна иметь одно решение; также отдельно рассмотрим случай $y = 0$.

$$(2) \quad (x-6)^2 + (y-8)^2 = a: \text{ окр } C(6; 8) \quad R = \sqrt{a}$$



(A) $R = 2 \Rightarrow a = 4$ (во всех остальных случаях решений 0 или больше)

$$\text{Если } y = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x = 12 \quad (\text{из (1)})$$

(2) $a = 64 + 36 = 100$ в этом случае система также имеет ровно 2 решения

Ответ: $a = 4$; $a = 100$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

Используя формулы суммы и разности косинусов и синусов, получаем:

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \cos 2x \sin 5x - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$2 \cos 2x \left(\cos 5x - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 5x \right) \right) - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$\quad \quad \quad \overset{||}{-2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$2 \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \cos 2x + \cos 10x = 0$$

$$\cos 10x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 10x \right) = \sin 2 \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right)$$

$$2 \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \cos 2x - 2 \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = 0$$

$$\sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$$

$$\cos 2x - \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{-3x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \sin \left(\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\frac{-3x + \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n$$

$$-3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n$$

$$\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n$$

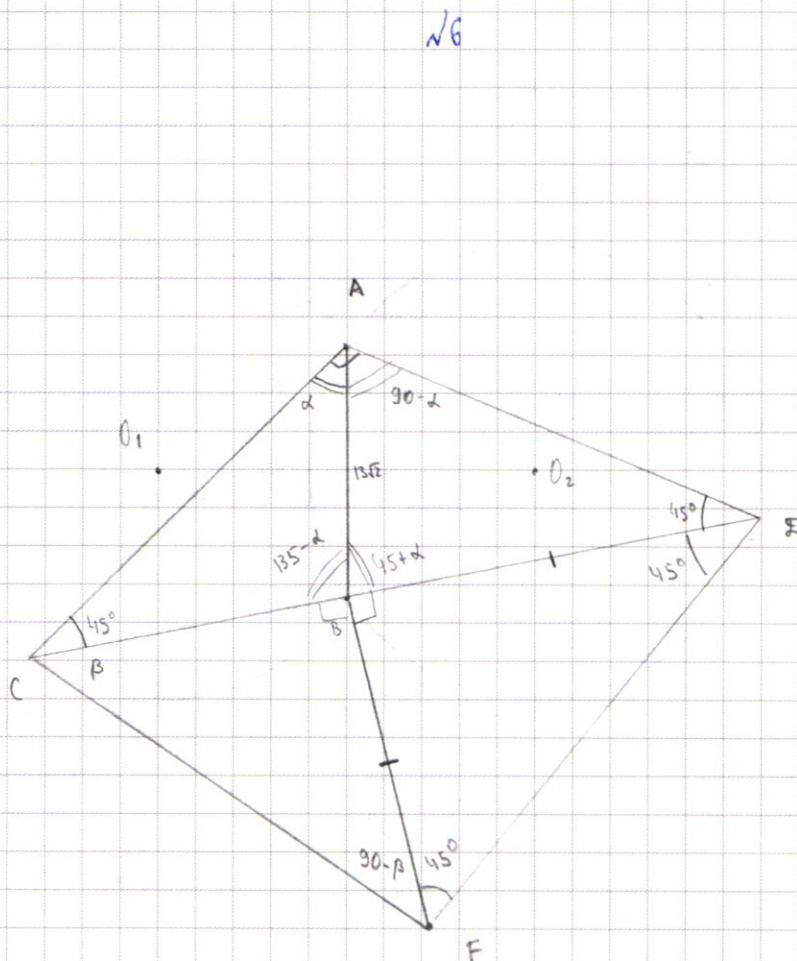
$$7x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n$$

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, \text{ где } n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\angle AOB$ (первой окр) = $\angle AOB$ (второй окр), т.к. радиусы равны $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB$ и $\angle ACB + \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ \Rightarrow \angle AOB = 90^\circ$

$\triangle AOB$ - прямоугол. ($\angle AOB = \angle AOB = 90^\circ$) $\Rightarrow AB^2 = 2r^2$, где $r = 13$

$$AB = 13\sqrt{2}$$

$\triangle BDF$ - прямоугол. и равнобед. $\Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$

$\angle ACF = \angle CDF$ (накрест лежащие) $\Rightarrow AC \parallel DF$

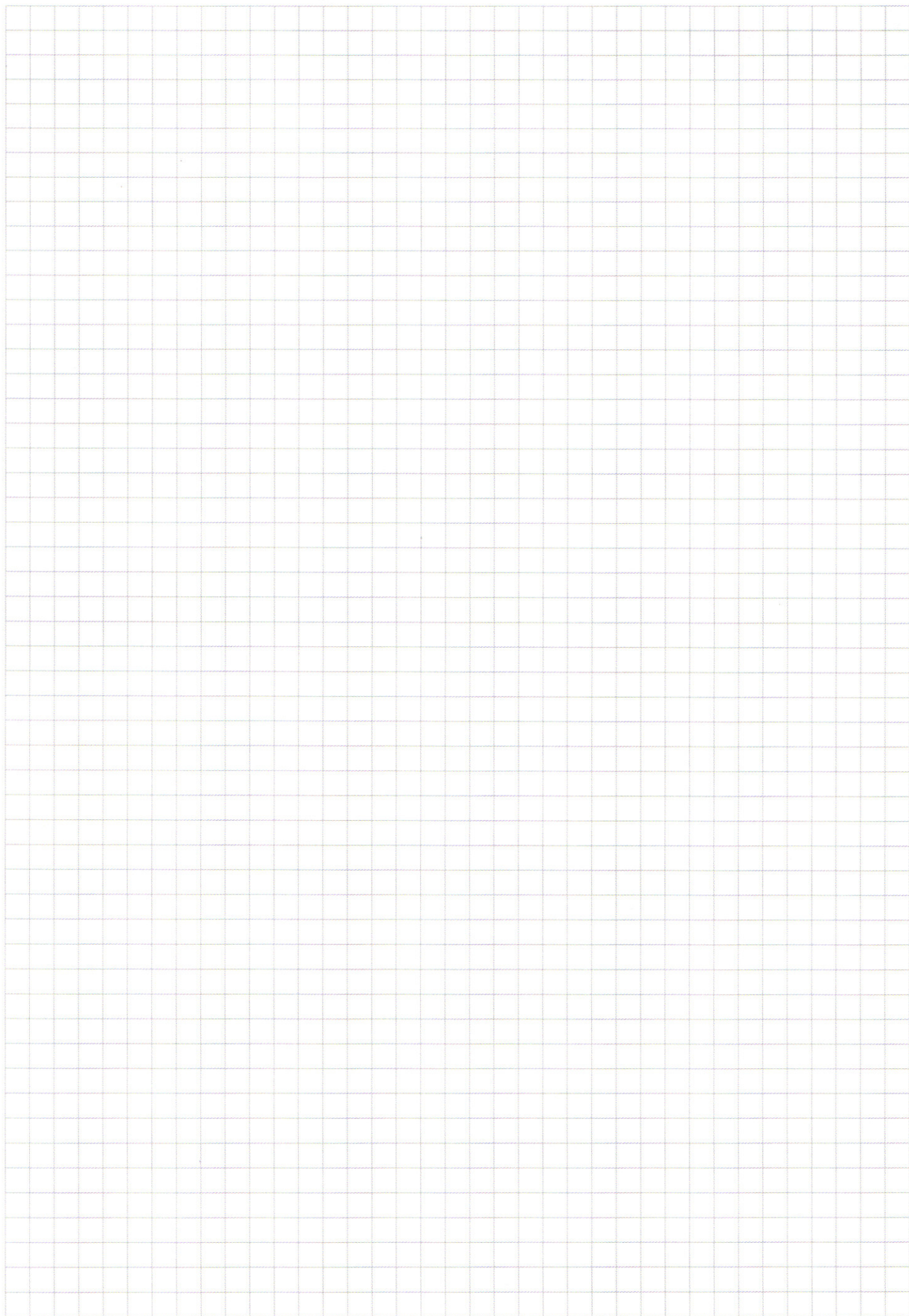
Пусть $\angle CAB = \alpha$ $\angle BCF = \beta$

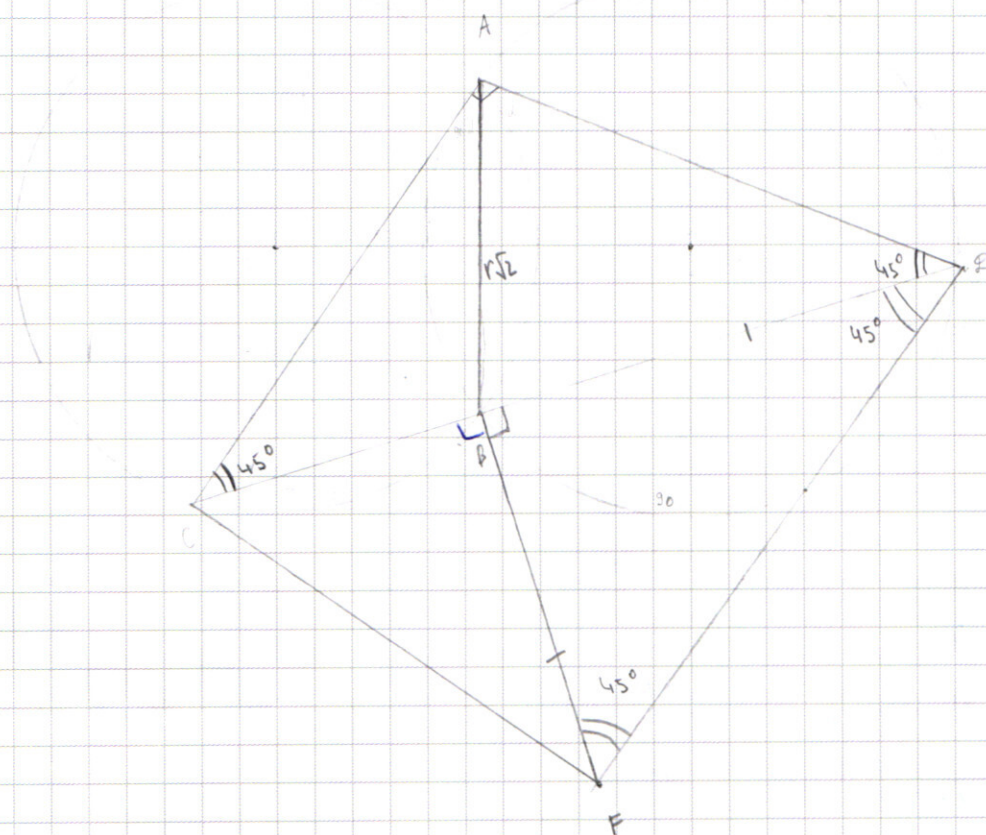
$$\triangle CAB \sim \triangle BDF \Rightarrow \frac{BF}{CF} = \frac{BF}{AC} = \frac{BD}{AB}$$



(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



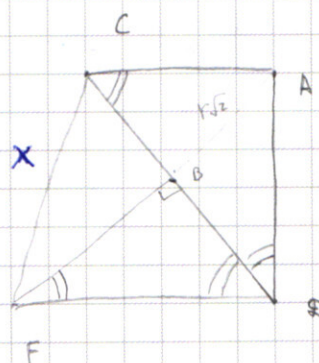


$$\angle ABF = 90^\circ$$

$$\angle AB = 30^\circ$$

$$AC \parallel DF$$

$$2 + 45^\circ = 180 - 45 - 90 + 2$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$1) (x-6)^2 > y^2$$

$$y \in [-6; 6]$$

$$(x-6)^2 = 36$$

$$x = 12$$

$$x = 0$$

$$2) (x-6)^2 < y^2$$

$$y^2 = 36$$

$$y = \pm 6$$

$$(x-6) \in$$

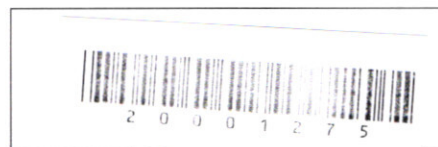
$\sqrt{7}$

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{21} & \uparrow \uparrow \\ y < 85 + (3^{21} - 1)x & \uparrow \uparrow \end{cases}$$

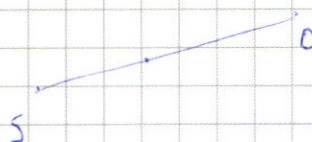
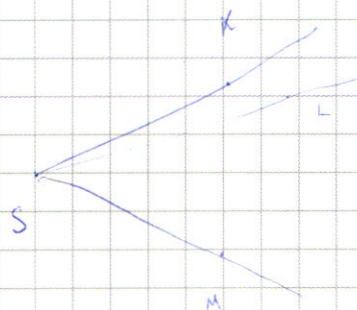
$$85 + (3^{21} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{21}$$

$$3^{21}(x-4) + \cancel{3^x} - x$$



(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$3^x + 4 \cdot 3^{81} : 3$$

$$(3^x + 4 \cdot 3^{81}) : 3$$

85

$$-y > -85 + (3^{81} - 1)x$$

~~0~~

Если $x < 0$ невозможно

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cos 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right) = 0$$

$\sqrt{3}$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$2y^2 - xy$$

$$-xy > 0$$

$$y > 0 \quad x < 0$$

$$\lg(x+4) \cdot \lg \frac{x^4}{(x+4)^2} = \lg(-x^2-4x) \lg(-x)$$

$\stackrel{b}{\underset{a}{}}$

$$b(4a - 2b) = (a+b)a$$

$$4ab - 2b^2 = a^2 + ab$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3\frac{a}{b} + 2 = 0$$

$$\frac{a}{b} = 1$$

$$\frac{a}{b} = 2$$

$$\frac{210}{840}$$

$$\frac{8!}{4!4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1}$$

$$D = 81 - 64 = 17$$

$$70 \cdot 4 = 280$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2} + 4 = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

~~fat - fat~~

$$(x-6-y)^2 + 2((x-6)^2 - y^2) + (x-6+y)^2 = 144$$

$$2(x^2 + 36 + y^2) - 2xy - 12x + 12y + 2xy - 12y - 12x = 144 \quad 72$$

$$(x^2 - 12x + 36) + y^2 = 72$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 72 = (6\sqrt{2})^2$$



2 0 0 0 1 2 7 5

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$16875 = 675 \cdot 25 = 27 \cdot 25^2$$

$$16875 = 3^3 \cdot 5^4$$

Восемизначное число

Получено было после 5 4 (при 5 или 9 или 9)

число 5

$$\begin{array}{r} 16875 \quad | 25 \\ - 150 \quad \quad 6675 \\ \hline 187 \\ - 15075 \\ \hline 275 \\ \hline 125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \quad | 25 \\ - 50 \quad \quad 27 \\ \hline 175 \\ - 175 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 10x = 2 \cos^2 5x - 1$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (2 \cos^2 5x - 1) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x \left(\cos 5x - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 5x \right) \right) = \sqrt{2} (2 \cos^2 5x - 1)$$

$$2 \cos 2x \cdot \left(-2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$-2 \cos 2x \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 10x$$

$$\cos 7x - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 7x \right) = -2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos 3x - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 3x \right) = -2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos 10x = 0$$

$$2 \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \cos 2x + \cos 10x = 0$$