

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
- ✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Разложим число 3375 на простые множители: $3375 = 5^3 \cdot 3^3$

Нам подходит только цифра от 1 до 9 (кроме 0).

Все возможные варианты цифр из предыдущих простых множителей: 5, 3, 9. Другие цифры нам не подходят, т.к. цифра от 0 до 9. Так же можно использовать 1, она никак не повлияет на проверку: (с "9")

① Только из 5, 3 и 1: обязательно должны быть: 3 - "5" и 3 - "3" и необходимо еще 2 - "1" для 8-ого числа:

8! - к-во перестановки. При этом когда "3" и "5" считалось (также 2 - "1" как разные) как различные цифры $\Rightarrow \frac{8!}{6! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2$

4 (без "9") - числа из "5", "3" и "1" (т.е. без "9")

② Если в числе есть "9", то остается 1 - "3", 3 - "5", т.к.

"9" может быть только 1 $\Rightarrow$ необходимо 3 - "3".

Аналогично ① к-во чисел будет: $\frac{8!}{6 \cdot 6} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 6} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4$

Всего чисел: $8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 + 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 8 \cdot 7 (20 + 10) = 1580 + 120 = 1620$

~~КАКИМ-ТО~~

Другие варианты невозможны, т.к. к-во 5 и 3 - определенное (единственное разложение числа на множители)

Ответ: 1620

№ 2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin \frac{11x+3x}{2} \cdot \sin \frac{3x-11x}{2} + 2 \cdot \sin \frac{-11x+3x}{2} \cdot \cos \frac{11x+3x}{2} = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \cdot \sin(-4x) + 2 \sin(-4x) \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin(-4x) (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (-2 \sin 4x + \sqrt{2} (\sin 7x - \cos 7x)) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0 & (1) \\ -2 \sin 4x + \sqrt{2} (\sin 7x - \cos 7x) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \sin 7x = -\cos 7x \Rightarrow 7x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$$

$$(2) \sqrt{2} (\sin 7x - \cos 7x) = 2 \sin 4x \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$-\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x\right) = \sin 4x$$

$$\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 4x$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \left(7x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin 4x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{\frac{3\pi}{2} - \left(7x + \frac{\pi}{4}\right) - 4x}{2} \cdot \cos \frac{\frac{3\pi}{2} - \left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + 4x}{2} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\frac{5\pi}{4} - 11x}{2} = 0 \\ \cos \frac{\frac{5\pi}{4} - 3x}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\frac{5\pi}{4} - 11x}{2} = \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\frac{5\pi}{4} - 3x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi d, \text{ где } d \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5\pi}{4} - 11x = 2\pi n \\ \frac{5\pi}{4} - 3x = \pi + 2\pi d \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5\pi}{4} - 11x = 2\pi n \\ \frac{5\pi}{4} - 3x = \pi + 2\pi d \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{44} - \frac{2\pi n}{11} \\ x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi d}{3} \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} \\ x = \frac{5\pi}{44} - \frac{2\pi n}{11} \\ x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi d}{3} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1) 1) $y \geq 3+x$ и $y \geq 3-x \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6$

2) $y \geq 3+x$ и $y \leq 3-x \Rightarrow -2x = 6 \Rightarrow x = -3$

3) $y \leq 3+x$ и $y \leq 3-x \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow y = 0$

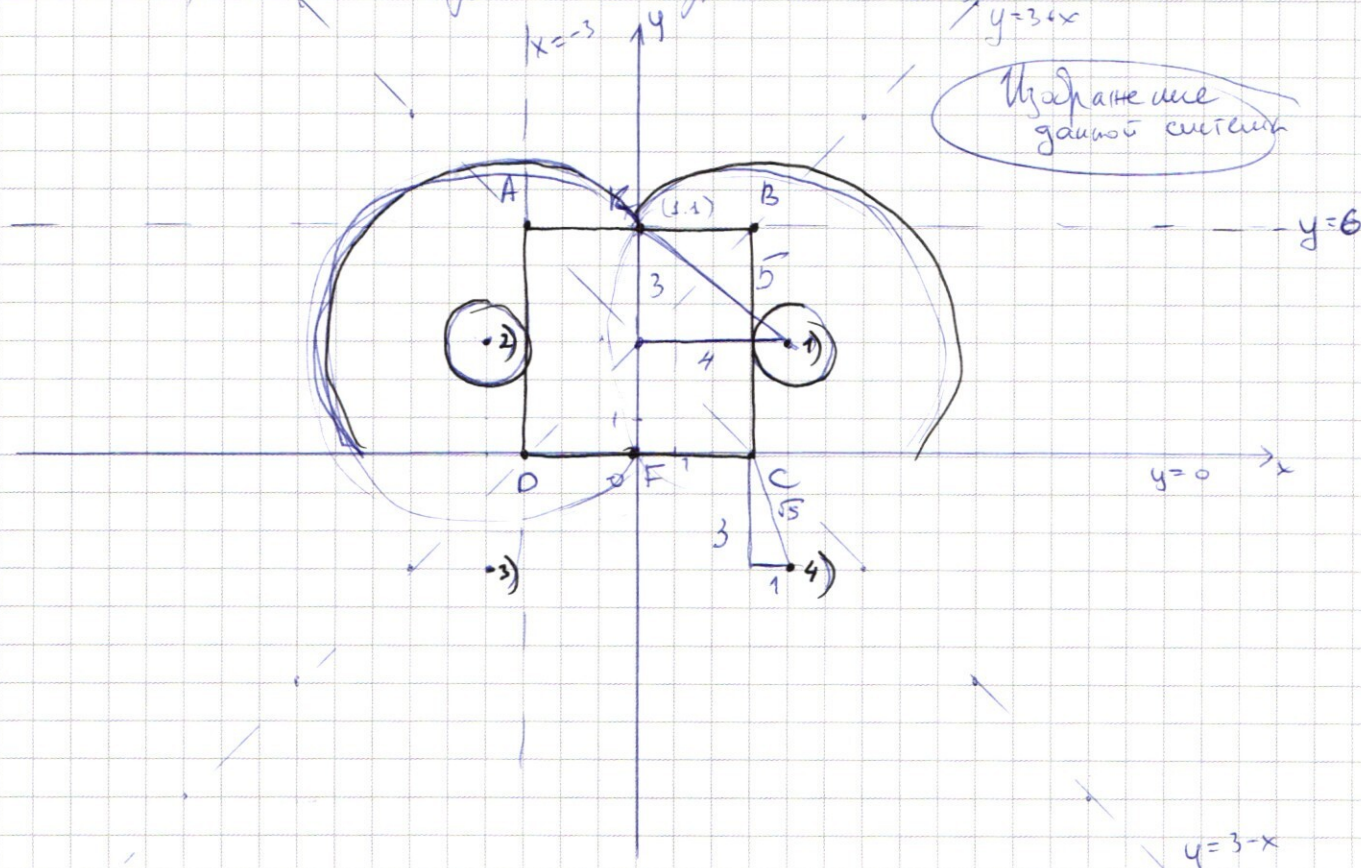
4) $y \leq 3+x$ и $y \geq 3-x \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

(2) 1) $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow$ (2) - ^{кр.} ~~кр.~~ окр.: $O(4; 3)$ и $R = \sqrt{a}$

2) $x < 0, y \geq 0 \Rightarrow$ (2) - ^{кр.} ~~кр.~~ окр.: $O(-4; 3)$ и $R = \sqrt{a}$

3) $x < 0$ и $y < 0 \Rightarrow$ (2) - ^{кр.} ~~кр.~~ окр.: $O(-4; -3)$ и $R = \sqrt{a}$

4) $x \geq 0$ и $y < 0 \Rightarrow$ (2) - ^{кр.} ~~кр.~~ окр.: $O(4; -3)$ и $R = \sqrt{a}$



• Заметим, что весь рисунок симметричен отн. $x=0 \Leftrightarrow$
 Окр. (1) имеет столько пересечения с квадратом, сколько
 окр. (2). Аналогично (3) и (4).

• Заметим, что окружности (3) и (4) $\exists$ только при $x \leq 0 \Leftrightarrow$
 Они могут $\cap \square$ только в т. D и C. ($\sqrt{a} = \sqrt{5} \Rightarrow a = 5$).
 Но в этом случае окр. (1) и (2) будут $\cap \square$ в т.

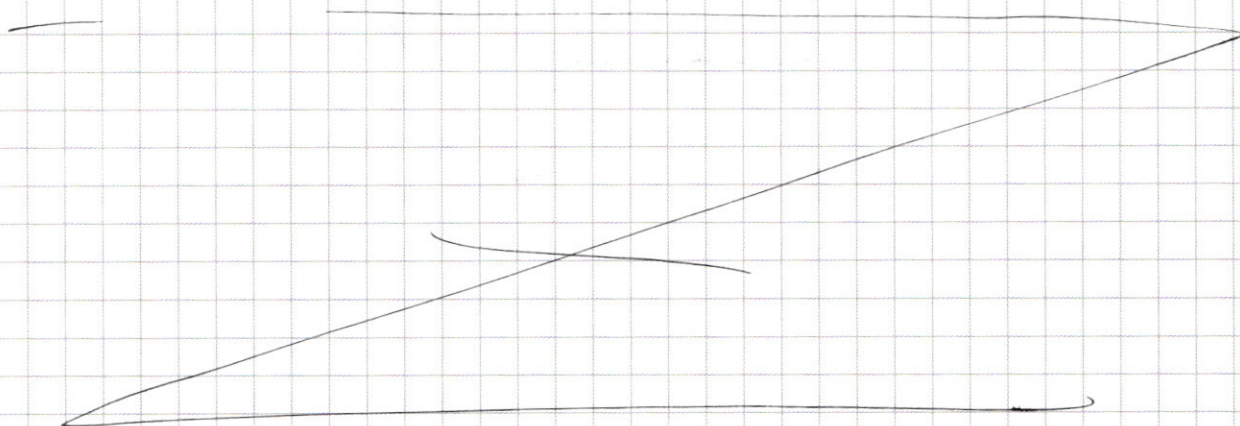
A, B, C, D $\Rightarrow$ решений ≥ 2 . $\Rightarrow$ окружности (3) и (4)
 (или $x \leq 0 \Rightarrow$ или их не чинили)
 не должны пересекать квадрат. $\Rightarrow$ их должны $\cap$ (1) и (2)

• Заметим, что (1) и (2) должны касаться $\square$. (2 корня.)
 Если т. D будет 0 или > 1 (для каждого), то корней
 решений будет не 2. ~~Нужно также рассмотреть~~
~~вариант, когда решения совпадают. Т.е.~~

Но, если решения совпадут, то их будет 2 (2 т. D). - т.к и F.
 В этом случае $\Rightarrow R = 5 \Rightarrow$ (3) и (4) не $\cap \square$. Значит
 симметрично это единственный возможный вариант для
 совпадения решений.

• Подумаем, что $\begin{cases} R=1 \\ R=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a}=1 \\ \sqrt{a}=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=5 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} a=1 \\ a=5 \end{cases}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad x^2 - 2(y+2)x + 12y - 3y^2 = 0$$

Решим ур-ие отн. x : $\Delta_1 = y^2 + 4y + 4 - 12y + 3y^2 = 4y^2 - 8y + 4 = 4(y^2 - 2y + 1) = 4(y-1)^2$

⇒

$$x = y+2 \pm 2|y-1| \Rightarrow$$

(знак подмодульного
выбирает только «правильный»
корень, а он не «важен»)

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4-y \end{cases}$$

$$(1) \quad a) \quad x = 3y$$

$$\begin{aligned} y^{4 \lg x} \cdot 3^{-\lg x} &= y^{2 \lg 3y^2} \\ y^{4 \lg 3y} \cdot 3^{-\lg 3y} &= y^{2 \lg 3y + 2 \lg y} \quad (a^x > 0) \\ y^{2 \lg 3y} \cdot 3^{-\lg 3y} &= y^{2 \lg y} \\ y^{2 \lg y + 2 \lg 3} \cdot 3^{-\lg 3y} &= y^{2 \lg y} \\ y^{2 \lg 3} \cdot 3^{-\lg 3y} &= y^{2 \lg y} \cdot 1 \\ y^{2 \lg 3} &= 3^{\lg 3y} \Rightarrow (y^{\lg 3})^2 = 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y} \\ y^{\lg 3} &= 3^{\lg 3} \Rightarrow \lg 3 = \lg y \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 9 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2 \lg(y(4-y))}$$

$$\left(\frac{y^3}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2 \lg y}$$

$$x = 4-y \Rightarrow y < 4$$

$$(22) \quad (4-y)^{\log 4} \cdot (4-y)^{-\log(4y)} = y^{\log y}$$

(d) $\log_{\frac{y^3}{4}} y = 2 \log y$ Заметим, что $y=2$ — корень:
 $2^3 \log 2 - \log 2 = 2 \log 2 \Rightarrow x=2$

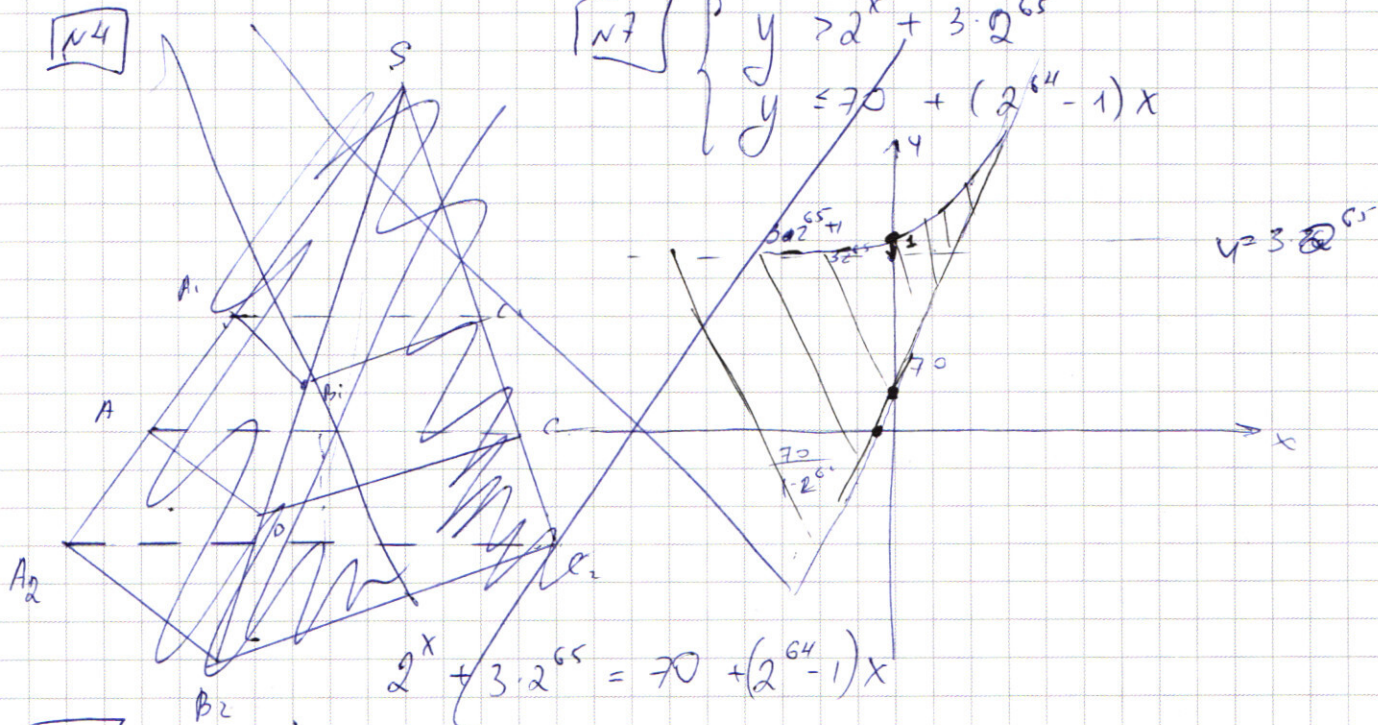
$$\bullet f_1(y) = y^{2 \lg y} \quad f_1'(y) = 2 \lg y \cdot y^{2 \lg y - 1} = 2 \lg y \cdot y^{2 \lg y - 1}$$

$$\bullet f_2(y) = \left(\frac{y^3}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} \quad f_2'(y) = \frac{-\lg(4-y)}{4-y} \cdot \left(\frac{y^3}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} - \frac{3y^2(4-y) - y^3}{(4-y)^2} \cdot \dots$$

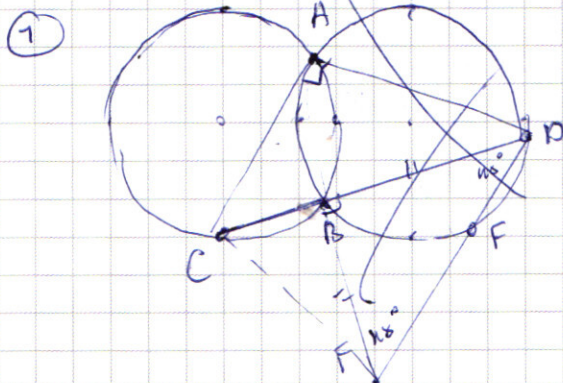
С учетом ОЗВ и монотонности корней f найдем на $[1; 3]$ $\Rightarrow x=2$ - единственное решение в этом смысле

Antwort: $\int_{y=3}^{x=9}$, $\int_{y=2}^{x=2}$

$$\boxed{n7} \quad \left\{ \begin{array}{l} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{array} \right.$$



16 a.)

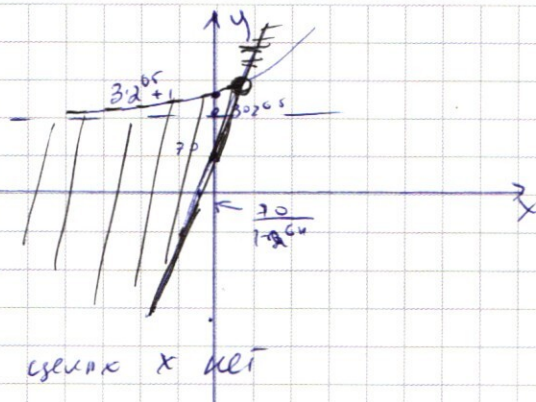


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

на прямой $x=0$: $3 \cdot 2^{65} + 1 - 70 = (3 \cdot 2^{65} - 69)$
разность



т.к. $2^{64} - 1 \gg 70$, то при $x > 0$ целых x нет

тоже так на прямой $x=0$ целые корни y нет и слева от $x=0$

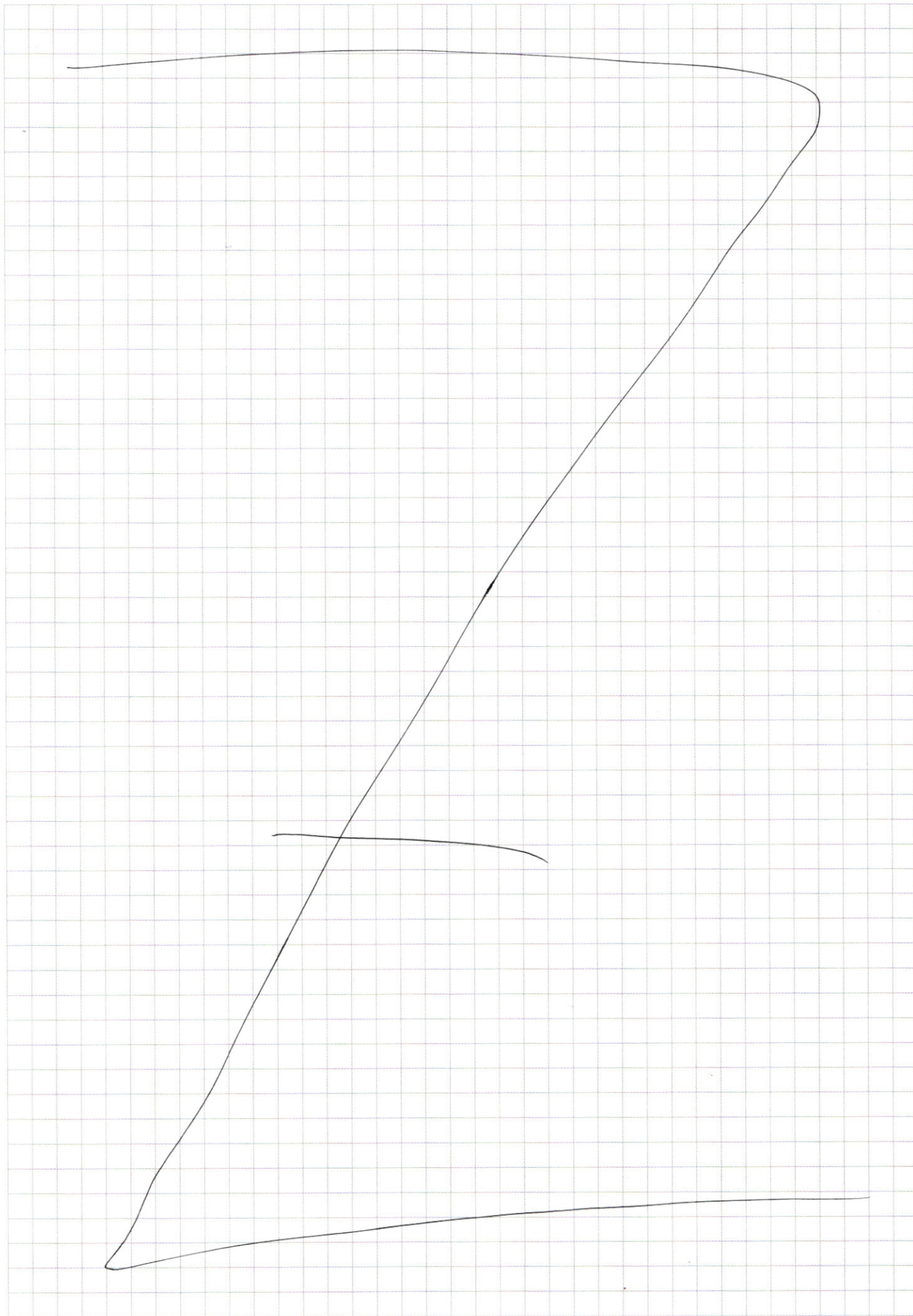
целых

y нет



$$\frac{x}{y} = 2^{64} - 1 \Rightarrow x = y(2^{64} - 1)$$

x где угодно $y \in \mathbb{Z} \ 1.. \ x = y(2^{64} - 1)$



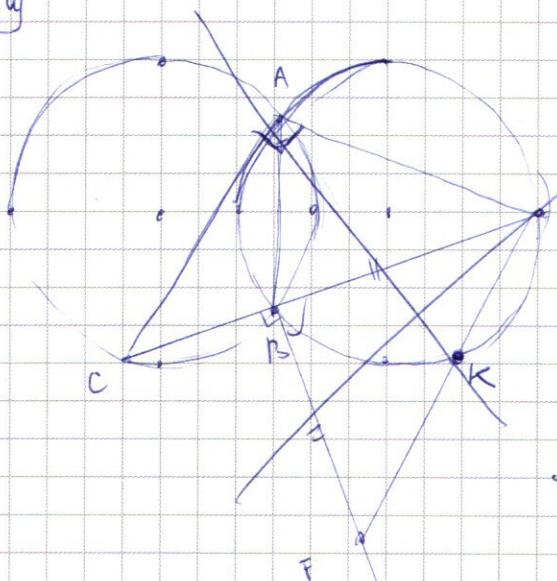
☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6.а

1)



Решение:

1) $\angle BFD$ - центральный $\Rightarrow \angle BDK = 45^\circ$
 $\angle BDK = \angle BAD = 45^\circ$ (впис. опущ. на BD)

2) AB - биссектриса

$$\left(\frac{3^5}{x}\right)^{\lg x} = 3^{2 \lg 5x}$$

$$3^{5 \lg x} \cdot x^{-\lg x} = 3^{2 \lg 3x}$$

$$x^{5 \lg 3} \cdot x^{-\lg x} = (3x)^{2 \lg 3}$$

$$y = 4 - x$$

$$3 \lg(4-y) \lg(4-y) \lg(4-y) = 2 \lg y$$

3)

$$\left(\frac{15}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$x^{\lg 15 - \lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$x^{\lg 15} \cdot x^{-\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$x^{\lg 15} \cdot x^{-\lg x} = (xy)^{2 \lg xy}$$

$$x = 10$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2x(-y-4) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 + x(2y+8) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D_1 = y^2 + 2y + 1 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 10y$$

$$\lg 3 = x$$

$$3^x = y$$

$$y \geq 1$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$3y^2 + 2(x-12) + 4x - x^2 = 0 \quad D_2 = x^2 - 24x + 144 - 12x + 3x^2 = 4x^2 - 36x + 144$$

$$x^2 - 4x + 12 - 3y^2 = 0$$

$$x^2 - 2x(y+2) + 12y - 3y^2 = 0 \quad D_1 = 2y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 = 4(y-1)^2$$

$$\sqrt{D_1} = 2|y-1|$$

$$x = \frac{1}{2} (y+2 \pm 2|y-1|) \Rightarrow \begin{cases} x = y+1-y+1 = 2 \\ x = y+2+y-1 = 2y+1 \end{cases}$$

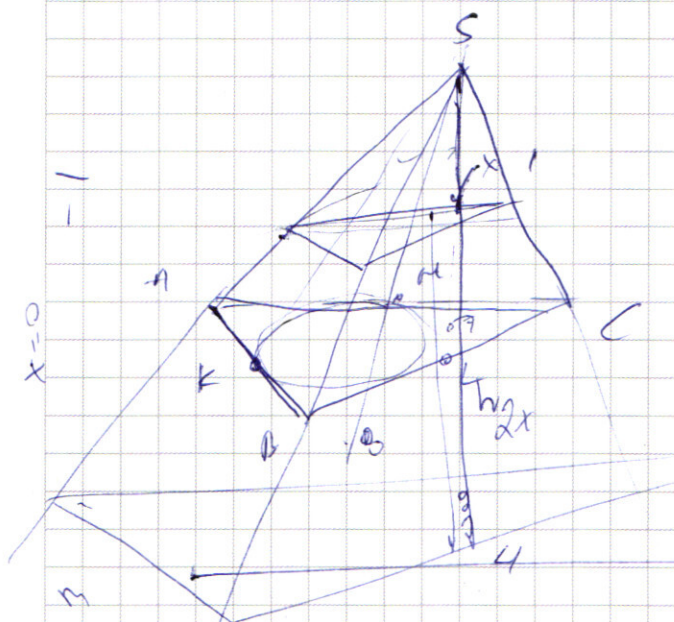
$$\left(\frac{15}{3}\right)^{\lg 3} = y^{2 \lg 3y}$$

$$5^{\lg 3} = y^{2 \lg 3y}$$

$$3^{\lg 5} = y^{2 \lg 3y}$$

$$3^{\lg 5} = y^{2 \lg 3y}$$

$$3^{\lg 5} = y^{2 \lg 3y}$$



KS

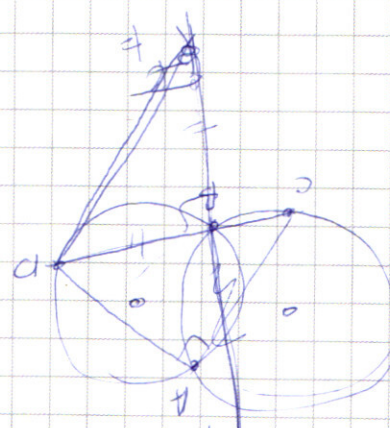
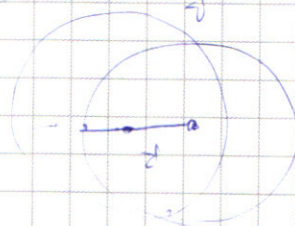
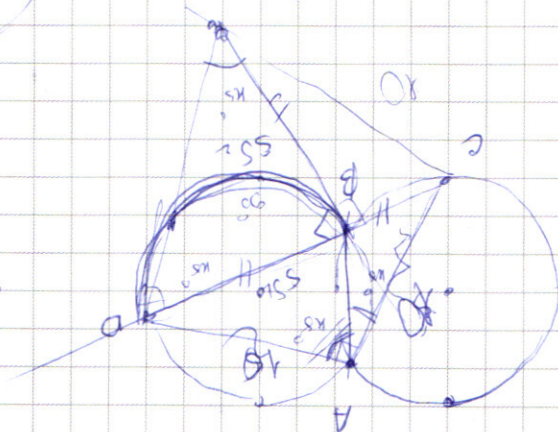
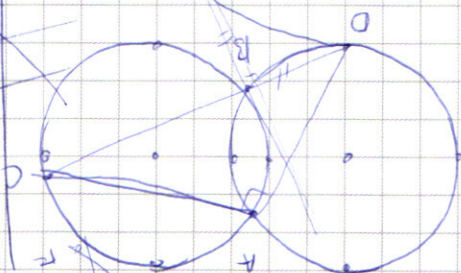
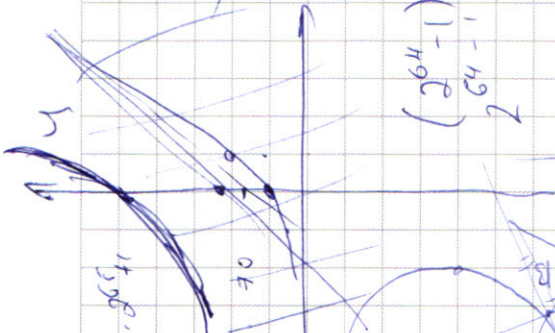
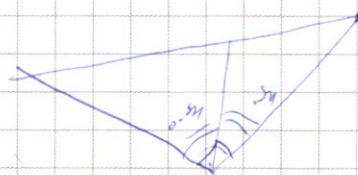
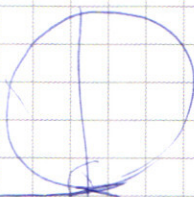
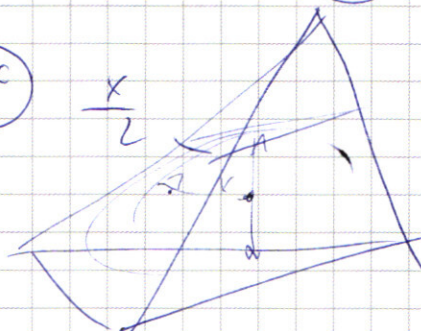
2

$p.x = 5$

x

$$\frac{x}{2}$$

x



$$p_y > 2^x \cdot 3 \cdot 2^5$$

2501

9

$$\begin{aligned}
 5 &= x \\
 9 &= x + 5 - y + x + 3 + y - 4 \\
 11 &= x + 5 - y + x + 3 + y - 4
 \end{aligned}$$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

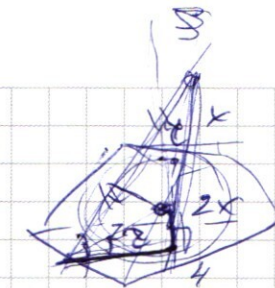
$$x = 4 - y$$

$$0 < 4 - y < 4 \quad y \neq 2 \quad y \neq 3$$

$$\frac{1}{y}$$

$$\frac{(2 \lg y)}{y} = x'(y) \quad \frac{y}{y} = 1$$

$$= 2 \lg(y) \cdot y^{2\lg y} = 0$$



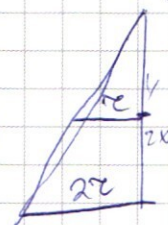
$$\frac{3x}{22} = \frac{3}{1} \cdot \frac{x}{22}$$

$$y = 1$$



$$\left(\frac{y^3}{21-y} \right) \log(4-y) = x(y)$$

4zh



$$\frac{\log(4-y)}{(4-y)} \cdot \frac{3y^2(4-y) - y^3}{(4-y)^2} = 0$$

$4 = 3 \times 7 \text{ gV}$



$$x = 4 - y$$

~~$4 + 2 + 2y -$~~

$$y + z - 2y + z$$

4-y

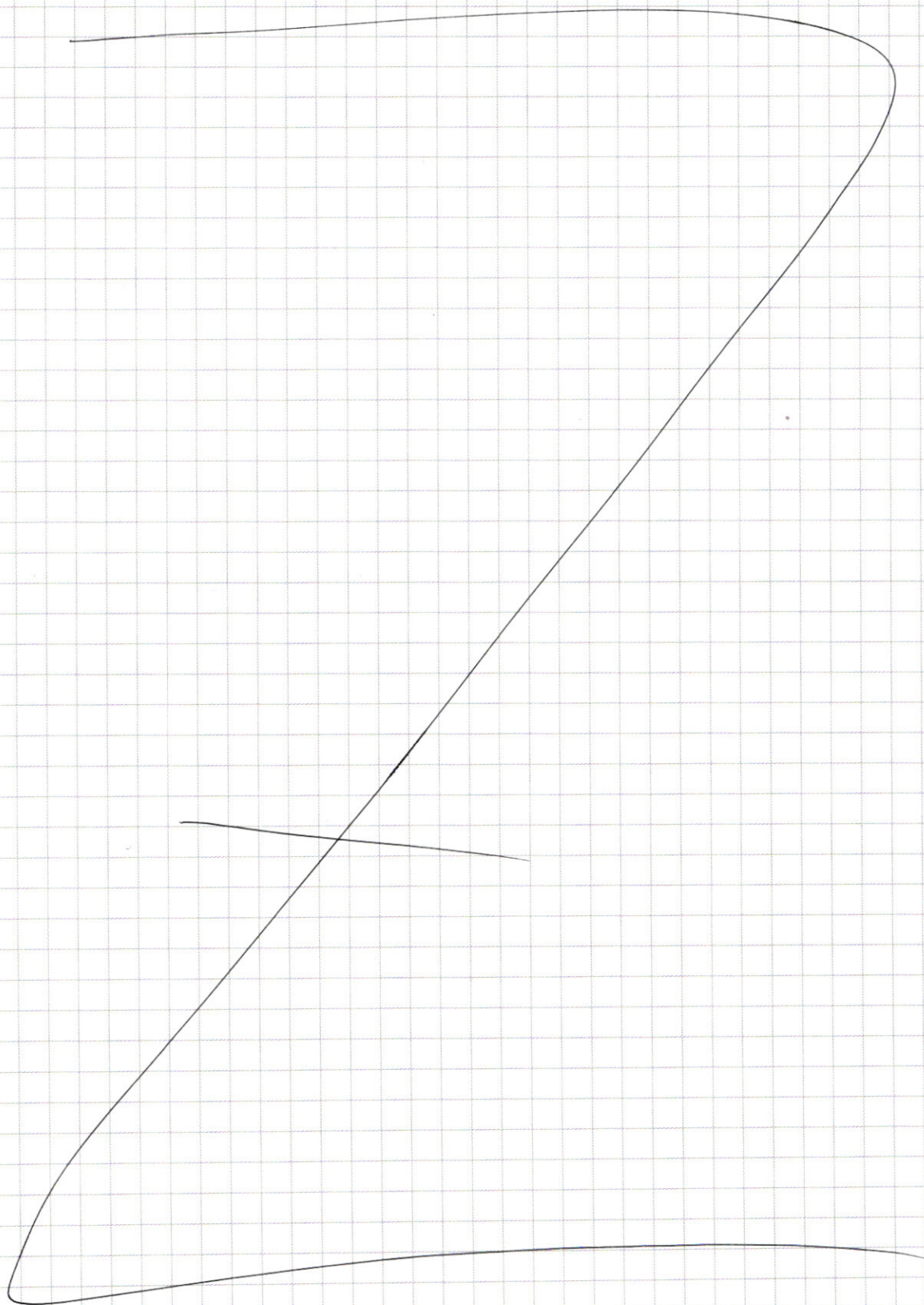
$$y^{5 \lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2 \lg x} \cdot y^{3 \lg x}$$

$$\frac{y^{3 \log x}}{x^{\log x}} = y^{2 \log y} \quad (1)$$

$$y \cdot \frac{y^{3 \lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{2 \lg y}$$

$$\frac{27.0}{1} = 0$$

$$\frac{2^{3692}}{2^{4692}} = 2^{2692} = 2^{\left(\frac{25}{2}\right)} = 2^{2692(2)} = 2$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2) $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$

$$2 \sin 7x \cdot \sin(-4x) + 2 \sin(-4x) \cos 7x = 2 \cos 14x$$

$$2 \sin(-4x) (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) = \sqrt{2} (\cos 14x - \sin 14x)$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (-2\sin 4x - \sqrt{2} \cos 7x + \sqrt{2} \sin 7x) / 20 \cdot x^{11}$$

1) $\sin 7x = -\cos 7x$ 

$$2) \sqrt{2} (\sin 7x - \cos 7x) = 2 \sin 4x$$

$$2 \sin \frac{11x+3x}{2} \cdot \sin \frac{3x-11x}{2} + 2 \sin \frac{3x-11x}{2} \cdot \sin \frac{11x+3x}{2} = 2 (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$2 \sin 7x \sin(-4x) + 2 \sin(-4x) \cdot \cos 7x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$2 \sin(-4x) (\sin x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$(\sin 7x + \cos 7x)(\sqrt{2} \sin 7x - \cos 7x) - 2 \sin 4x = 0$$

$$2) \quad \sqrt{2} (\sin 7x - \cos 7x) = 2 \sin 4x$$

$$\sin(3x+4x) = \sin 3x \cdot \cos 4x + \sin 4x \cdot \cos 3x$$

$$\cos(3x + 4x) = \cos 3x \cos 4x - \sin 3x \sin 4x$$

$$\cos(3x + 4x) = \cos 3x \cos 4x - \sin 3x \sin 4x$$

$$\int (\sin 7x - \cos 7x) = 2(\sin(7x - 3x)) = 2(\sin 7x \cdot \cos 3x - \cos 7x \cdot \sin 3x) \quad (2)$$

$$\sin^2 x (\sqrt{2} - 2 \cos x) = \cos^2 x (\sqrt{2} - 2 \sin x)$$

[illegible]

16.5
9
4 =